数理解析研究所講究録 1250 巻 2002 年 56-71

ヒルベルト空間の中の4個の部分空間の配置問題

九州大学数理　綿谷安男 (Yasuo Watatani)
Graduate School of Mathematics,Kyushu University
甲子園大学経営情報　榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto)
College of Business Administration and Information Science,
Koshien University

1　動機と我々の枠組み

動機

この論説では、ヒルベルト空間の中の閉部分空間の配置問題を扱う。

ヒルベルト空間 H の中の 1 個の部分空間 E の配置は、(dim E, codimE) により、決定される。ヒルベルト空間 H の中の 2 個の部分空間 E と F の配置は H を、E と F の 2-subspaces で分解すると、

$H = (E \cap F) \oplus (E \cap F^{\perp}) \oplus (E^{\perp} \cap F) \oplus (E^{\perp} \cap F^{\perp}) \oplus (\text{残り})$

より、

$$E = (E \cap F) \oplus (E \cap F^{\perp}) \oplus 0 \oplus 0 \oplus Im \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = (E \cap F) \oplus 0 \oplus (E^{\perp} \cap F) \oplus 0 \oplus Im \begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}$$

の形から、unitary の枠内で 完全に決定される。

この 2 個の場合を、群の表現で見ると、$e = Proj(E)$, $f = Proj(F)$ として、(E , F) の組と、symmetry $(2e-1, 2f-1)$ を対応させることにより、2 つの部分空間の組の集合と、$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = G_2$ の unitary 表現集合とが一対一に対応する。

3個以上の場合に、群 $G_n = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は、type I でない、non-amenable 群である。従って、その unitary 表現の分類は困難である。そこで、unitary 性を弱めることを考える。つまり、分類を位相ベクトル空間としての同値性から考えようというのが、そもそもの動機である。

枠組

まず、無限次元ヒルベルト空間 H の中の部分空間 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ に対して、順序付けられた組 $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ を考え、これを、n-subspace system ということにする。このものの間の同値関係として、unitary 性よりも弱く次をおく。

定義 1.1

2つの n-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E_1', \cdots, E_n')$ に対して、$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が (同配置) 同値である ($\mathcal{S} \cong \mathcal{S}'$) とは、ある有界可逆作用素 $T : H \to H'$ が存在して、$T(E_i) = E_i'(\forall i = 1, \cdots, n)$ をみたすときをいう。

注意 1.2

K を、ヒルベルト空間、A ∈ B(K) とするとき、A には、標準的に、4-subspace system $\mathcal{S}_A = (H; E_1, \cdots, E_4)$ が、次のように、対応する。

$H = K \oplus K$, $E_1 = K \oplus 0$, $E_2 = 0 \oplus K$, $E_3 = \{(x \oplus Ax) | x \in K\}$, $E_4 = \{(x \oplus x | x) \in K\}$.

このとき、$A, B \in B(K)$ に対して、$A \cong B$ (similar), つまり、ある $V \in B(K)$ （有界可逆作用素）が存在して、$VAV^{-1} = B$ であることと、$\mathcal{S}_A \cong \mathcal{S}_B$ であることとは同値である。(何故なら, $\mathcal{S}_A \cong \mathcal{S}_B$ とすると、ある $T \in B(K \oplus K)$ が存在して、$T(E_i) = E_i(i = 1, \cdots, 4)$ である。$T(E_1) = E_1$ より、$T(K \oplus 0) = K \oplus 0$ から、$\begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ T_4 & T_2 \end{pmatrix}$ として、$\begin{pmatrix} T_1 & T_3 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ の形となる。$T(E_2) = E_2$ より、$T(0 \oplus K) = 0 \oplus K$ から、$\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ の形となる。

また、$T(E_4) = E_4$ より、$T(x \oplus x) = y \oplus y$ より、$T_1 x \oplus T_2 x = y \oplus y$ から、$T_1 x = T_2 x$ を得て、$T_1 = T_2$ を持つ。これを V とおくと、$(V \oplus V)(E_3) = E_3$

から、$(V \oplus V)(x \oplus Ax) = Vx \oplus VAx = (y \oplus By)$ より、$BVx = VAx$ より、 $B = VAV^{-1}$ となる。このように、4-subspace systems の同値性は、operators の similarity の概念を、一般化したものとなっている。

注意 1.3

n-subspace systems $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が、similar（同配置同値）であることと、$\mathcal{S}$ と、$\mathcal{S}'$ から、決まる表現 $\pi_{\mathcal{S}}$ と $\pi_{\mathcal{S}'}$ が、similar であることとは、同じ

ではない。

n-subspace systems の分類を考える上で、基本となる building block として、indecomposable なものを、以下のように定義する。

定義 1.4

2 つの n-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \cdots, E'_n)$ の直和を、$\mathcal{S} \oplus \mathcal{S}' = (H \oplus H'; E_1 \oplus E'_1, \cdots, E_n \oplus E'_n)$ で定義する。

