数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 1-7

Globally defined Mackey functors について

小田 文仁 (ODA Fumihito)
富山工業高等専門学校一般科目
Toyama National College of Technology
oda@toyama-nct.ac.jp

1 はじめに

Peter Webb 氏の仕事 [We 00] の globally-defined Mackey functors に関する部分を紹介する. 本稿では群で有限群, R で単位元を持つ可換環とする. 特に k で体を表す.

2 Mackey functors

まず, 通常の Mackey functors から思い出させていただきたい. Green は Mackey functors ではなく G-functors という名で定義した [Gr 71].

(2.1) Definition 1 (Green). G を群とする. G の R 上の *G-functor* M は G のすべての部分群から左 R–加群の圏への対応

$$M : \{\text{subgroups of}\, G\} \longrightarrow R\text{-mod}$$

と 3 種類の R–準同型

$$\begin{aligned} I_K^H &: M(K) \longrightarrow M(H) && \text{(induction)} \\ R_K^H &: M(H) \longrightarrow M(K) && \text{(restriction)} \\ c_g^H &: M(H) \longrightarrow M({}^gH) && \text{(conjugation)} \end{aligned}$$

(${}^gH := gHg^{-1}$) で以下の条件を満たすものである. ただし, ここで $K \le H$ は G の部分群, $g \in G$ とする.

(0) $I_H^H, R_H^H, c_h^H : M(H) \longrightarrow M(H)$ が $\forall H \le G$ および $\forall h \in H$ に対して恒等写像である.

(1) $R_L^K R_K^H = R_L^H$, $I_K^H I_L^K = I_L^H$ が $\forall L \le \forall K \le H$ に対して成り立つ.

(2) $c_g^{{}^hH} c_h^H = c_{gh}^H$ が $\forall H \le G$ と $\forall g, \forall h \in G$ に対して成り立つ.

(3) $R_{{}^gK}^{{}^gH} c_g^H = c_g^K R_K^H$, $I_{{}^gK}^{{}^gH} c_g^K = c_g^H I_K^H$ が $\forall K \le H$ と $\forall g \in G$ に対して成り立つ.

(4) $R_L^H I_K^H = \sum_{x \in [L\backslash H/K]} I_{L\cap {}^xK}^L c_x^{L^x \cap K} R_{L^x\cap K}^K$ が $\forall L, \forall K \le H$ に対して成り立つ.

(2.2) 例. $H \leq G$ に対し，以下のように $M(H)$ を定めると G の Mackey functor M を構成することができる.

$M(H) = G_0(kG)$ を有限次元 kG-加群の Grothendieck group とする. 特に，$\mathrm{char}(k) = 0$ のときは kH-加群の指標の群，$\mathrm{char}(k) = p > 0$ のときは kH-加群の Brauer 指標の群とそれぞれ同一視できる.

$M(H) = A(H)$ を有限次元 kH-加群の Green ring とする.

$M(H) = H^n(H, U)$, $M(H) = H_n(H, U)$ をそれぞれ，$\mathbb{Z}H$-module U を係数にもつ n 次のコホモロジー，およびホモロジーとする.

$M(H) = B(H)$ を H の Burnside ring とする.

Dress は Green の G-functor を含むより一般的な構造として Mackey functors を定義した [Dr 71]. 本稿では Green の定義と同値になる圏に制限した場合の定義を述べる.

(2.3) Definition 2 (Dress). *Mackey functor M* は有限 G-集合の圏 G-sets から R-mod への共変関手 M_* と反変関手 M^* の対 $M := (M_*, M^*)$ で，すべての有限 G-集合 X に対し $M_*(X) = M^*(X)$ となり，以下の２つの条件を満たすものである:
(1) 任意の G-集合の pullback diagram に対して

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} \\ Z & \xrightarrow{\delta} & W \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ccc} M(X) & \xleftarrow{M^*(\alpha)} & M(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle M_*(\beta)} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle M_*(\gamma)} \\ M(Z) & \xleftarrow{M^*(\delta)} & M(W), \end{array}$$

(2) 任意の有限 G-集合の対 X, Y に対して R-同型 $M(X \cup Y) \cong M(X) \bigoplus M(Y)$ が存在する.