定義 1.5

n-subspace system $\mathcal{S}$ が、decomposable system であることを、あるゼロでない 2 つの n-subspace systems $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ が存在して、$\mathcal{S} \cong \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ となることとする。

$\mathcal{S}$ が、decomposable であることは、次の形でも述べることができる。

命題 1.6

$\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ が、decomposable であるということは、ある閉部分空間 $H_1 \neq (0), H_2 \neq (0)$ が、存在して、

$$H_1 + H_2 = H, H_1 \cap H_2 = (0), E_i = E_i \cap H_1 + E_i \cap H_2 (\forall i = 1, ..., n)$$

を、満たすことである。

定義 1.7

n-subspace system $\mathcal{S}$ が、indecomposable system であるとは、$\mathcal{S}$ が、decomposable でないときをいう。

同配置同値を projections の言葉を使って書くと、次になる。

命題 1.8

$\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \cdots, E'_n)$ を、2 つの同配置同値な n-subspace systems とする。$P_i = Proj(E_i), P'_i = Proj(E'_i) (\forall i = 1, ..., n)$、とおく。このとき、ある可逆作用素 $a \in B(H, H')$ が、存在して、

$P_i = (a^{-1} P'_i a) P_i$ かつ、$P'_i = (a P_i a^{-1}) P'_i (\forall i = 1, ..., n)$

が成立する。

作用素論におけるように、similar 性よりも弱い同値性として、quasi 同配置同値を、次により、n-subspace systems に導入できる。

定義 1.9

2 つの n-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ と $\mathcal{S}' = (H'; E'_1, \cdots, E'_n)$ に対して、$\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}'$ が quasi 同配置同値である ($\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$) とは、ある $T \in B(H, H'), S \in B(H', H)$ が存在して、$KerT = KerS = 0$ かつ、$\overline{R(T)} = H', \overline{R(S)} = H$, かつ、$T(E_i) \subset E'_i (\forall i = 1, ..., n), S(E'_i) \subset E_i (\forall i = 1, ..., n)$, を、満たすことである。

命題 1.10

n-subspace systems に対して、同配置同値により、indecomposability は、移り合うが、quasi 同配置同値では、一般に、indecomposability は、移り合わない。

以上の枠組で、無限次元ヒルベルト空間における、indecomposable n-subspace systems を、考察の対象とするのが我々の目的である。

2 Gelfand と Ponomarev の結果

次に、我々のモデルとなる有限次元ベクトル空間における Gelfand と Ponomarev による有名な仕事を要約しておこう。

Gelfand と Ponomarev は、1970 年に、有限次元ベクトル空間における indecomposable n-subspace systems を考え、それを、n=4 のときまで、完全決定した。彼らの結果は次の通りである。

(1) n=1 のとき、

$\mathcal{S} \cong (H; E_1), dimH = 1$ で、$dimE_1 = 0$ か 1。

(2) n=2 のとき、

$\mathcal{S} \cong (H; E_1, E_2), dimH = 1$ で、$dimE_i = 0$ か $1 (i = 1, 2)$。

(3) n=3 のとき、

$\mathcal{S} \cong (H; E_1, E_2, E_3), dimH = 1$ で、$dimE_i = 0$ か $1 (i = 1, 2, 3)$ であるか、

$\mathcal{S} \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}; \mathbb{C}(1 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1), \mathbb{C}(1 \oplus 1))$ である。

n=4 のとき Gelfand と Ponomarev は、4-subspace systems $\mathcal{S}$ に対して、次の defect と呼ばれる量 $\rho(\mathcal{S})$ を定義した。

$$\rho(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{4} dimE_i - 2dimH.$$

このとき、彼らは、この不変量の値域が、$\{0, \pm 1, \pm 2\}$ を示して、その値に従って、indecomposable 4- subspace systems を以下のように、分類した。

(a) 全体空間が、偶数次元 (2k) (k=1,2,$\cdots$) である場合、及び、

(b) 全体空間が、奇数次元 (2k+1) (k=0,1,2,$\cdots$) の場合は、次の通りである。

(添え字の置き換えで、同じものは同一視している。)

(a) 全体空間 H が、偶数次元の場合の分類

以下で、$\{e_i, f_i\}, i=1,\cdots,k$ を、H の $CONS$ とする。

(a の 1)　defect が (-1) のとき、次の形のものと同値である。

$H=[e_1,\cdots,e_k,f_1,\cdots,f_k]$,

$E_1=[e_1,\cdots,e_k]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[e_2+f_1,\cdots,e_k+f_{k-1}]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k]$,

(a の 2)　defect が (+1) のとき、次の形のものと同値である。

$H=[e_1,\cdots,e_k,f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_k+f_{k-1}),f_k]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k]$.

(a の 3)　defect が 0 のとき、(パラメータなし)、次の形のものと同値である。

$H=[e_1,\cdots,e_k,f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_k+f_{k-1})]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k]$.

(a の 4)　defect が 0 のとき、(パラメータ λ つき)、次の形のものと同値である。

(ここで、$\lambda\in\mathbb{C},\lambda\neq 0,1$ である。). $H=[e_1,\cdots,e_k,f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[(e_1+\lambda f_1),(e_2+f_1+\lambda f_2),\cdots,(e_k+f_{k-1}+\lambda f_k)]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k]$.

(b) 全体空間 H が、奇数次元の場合の分類

以下で、$\{e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},f_1,\cdots,f_k\}$, を、H の CONS とする。

(b の 1)　defect が (-1) のとき、

$H=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[(e_2+f_1),\cdots,(e_{k+1}+f_k)]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k]$.

(b の 2)　defect が (+1) のとき、

$H=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_{k+1}+f_k)]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k,e_{k+1}]$.

(b の 3)　defect が 0 のとき、

$H=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_{k+1}+f_k)]$, $E_4=[e_1+f_1,\cdots,e_k+f_k]$.

(b の 4)　defect が (-2) のとき、

$H=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k]$, $E_3=[(e_2+f_1),\cdots,(e_{k+1}+f_k)]$, $E_4=[e_1+f_2,\cdots,(e_{k-1}+f_k),(e_k+e_{k+1})]$.

(b の 5)　defect が (+2) のとき、

$H=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1},f_1,\cdots,f_k]$, $E_1=[e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}]$, $E_2=[f_1,\cdots,f_k,e_{k+1}]$, $E_3=[e_1,(e_2+f_1),\cdots,(e_{k+1}+f_k)]$, $E_4=[f_1,(e_1+f_2),\cdots,(e_{k-1}+f_k),(e_k+e_{k+1})]$.

(Gelfand と Ponomarev のアイディア)

Gelfand と Ponomarev は、この証明のために、n-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ の全体を考える。道具として、2個の変換 Φ^+ と Φ^- を導入する。それは、n-subspace systems $\mathcal{S}$ を、n-subspace systems $\mathcal{S}^+ = \Phi^+(\mathcal{S})$, $\mathcal{S}^- = \Phi^-(\mathcal{S})$ に動かす。Φ^+ と Φ^- は、次の性質を持つ。

(1) n-subspace systems $\mathcal{S}$ が、indecomposable とする。このとき、$\Phi^+(\mathcal{S})$ と $\Phi^-(\mathcal{S})$ は、indecomposable である。

(2) $\mathcal{S}$ が、indecomposable で、$\mathcal{S} \neq 0$, $\Phi^+(\mathcal{S}) \neq 0$ $(resp.\Phi^-(\mathcal{S}) \neq 0)$ ならば、$\Phi^-\Phi^+(\mathcal{S})$ (resp. $\Phi^+\Phi^-(\mathcal{S})) \cong \mathcal{S}$ である。

(3) $\mathcal{S}$ が、indecomposable で、$\mathcal{S} \neq 0$, $\Phi^+(\mathcal{S}) \neq 0$ (resp.$\Phi^-(\mathcal{S}) \neq 0$) ならば、$\rho(\mathcal{S}) = \rho(\Phi^+(\mathcal{S}))$ $(resp.\rho(\mathcal{S}) = \rho(\Phi^-(\mathcal{S}))$ である。

(4)$\mathcal{S}$ が、indecomposable で、$\rho(\mathcal{S}) < 0$ とする。このとき、$\exists \ell \geq 1$ が存在して、$(\Phi^+)^{\ell-1}(\mathcal{S}) \neq 0$, $(\Phi^+)^{\ell}(\mathcal{S}) = 0$ かつ、$\mathcal{S} \cong (\Phi^-)^{\ell-1}(\Phi^+)^{\ell-1}(\mathcal{S})$ が成立する。

(5) $\mathcal{S}$ が、indecomposable で、$\rho(\mathcal{S}) > 0$ とする. このとき、$\exists \ell \geq 1$ が存在して、$(\Phi^-)^{\ell-1}(\mathcal{S}) \neq 0$, $(\Phi^-)^{\ell}(\mathcal{S}) = 0$、かつ、$\mathcal{S} \cong (\Phi^+)^{\ell-1}(\Phi^-)^{\ell-1}(\mathcal{S})$ が成立する。

これにより、この Φ^+, Φ^- を使って、$\rho(\mathcal{S}) \neq 0$ のときの、indecomposable 4 subspace system の分類がなされる。

注意 2.1

これより、$\rho(\mathcal{S}) \neq 0$ の状況は、$\Phi^{\pm}(\mathcal{S}) = 0$ となる indecomposable 4 subspace systems の決定になる。一方、defect$\rho(\mathcal{S}) = 0$ のときは、$\Phi^{\pm}$ は、働かない。

有限次元ヒルベルト空間での、defect$\rho(\mathcal{S}) = 0$ のときは、次の形である。

命題 2.2

$\mathcal{S}$ を indecomposable 4-subspace system で、$\rho(\mathcal{S}) = 0$ とする。このとき、$\mathcal{S}$ は、次の形と添え字の置き換えを除いて, 同値である。E と F を、有限次元ヒルベルト空間、$A : E \to F, B : F \to E$ を、bounded linear map とする。$H = E \oplus F, E_1 = E \oplus 0, E_2 = 0 \oplus F$,

$E_3 = \{(x \oplus Sx) | x \in E\}, E_4 = \{(Ty \oplus y) | y \in F\}$ として、$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ とおく。

3 無限次元Indecomposable n-subspace systems (n=1,2,3,4)について

以下、Hを、ヒルベルト空間として、結果を述べる。

(1) n=1のとき、

$\mathcal{S}=(H;E)$ について、$\mathcal{S}$ が、indecomposableであるためには、dim H =1 でなければならない。よって、$\mathcal{S}\cong(H;E), dimH=1$ かつ、dim E =0か1.