Dress の定義と Green の定義の同値性は transitive G-set G/H に対して $M(G/H) = M(H)$ とすれば良い.

任意の群 Gf 群のSimple Mackey functors の分類定理は Thévenaz と Webb により得られている [TW 90].

(2.4) Theorem (Thévenaz-Webb). *Let H be a subgroup of G and V an $R[N_G(H)/H]$-module. Let $S_{H,V} = (\mathrm{Inf}_{N_G(H)/H}^{N_G(H)} S_{1,V}) \uparrow_{N_G(H)}^{G}$. Then the $S_{H,V}$ constructed constitute a complete set of representatives for the isomorphism classes of simple Mackey functors for G.*

3 Globally-defined Mackey functors

(3.1) Definition. 群 K は G の部分群 H からの全射 $H \twoheadrightarrow K$ が存在するとき，G の *section* と呼ぶ.

以下，有限群のクラス (族)$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ として以下の条件を満たすものを考える.
(1) $G \in \mathfrak{X}$ で K が G の section ならば，$K \in \mathfrak{X}$,
(2) $1 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 1$ が群の短完全列で，$A \in \mathfrak{X}$, $C \in \mathfrak{X}$ ならば，$B \in \mathfrak{X}$.

(3.2) Definition. We say that a *globally-defined Mackey functor* over R, with respect to $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$, is a structure M which specifies an R-module $M(G)$ for each finite group G, together with for each homomorphism $\alpha : G \longrightarrow K$ with $\mathrm{Ker}\alpha \in \mathfrak{Y}$ an R-module homomorphism $\alpha_* : M(G) \longrightarrow M(K)$ and for each homomorphism $\beta : G \longrightarrow K$ with $\mathrm{Ker}\beta \in \mathfrak{X}$ an R-module homomorphism $\beta^* : M(K) \longrightarrow M(G)$.

These morphism should satisfy the following relations:

(1) $(\alpha\gamma)_* = \alpha_*\gamma_*$ and $(\beta\delta)^* = \delta^*\beta^*$ always, whenever these are defined;

(2) whenever $\alpha : G \longrightarrow G$ is an inner automorphism then $\alpha_* = 1 = \alpha^*$;

(3) for every commutative diagram of groups

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\beta} & H \\ \uparrow{\scriptstyle\gamma} & & \uparrow{\scriptstyle\alpha} \\ \beta^{-1}(K) & \xrightarrow{\delta} & K \end{array}$$

in which α and γ are inclusions and β and δ are surjections we have $\alpha^*\beta_* = \delta_*\gamma^*$ whenever $\mathrm{Ker}\beta \in \mathfrak{Y}$, and $\beta^*\alpha_* = \gamma_*\delta^*$ whenever $\mathrm{Ker}\beta \in \mathfrak{X}$;

(4) for every commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\gamma} & H/\mathrm{Ker}\alpha\mathrm{Ker}\beta \\ \uparrow{\scriptstyle\beta} & & \uparrow{\scriptstyle\delta} \\ H & \xrightarrow{\alpha} & K \end{array}$$

in which α, β, γ and δ are all surjections, with $\mathrm{Ker}\beta \in \mathfrak{Y}$ and $\mathrm{Ker}\alpha \in \mathfrak{X}$, we have $\beta_*\alpha^* = \gamma^*\delta_*$;

(5) (Mackey axiom) for every pair of subgroups $J, K \leq H$ of every group H we have

$$(\iota_K^H)^*(\iota_J^H)_* = \sum_{h\in[K\backslash H/J]} (\iota_{K\cap{}^hJ}^K)_* c_{h*} (\iota_{K^h\cap J}^J)^*,$$

where $\iota_K^H : K \hookrightarrow H$ and $\iota_J^H : J \hookrightarrow H$ etc. are the inclusion maps and $c_h : K^h \cap J \longrightarrow K \cap {}^hJ$ is the homomorphism $c_h(x) = hxh^{-1}$.