(2) n=2のとき、

$\mathcal{S}=(H;E,F)$ について、$\mathcal{S}$ が、indecomposableであるための条件を調べる。EとFに、2-subspaces method を行う。

$$E=(E\cap F)\oplus Im\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\oplus(E\cap F^{\perp})\oplus 0_{E^{\perp}\cap F}\oplus 0_{E^{\perp}\cap F^{\perp}}$$

$$F=(E\cap F)\oplus Im\begin{pmatrix}c^2&cs\\cs&s^2\end{pmatrix}\oplus 0_{E\cap F^{\perp}}\oplus(E^{\perp}\cap F)\oplus 0_{E^{\perp}\cap F^{\perp}}$$

indecomposableより、直和成分が1個に落ちる。generic positionの部分では、cとsは可換である。よって、generic positionの部分では、作用する空間は、$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ でなければならない。このとき、$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C};E,F)$ は、decomposableとなる。よって、2-subspace system $\mathcal{S}$ で、indecomposableなものは、$\mathcal{S}\cong(H;E_1,E_2)$ に対して、$dimH=1$ かつ、$dimE_i$ =0か1 (i=1,2) のものである。

(3) n=3のとき、

3-subspace system $\mathcal{S}=(H;E_1,E_2,E_3)$ について、indecomposableで $dimH<\infty$ となるものは、$\mathcal{S}\cong(H;E_1,E_2,E_3)$, dim H=1 かつ、$dimE_i$ =0か1 (i=1,2,3) か又は、$\mathcal{S}\cong(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C};\mathbb{C}(1\oplus 0),\mathbb{C}(1\oplus 0),\mathbb{C}(1\oplus 1))$ である。$dimH=\infty$ に対しては、現在の所、indecomposableのものは構成できていない。(Rosenthalのopen questionがある：5個の要素を持つtransitive latticeは存在するのか？これが肯定的ならば、我々は無限次元のindecomposableなものを得ることが出来る。)

例3.1

次のものは、decomposableである。

(1) $\mathcal{S}=(H;E_1,E_2,E_3)$ で、次を取る。K を、ヒルベルト空間，Aを、K 上の(un)bounded linear operatorとし、$dimK\geq 2$ とする。

$H=K\oplus K, E_1=K\oplus 0, E_2=0\oplus K,\ E_3=\{(x\oplus Ax)|x\in D(A)\}$.

(2) (C. Davisの例) $\mathcal{S}=(H;E_1,E_2,E_3)$ で、次を取る。Hを、無限次

元ヒルベルト空間　, $H = [e_1, f_1, e_2, f_2, \cdots]$, (ここで、$\{e_i, f_i\}, i = 1, 2, \cdots$, は、H の CONS である。) .

$$g_n = (cos\theta_n)e_n + (sin\theta_n)f_n, n = 1, 2, \cdots, \theta_n = \frac{\pi}{2n+1}.$$

$E_1 = [e_1, e_2, e_3, \cdots]$,$E_2 = [g_1, g_2, \cdots]$,

$E_3 = [e_1 + e_2, f_2 + f_3, \cdots, e_{2n-1} + e_{2n}, f_{2n} + f_{2n+1}, \cdots]$.

このとき、$(Proj(E_1), Proj(E_2), Proj(E_3))' = \mathbb{C}$ である。

一般的に、3-subspace systems については、次のことがわかる。

命題 3.2

$\mathcal{S} = (H; E_1, E_2, E_3)$ を indecomposable 3-subspace systems とする。$E_i \neq (0), H (\forall i = 1, 2, 3)$ とする。このとき、$E_k \cap E_\ell = 0, (\forall k, \ell = 1, 2, 3, k \neq \ell)$.

命題 3.3

$\mathcal{S} = (H; E_1, E_2, E_3)$ を indecomposable 3-subspace systems とする。更に、次を、満たすとする。

$$H = E_1 + E_2, E_1 \cap E_2 = (0).$$

このとき、$\mathcal{S}$ は、有限次元の indecomposable systems である。

命題 3.4

$\mathcal{S} = (H; E_1, E_2, E_3)$ を indecomposable 3-subspace systems とする。もし、$dimH = +\infty$ とすると、このとき、$dimE_i = +\infty (\forall i = 1, 2, 3)$ が成立する。

以下に、4-subspace systems の考察を、行う。

命題 3.5

K を、無限次元ヒルベルト空間 , S を 、unilateral shift とする。このとき、次の system は、indecomposable である。

$H = K \oplus K$, $E_1 = K \oplus 0$, $E_2 = 0 \oplus K$, $E_3 = \{(x \oplus Sx) | x \in K\}$, $E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}$.

(証明のスケッチ)

補題 1.

H を、ヒルベルト空間とする。$E_1, ..., E_4$ を、H の閉部分空間とする。$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_n)$ は、次を、満たすと仮定する。

$H = E_i + E_j, E_i \cap E_j = (0), \forall (i, j) \in \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$.

このとき、ある $A \in B(H)$ が存在して、$AE_1 \subset E_2, AE_2 \subset E_1$ かつ、$\{(x_1 + Ax_1) | x_1 \in E_1\} = E_3, \{(Ax_2 + x_2) | x_2 \in E_2\} = E_4$ が、成立する。

補題 2.

$\mathcal{S}$ は、補題 1 の仮定の条件を満たすとする。作用素 $A \in B(H)$ を、補題 1 のものとする。$\mathcal{S}$ が、decomposable であると仮定する。このとき、次のいずれかが起きる。

$(I) T_1 = A^2|_{E_1}$ は、decomposable である、

又は,

$(II) T_2 = A^2|_{E_2}$ は、decomposable である、

又は,

$(III) E_3 \subset E_1$ かつ、$E_4 \subset E_2$ である。

補題 3.

unilateral shift S から作られる 4-subspace system は、補題 1 の仮定を満たす。この system では、(III) が、成立しない。

補題 4.

unilateral shift S から作られる 4-subspace system を取る。

このとき、導来される作用素 $A \in B(H)$ について、$A^2|_{E_1}$ と $A^2|_{E_2}$ は、indecomposable である。

(補題 4 の証明)

Beurling の定理により、unilateral shift の invariant subspace M は、inner function θ により、$M = \theta H^2$ と書けることから、decomposable の仮定と矛盾することを示す。

4 defects の概念の無限次元化と分数値 defects の出現

Gelfand と Ponomarev により、有限次元ベクトル空間の 4-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_4)$ の不変量として defect

$$\rho(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{4} dimE_i - 2dimH$$

が考えられている。この量は、このままの形では、無限次元の場合に意味をもたない。そこで、この量を無限次元の場合に定義するために、次の n-subspace systems を考える。まず、次を定義する。

定義 4.1

$T \in B(H)$ が、 weak Fredholm operator であることを、$dimKerT < +\infty$ かつ $dimKerT^* < \infty$ で定義する。

定義 4.2

$\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_n)$ を n-subspace systems とする。$T_{ij} : E_i \oplus E_j \to H (i, j = 1, \cdots, n)$ を、

$$T_{ij}(x_i \oplus x_j) = x_i + x_j$$

により、定義する。

$\mathcal{S}$ が、Fredholm system (resp. weak Fredholm system) を、$T_{ij} (\forall i, j = 1, ..., n)$ が Fredholm operator (resp. weak Fredholm operator) であると定義する。

このとき、

$$IndT_{ij} = dimKerT_{ij} - dimKerT_{ij}^*$$

とおき、defect $\rho(\mathcal{S})$ を、

$$\rho(\mathcal{S}) = 1/3 \sum_{i<j} IndT_{ij}$$

で、定義する。

命題 4.3

$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ を、有限次元ベクトル空間上の 4-subspace system とする。このとき、

$$\text{Gelfand-Ponomarev defect} \quad \rho(\mathcal{S}) = \text{ our defect } \quad \rho(\mathcal{S})$$

である。

命題 4.4

$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ を、n-subspace system とする。このとき、$KerT_{ij} \cong (E_i \cap E_j), KerT_{ij}^* \cong ((E_i)^\perp \cap (E_j)^\perp)(\forall i, j = 1, ..., n)$ が成立する。

有限次元ヒルベルト空間上の、indecomposable 4-subspace systems の defects の値域は、$\{0, \pm 1, \pm 2\}$ である。しかし、無限次元ヒルベルト空間上では、特異な現象が起きる。

定理 4.5

無限次元ヒルベルト空間上の、indecomposable 4-subspace systems の defects の値域は、$\mathbb{Z}/3$ である。

例 4.6

K を、無限次元 ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ とする。$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ とおく。$\alpha \in \mathbb{C}$ かつ、$\alpha \notin \mathbb{T} \cup (\mathbb{T} + 1)$ とおく。S を、K 上の unilateral shift とする。このとき、次の 4-subspace system $\mathcal{S}_\alpha = (H; E_1, ..., E_4)$ を

$H = K \oplus K$,
$E_1 = K \oplus (0)$,
$E_2 = (0) \oplus K$,
$E_3 = \{(x \oplus (S+\alpha)x)|x \in K\}$, $E_4 = \{(x \oplus x)|x \in K\}$
とおく。このとき、$\{\mathcal{S}_\alpha\}_\alpha$ は、お互いに、(同配置) 同値でない indecomposable Fredholm 4-subspace system である。