Globally defined Mackey functors の圏はアーベル圏となる.

もし, $\alpha : H \longrightarrow K$ が同型ならば, 公理 (4) より $(\alpha^{-1})_* = \alpha^*$ および $(\alpha^{-1})^* = \alpha_*$ が成り立つ. 任意の群 G の自己同型写像が $M(G)$ に作用し, 内部自己同型が自明に作用するので, $M(G)$ は $R[\mathrm{Out}G]$-加群となる.

クラス $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ として単位群のみをとることはいつも可能である. また, 同じことであるが, α_* と α^* は α が injective であるときに限り定義される. 類 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ としてもっと大きな族をとることもある. 以下, 単位群のみからなる族を 1, すべての有限群の族を all で表す.

(3.3) 例. $M(G) = G_0(kG)$, $B(G)$: $G_0(kG)$, $B(G)$ どちらの場合も $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ として all をとることができる. $\alpha : G \longrightarrow H$ を群の準同型とする. H の表現および H-集合を α を通してそれぞれ G の表現, G-集合とみなすという対応で α^* が定まる. また, U を RG-加群および Ω を G-集合とするとき $RH \otimes_{RG} U$, $H \times_G \Omega$ を対応させることにより α_* を得る.

(3.4) 例. $M(G) = H^n(G,R)$, $H_n(G,R)$: 自明な加群を係数にもつ n 次のコホモロジー，ホモロジー (すべての群に対しての加群にならなければいけないので，任意の加群では Globally defined Mackey functor にならない)．コホモロジーに対しては $\mathfrak{X} = \text{all}$, $\mathfrak{Y} = 1$ として良い．$\alpha : G \longrightarrow H$ が全射ならば α^* は inflation である．しかし，α^* は同型以外に，条件を満たすようには一般に定義できないことが次のようにわかる．Fixed point functor $M(G) = H^0(G,R)$ と準同型の列 $1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\beta} 1$ について考える．このとき，$\iota_* = |G| \cdot \mathrm{id}$ と $\iota^* = \mathrm{id}$ がわかる．$\beta\iota = \mathrm{id}$ なので $\beta_*\iota_* = \mathrm{id}$ と $\iota^*\beta^* = \mathrm{id}$ を得る．従って $\beta^* = \mathrm{id}$ と $\beta_* = |G|^{-1} \cdot \mathrm{id}$ が成り立つ．もし，$|G|^{-1}$ が R に存在しないならば，β_* は定義されないことがわかる．また，$|G|^{-1} \in R$ の場合も公理 (4) を可換図式

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 1 \\ \uparrow{\scriptstyle\beta} & & \uparrow \\ G & \xrightarrow{\beta} & 1 \end{array}$$

に適用させることにより $\beta_*\beta^* = \mathrm{id}$, つまり $|G|^{-1} = 1$ が成り立つことがわかる．これは，$G = 1$ 以外には成り立たない．

(3.5) 例. p-群 G に対して $M(G) = \mathbb{Q} \otimes D(G)$:Dade 群．$D(G)$ は正標数の体 k に対して endopermutation kG-加群の Dade 群とする [BT 00], [Da 78]．この場合すべての有限群の族ではなく，すべての p-群の族に制限して考えなければならない．$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ はすべての p-群として良い．

(3.6) Bisets. 通常の Mackey functors の G-集合による定義 (2.3) と同様に globally defined Mackey functors でも別の定義が存在する．群の対 G, H に対して有限 (G,H)-*bisets* を考える．有限集合 Ω は左から G が，右から H が作用して $g(\omega h) = (g\omega)h$ が $\forall g \in G$, $\forall h \in H$, $\forall \omega \in \Omega$ に対して成り立つとき (G,H)-*biset* と呼ぶ．Burnside ring の構成と同様に $A^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,H)$ で条件「$\mathrm{Stab}_G(\omega) \in \mathfrak{X}$ と $\mathrm{Stab}_H(\omega) \in \mathfrak{Y}$ が $\forall \omega \in \Omega$ が成り立つ」を満たすすべての (G,H)-bisets の圏の disjoint union に関する Grothendieck group とする．(G,H)-biset Ω は $\omega \in \Omega$ に対してすべての Ω の元が $g\omega h$ ($g \in G$, $h \in H$) と表されるとき *transitive* であると呼ぶ．$A^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,H)$ は transitive (G,H)-bisets の同型類の自由可換群である．$A_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,H) = R \otimes A^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,H)$ と書く．