このとき、$\rho(\mathcal{S}_\alpha) = \begin{cases} -2/3 & \text{if } (|\alpha|<1, |\alpha-1|<1), \\ -1/3 & \text{if } (|\alpha|<1, |\alpha-1|>1), \\ -1/3 & \text{if } (|\alpha|>1, |\alpha-1|<1), \\ 0 & \text{if } (|\alpha|>1, |\alpha-1|>1) \end{cases}$

例 4.7
(defects(-n/3) の indecomposable 4-subspace systems の例)
K を 無限次元ヒルベルト空間とし、$\{u_i\}_{i\geq 1}$ を、その CONS とする。このとき、次の 4-subspace systems $\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ は、indecomposable であり、その defects は、$(-n/3)$ である。
$H = K^n \oplus K^n$ とおく。$E_1 = K^n \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K^n$,
$E_3 = [(u_i, 0, \cdots, 0) \oplus (u_{i+1}, u_i, 0, \cdots, 0),$
$(0, u_i, 0, \cdots, 0) \oplus (0, u_{i+1}, u_i, 0, \cdots, 0), \cdots,$
$(0, 0, \cdots, 0, u_i) \oplus (0, 0, \cdots, 0, u_{i+1})|i \in \mathbb{N}]$,
$E_4 = [x \oplus x | x \in K^n]$.

5 bounded operator systems から来ない indecomposable systems

4-subspace system として、標準的に、bounded operators から来るものが考えられる。そこで、我々は、次のクラスをおく。

定義 5.1
次の 4-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ を考える。K_1, K_2 を ヒルベルト空間とし、$S \in B(K_1, K_2), T \in B(K_2, K_1)$ とする。次をおく。
$H = K_1 \oplus K_2$,
$E_1 = K_1 \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K_2$, $E_3 = \{(x \oplus Sx) \, |x \in K_1\}$,
$E_4 = \{(Ty \oplus y)|y \in K_2\}$
この形の system $\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ と、添え字を入れ替えて同値となるものを, bounded operator system という。
このとき、次が成り立つ。

定理 5.2

bounded operator systems とは、(同配置) 同値とはならない、連続無限個の indecomposable 4-subspace system が存在する。

これは、次のようにして、示せる：

例 5.3

(bounded operator systems と同値にならない例)

次の 4-subspace system をおく。K を、ヒルベルト空間 として、$\{e_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ を、その CONS とする。$\alpha > 1$ に対して、重み列 $(w_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ を、次でおく。

$$w_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i \geq 0, \\ e^{(-\alpha)^i} & \text{if } i \geq 1 \end{cases}$$

この重み列を使って、重み shift V_α を、次でおく。

$$V_\alpha e_i = w_i e_{i+1} (i \in \mathbb{Z})$$

これらを使って、4-subspace systems　$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ を次で作る。

$H = K \oplus K,$

$E_1 = K \oplus 0$,

$E_2 = 0 \oplus K,$

$E_3 = \{(x \oplus V_\alpha x) | x \in D(V_\alpha)\},$

$E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}$

このとき、これらの 4-subspace systems　は、お互いに (同配置) 同値とはならない、indecomposable 4-subspace systems である。しかも、これらの 4-subspace systems　は、bounded operator systems と (同配置) 同値ではない。

indecomposable 4-subspace systems が、bounded operator systems を、変形して、得られるかについてであるが、次のものは、1 つの手術をおこなうと、decomposable なものが出来てしまう例になっている。

例 5.4

次の system を考える。K を、$\ell^2(\mathbb{Z})$ とする。K の CONS を、$(e_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ と書く。V を、K 上の bilateral shift とする。このとき、次をおく：

$H = K \oplus K,$

$E_1 = K \oplus 0,$

$E_2 = 0 \oplus K,$

$E_3 = \{(x \oplus Vx) | x \in K\}$,

$E_4 = [(e_i \oplus e_i) | i \neq 0]$

このとき、この 4-subspace system $\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ は、decomposable となる。

また、Gelfand と Ponomarev の defect(-2) の有限次元 indecomposable system を、自然に、無限次元化した 4-subspace system を、考えると、それは、decomposable になってしまう。その例は次である。

例 5.5

$\{e_i, f_i | i \geq 1\}$ を、ヒルベルト空間 H 空間の CONS とする。

$H = [e_i, f_i | i \geq 1]$, $E_1 = [e_i | i \geq 2]$, $E_2 = [f_i | i \geq 1]$,

$E_3 = [e_i + f_i | i \geq 1]$, $E_4 = [e_1 + e_2, e_{i+2} + f_i | i \geq 1]$, とする。このとき、この system $\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ は、decomposable である。しかし、これは、bounded operator system ではない。

6 Gelfand と Ponomarev の変換 Φ^+ と Φ^- の無限次元化

Gelfand と Ponomarev の分類理論に現れる変換 Φ^+ と Φ^- の無限次元化をここでは考えよう。

$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ を、n-subspace system とする。$R = \oplus_{i=1}^n E_i$ とおく。

$\tau : R \to H$ を、$\tau(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$ とおく。又、$H^+ = Ker\tau$ とおく。

$$E_k^+ = \{x = (x_1, \cdots, x_{k-1}, 0_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) | \tau(x) = 0\}.$$

とおく。

これより、Φ^+ の定義として、

定義 6.1

$\Phi^+(\mathcal{S}) = (H^+; E_1^+, ..., E_n^+)$ と定義する。このとき、$\Phi^+(\mathcal{S})$ を、$\mathcal{S}^+$ とも書く。

例 6.2

(1) $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; \mathbb{C}, 0, 0)$ のとき、$\mathcal{S}^+ \cong (0; 0, 0, 0)$ である。

(2) $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}^2; \mathbb{C} \oplus 0, 0 \oplus \mathbb{C})$ のとき、$\mathcal{S}^+ \cong (0; 0, 0)$ である。

(3) $\mathcal{S} \cong (\mathbb{C}; \mathbb{C}, \mathbb{C}, 0)$ のとき、$\mathcal{S}^+ \cong (\mathbb{C}; 0, 0, \mathbb{C})$ である。

(4) $\mathcal{S} = (H; E_1, \cdots, E_4) \cong (\mathbb{C}^3; \mathbb{C}(1 \oplus 0 \oplus 0), \mathbb{C}(0 \oplus 1 \oplus 0),$
$\mathbb{C}(0 \oplus 1 \oplus 1), \mathbb{C}(1 \oplus 0 \oplus 1))$ のとき、
$\mathcal{S}^+ \cong (\mathbb{C}; 0, 0, 0, 0)$ である。

次に、Φ^- の定義を与えよう。まず、

定義 6.3

$\mathcal{S}=(H;E_1,...,E_4)$ を、n-subspace system とする。$\mathcal{S}^{\perp}=\Phi^{\perp}(\mathcal{S})$ を、$\mathcal{S}^{\perp}=\Phi^{\perp}(\mathcal{S})=(H;E_1^{\perp},...,E_n^{\perp})$ で定義する。

これを使って、Φ^- の定義を、次のようにする。

定義 6.4

$\mathcal{S}=(H;E_1,...,E_n)$ を、n-subspace system とする。$\mathcal{S}^-=\Phi^-(\mathcal{S})$ を、$\mathcal{S}^-=\Phi^-(\mathcal{S})=\Phi^{\perp}\Phi^{+}\Phi^{\perp}(\mathcal{S})$ で定義する。

例 6.5

(1) $\mathcal{S}=(\mathbb{C};0,0,0)$ のとき、$\mathcal{S}^-\cong(\mathbb{C}^2;\mathbb{C}(1\oplus 0),\mathbb{C}(0\oplus 1),\mathbb{C}(1\oplus 1))$ である。

(2) $\mathcal{S}=(\mathbb{C};0,0,0,0)$ のとき、$\mathcal{S}^-\cong(\mathbb{C}^3;\mathbb{C}(1\oplus 0\oplus 0),\mathbb{C}(0\oplus 1\oplus 0)$, $\mathbb{C}(0\oplus 1\oplus 1),\mathbb{C}(1\oplus 0\oplus 1))$ である。

Φ^+ と Φ^- は、以下の性質をもつ。

命題 6.6

$\mathcal{S}_1,\mathcal{S}_2$ を、n-subspace system とする。このとき、

$$\Phi^{\pm}(\mathcal{S}_1\oplus\mathcal{S}_2)\cong\Phi^{\pm}(\mathcal{S}_1)\oplus\Phi^{\pm}(\mathcal{S}_2)$$

が、成立する。

Φ^+ と Φ^- の双対性を見るために、次の条件を設定する。

定義 6.7

$\mathcal{S}=(H;E_1,...,E_n)$ を、n-subspace system とする。$\mathcal{S}$ が、strongly reduced above (SRA) という性質を満たすということを、$\sum_{i=1,i\neq k}^{n}E_i=H(\forall k=1,\cdots,n)$ であることと、定義する。

定義 6.8

$\mathcal{S}=(H;E_1,...,E_n)$ を、n-subspace system とする。$\mathcal{S}$ が、closed image property(CIP) という性質を満たすとは、次が成立するときをいう。

$p_k:R=\oplus_{i=1}^{n}E_i\to 0\oplus E_k\oplus 0(projection)$,

$r:R=\oplus_{i=1}^{n}E_i\to H^{+}(projection)$,

$e_i:H\to E_i(projection)$ とおくとき、次が、成立している。

(1) $Im(rp_k)$ が、closed である。

(2)$\{(e_1x,\cdots,e_nx)\in R|x\in H\}$ が、closed である。

定義 6.9

$\mathcal{S}=(H;E_1,...,E_n)$ を、n-subspace system とする。$\mathcal{S}$ が、(CIP) を満たすある n-subspace system と同値であるとき、$\mathcal{S}$ は、性質 (WCIP) を、満たすという。