(3.7) Bisets の積. 群 G, H, K に対して積

$$A_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,H) \times A_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(H,K) \longrightarrow A_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,K)$$

が基底の対応 $(\Omega, \Psi) \longmapsto \Omega \times_H \Psi$ により定義される．ただし，$\Omega \times_H \Psi = \Omega \times \Psi / \{(\omega h, \psi) \sim (\omega, h\psi)\}$ $\omega \in \Omega$, $\psi \in \Psi$, $h \in H$ とする．この積は結合的であり，$A_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,G)$ に環の構造を与える．$\mathfrak{X} = \text{all}$, $\mathfrak{Y} = 1$ のとき $A_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,G)$ は *double Burnside ring* として知られている [Be 96], [Ma 95].

(3.8) 圏 $\mathcal{C}_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}$. 対象がすべての群，群 H から G への射全体を $A_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}(G,H)$ として得られる圏を $\mathcal{C}_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}}$ で表す．合成は積 $\times$ により得られる．このとき，R-加法的関手 $M : \mathcal{C}_R^{\mathfrak{X},\mathfrak{Y}} \longrightarrow R\text{-mod}$ を *globally-defined Mackey functor* (with respect to $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$) と定める．

4 The computation of globally-defined Mackey functors using simple functors

通常の Mackey functors と同様に globally-defined Mackey functors に対しても subfunctor や kernel 等の用語を用いる．Globally-defined simple Mackey functors の分類定理は Bouc [Bo 96], Webb [We 93] により得られた．

(4.1) Theorem (Bouc, Webb). *The simple globally-defined Mackey functors are in bijection with pairs (H, U) where H is a finite group and U is a simple $R[\mathrm{Out}H]$-module (both taken up to isomorphism). The corresponding simple functor $S_{H,U}$ has the property that $S_{H,U}(H) \cong U$ as $R[\mathrm{Out}H]$-modules, and that if G is a group for which $S_{H,U}(G) \neq 0$ then H is a section of G. Provided R is a field or a complete discrete valuation ring each simple functor $S_{H,U}$ has a projective cover $P_{H,U}$, and these form a complete list of the indecomposable projective functors.*

Simple functor の構造は $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ の取り方によって変わるが，上の分類は $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ に依存しない．特別な場合として $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 1$ のとき，以下に述べるように $S_{H,U}(G)$ の値の具体的な表示が [We 93] で与えられている．$\mathfrak{X} = \mathrm{all}, \mathfrak{Y} = 1$ の場合，その表示は $S_{H,U}(G)$ の次元を与えている．この次元は分類空間 BG の stable decomposition に関連している．また，その分解を計算するということと，その次元を計算することが同値であることも示されている．

(4.2) Theorem. *When $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 1$ the simple globally-defined Mackey functors are given explicitly by*

$$S_{H,U}(G) = \bigoplus_{\substack{\alpha: H \cong L \leq G \\ \text{up to } G\text{-conjugacy}}} \mathrm{tr}_L^{N_G(L)}({}^{\alpha}U)$$

where H ranges over finite groups and U ranges over simple $R[\mathrm{Out}(H)]$-modules.