このとき、Φ^+ と Φ^- の双対性が、次のように成り立つ。

定理 6.10

(1)$\mathcal{S}$ を、n-subspace system とする。もし、$\mathcal{S}$ が、性質 (SRA) 及び性質 (WCIP) を満たすとする。このとき、$\Phi^-\Phi^+(\mathcal{S}) \cong \mathcal{S}$ となる。

(2)$\mathcal{S}$ を、n-subspace system とする。もし、$\mathcal{S}^\perp$ が、性質 (SRA) 及び性質 (WCIP) を満たすとする。このとき、$\Phi^+\Phi^-(\mathcal{S}) \cong \mathcal{S}$ となる。

次に、$\mathcal{S}^+, \mathcal{S}^-$ の indecomposability の条件を見ることにする。

定理 6.11

$\mathcal{S}(\neq 0)$ は、indecomposable n-subspace system とする。このとき、次の仮定をおく。

(仮定)

$\mathcal{S}, (\mathcal{S}^+)^\perp$ は、共に、性質 (SRA) 及び 性質 (WCIP) を満たすとする。

このとき、$\mathcal{S}^+$ は、indecomposable である。

定理 6.12

$\mathcal{S}(\neq 0)$ は、indecomposable n-subspace system とする。このとき、次の仮定をおく。

(仮定)

$\mathcal{S}^\perp$ と $\mathcal{S}^-$ が、共に、性質 (S R A) 及び 性質 (WCIP) を満たすとする。

このとき、$\mathcal{S}^-$ は、indecomposable である。

以下に、注意として、定理の仮定である性質は、無条件には、成立しないことを指摘しておく。ここで、性質 (CIP) の成立しない例をあげておくことにする。

命題 6.13

$\{e_n, f_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を、ヒルベルト空間 H の CONS とする。

$$g_n = (cos\frac{1}{n})e_n + (sin\frac{1}{n})f_n$$

とおく。又、$M = [e_n | n \in \mathbb{N}], N = [g_n | n \in \mathbb{N}], H = [e_n, f_n | n \in \mathbb{N}]$ とおく。

又、$p = Proj(M), q = Proj(N)$ とおく。このとき、

$L = \{((p(x), q(x)) | x \in H\}$ は、closed ではない。

以下に、$\Phi^\pm(\mathcal{S})$ が、indecomposable となる無限次元の例を与える。

例 6.14

K を、無限次元 ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ とする。S を、K 上の unilateal shift とする。$\alpha \in \mathbb{C}$ とする。このとき、次の 4-subspace systems $\mathcal{S}_\alpha$ は、同配置同値でない indecomposable systems である。

$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0$,

$E_2 = 0 \oplus K$,
$E_3 = \{(x \oplus (S+\alpha)x) | x \in K\}$,
$E_4 = \{(x \oplus x) | x \in K\}\}$
このとき、$\mathcal{S}_\alpha$, $(\mathcal{S}_\alpha^+)^\perp, \mathcal{S}_\alpha^\perp, (\mathcal{S}_\alpha^-)$ は、すべて性質 (SRA) 及び　性質 (WCIP) をみたす。
これより、$\mathcal{S}_\alpha^+, \mathcal{S}_\alpha^-$ は、indecomposable である。
以下では、我々の定義した defects と Φ^+ の関係を見る。

定理 6.15

$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ を、次の 4-subspace system とする。K を、ヒルベルト空間 , $T, S \in B(K)$ とする。$H = K \oplus K$,
$E_1 = K \oplus 0$,
$E_2 = 0 \oplus K$,
$E_3 = \{(x \oplus Tx) | x \in K\}$, $E_4 = \{(Sy \oplus y) | y \in K\}\}$
とおく。このとき、$\mathcal{S}$ が、Fredholm system であることと、$S, T, (ST-1)$ が、Fredholm operators であることは同値である。更に、$\mathcal{S}$ の defect $\rho(\mathcal{S})$ は、次で与えられる。

$$\rho(\mathcal{S}) = 1/3(IndT + IndS + Ind(ST-1))$$

次に、Φ^+ による defect の保存状況を見る。

命題 6.16

$\mathcal{S} = (H; E_1, ..., E_4)$ を次でおく。K を ヒルベルト空間 , $T \in B(K)$ とする。
$H = K \oplus K, E_1 = K \oplus 0, E_2 = 0 \oplus K, E_3 = \{(x \oplus Tx) | x \in K\}$,
$E_4 = \{(y \oplus y) | y \in K\}$ とする。
このとき、$\rho(\mathcal{S}^+) = \rho(\mathcal{S})$ が成立する。

参考文献

[1] Y.Watatani: Relative positions of four subspaces in a Hilbert space and subfactors, (to appear in a conference report).

[2] I.M.Gelfand and V.A.Ponomarev: Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite dimensional vector space, Coll.Math.Soc.Ianos Bolyai 5, Hilbert space operators, Tihany (Hungary) 1970,163-237 (in English).