ここで，直和は H から G の部分群 L への同型写像 α の G-軌道を動き，${}^{\alpha}U$ は U を α を通して $N_G(L)/L$ 加群とみなしたものとする．また，$\mathrm{tr}_L^{N_G(L)}$ は $N_G(L)/L$ の代表系の和をかけるという作用，つまり relative trace を表す．

(4.3) p-群のコホモロジー. $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} = 1$ の場合の上の simple functors の直接的な表示は，群のコホモロジーの場合に [We 93] や [Chin] で応用されてきた globally-defined Mackey functors の値の計算方法を与える．素数 p に対して p-torsion subgroup $M(G) = H^n(G, R)_p$ を対応させる globally-defined Mackey functor を考える．この場合，M の組成列が存在する．それは，M の subfunctors の列

$$\cdots \subset M_{i-1} \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots \subset M$$

で $\cap M_i = 0, \cup M_i = M$ そして M_{i+1}/M_i が simple functor になるようなものである．組成列における simple functor の重複度は列の取り方によらずに定まることが示される．さらに通常の Mackey functor と同様に，コホモロジーが p-部分群の族に関して relative projective であることから，組成列に現れる simple globally-defined Mackey functors $S_{H,U}$ において

H として p 群 H をとることができることが示される．さらに組成因子の重複度は p-群のコホモロジーの情報から定まる．これらをすべて総合すると重複度や $S_{H,U}(G)$ を与える $M(G)$ のサイズに関する公式を得ることができる．それは，G の p-部分群のコホモロジーと G の p-元の共役類に関する言葉で表現される．

5 Some naturally-occurring globally-defined Mackey functors

とても重要な自然に現れる globally-defined Mackey functors は simple functor や projective Mackey functor になることを示す結果を挙げる．Dade 群に関する詳細は [Da 78], [BT 00] を参照されたい．以下の結果はとても自然であるが，証明は圏論を駆使しとても複雑である [Bo 96], [BT 00].

(5.1) Theorem (Bouc, Bouc-Thévenaz). *Let* $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y} =$ all.

(i) *The Burnside ring Mackey functor* $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} B$ *is the indecomposable projective* $P_{1,\mathbb{Q}}$.

(ii) *The functor* $M(G) = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} G_0(\mathbb{Q}G)$ *which assigns the representation ring of* $\mathbb{Q}G$-*modules, tensored with* $\mathbb{Q}$*, is the simple functor* $S_{1,\mathbb{Q}}$.

(iii) *Let* p *be a prime. The kernel of the projective cover map* $P_{1,\mathbb{Q}} \longrightarrow S_{1,\mathbb{Q}}$*, regarded as a functor only on* p-*groups, is the functor* $\mathbb{Q} \otimes D$*, where* $D(P)$ *is the Dade group of endopermutation modules of the* p-*group* P*. This functor is simple:* $\mathbb{Q} \otimes D \cong S_{C_p \times C_p,\mathbb{Q}}$.

参考文献

[Be 96] D.J. Benson, Stably splitting BG, *Bull. Amer. Math. Soc.* **33** (1996), 189–198.

[Bo 96] S. Bouc, Foncteurs d'ensembles munis d'une double acion, *J. Algebra* **183** (1996), 664–736.

[BT 00] S. Bouc and J. Thévenaz, The group of endo-permutation modules, *Inv. Math.* **139** (2000), 275–349.

[Chin] A. Chin, Some rings of invariants at the prime two, *Internat. J. Algebra Comput.*

[Da 78] E.C. Dade, Endo-permutation modules over p-groups I, *Ann. of Math.* **107** (1978), 459–494.

[Dr 71] A. Dress, "Notes on the Theory of Finite Groups I : The Burnside Rings of Finite Groups and Some AGN Applications", multicopied notes, Bielefeld University, 1971.

[Gr 71] J.A. Green, Axiomatic representation theory for finite groups, *J. Pure Appl. Algebra* **1** (1971), 41–77.

[Ma 95] J. Martino, Classifying spaces and their mapas, *Homotopy Theory and its Applications, Adem, Milgram and Ravenal, eds, Contemp. Math.* **188** (1995), 153–190.

[TW 90] J. Thévenaz and P. Webb, Simple Mackey functors, *Proc. of 2nd International Group Theory Conference, Bressanone(1989), Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **23** (1990), 299–319.

[We 93] P. Webb, Two classifications of simple Mackey functors with applications to group cohomology and the decomposition of classifying spaces, *J. Pure Appl. Algebra* **88** (1993), 265–304.

[We 00] P. Webb, A guide to Mackey functors, Handbook of algebra **Vol. 2** (2000), 805–836.