数理解析研究所講究録 1251巻 2002年 83-90

Coxeter群のある種の分解の構成

中村得之（Tokushi Nakamura）

1. 群 W とその部分集合 S が次の条件を満たしているとする。$1 \notin S$，またすべての $s \in S$ に対し $s^2 = 1$ が成り立つ。更に S が W を生成するものとする。

定義　対（W, S）が次の条件（Coxeterの条件）を満たすとき，（W, S）をCoxeter対，W をCoxeter群とよぶ

i）S と一対一対応する集合 $\hat{S} = \{\hat{s} \mid s \in S\}$ が存在する。

ii）自然数又は $+\infty$ に値をもつ，$\hat{S}$ 行 $\hat{S}$ 列の行列 $M = \{m(\hat{s}, \hat{s}') \mid \hat{s}, \hat{s}' \in \hat{S}\}$ が存在し，次の条件を満たす。

ii-1）$\hat{S}$ に属するすべての $\hat{s}$ に対し，$m(\hat{s}, \hat{s}) = 1$ が成り立つ。

ii-2）$\hat{S}$ に属するすべての異なる $\hat{s}, \hat{s}'$ に対し，$m(\hat{s}, \hat{s}') = m(\hat{s}', \hat{s}) \geq 2$ が成り立つ。

iii）$\hat{W}$ を $\hat{S}$ を自由生成元の集合とする自由群とし，N を $\hat{S}$ に属するすべての異なる $\hat{s}, \hat{s}'$ に対して定まる $\hat{W}$ の元 $(\hat{s}\hat{s}')^{m(\hat{s}, \hat{s}')}$ で生成される正規部分群とする。このとき S に属する任意の s に対し，$\hat{s}$ を s に移す写像 π は

同型 $\hat{W}/N \twoheadrightarrow W$ を惹き起こす。

以下，Sに属するすべての s に対し，$\hat{s}$ と s を同一視する。

Sと一対一対応する集合 $e_S=\{e_s \mid s\in S\}$ を基底とする $\mathbb{R}$ 上の線型空間を V とする。M の定める V 上の双一次形式 B を，S に属する任意の s, s' に対し $B(e_s, e_{s'}) = -\cos(\pi/m(s,s'))$ で定める。このとき W の V 上への表現 σ を W に属する任意の w に対し $\sigma(w)=\sigma_w$ と書くとき，σ_s は V に属する任意の元 x に対し $\sigma_s(x) = x - 2B(x, e_s)e_s$ を満すものとして定義する。

σ は B を不変に保つ W の忠実な表現となる。

そこで $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ とする。W の V^* 上への表現 σ^* を，W に属する任意の w に対し $\sigma^*(w) = \sigma^*_w$ と書くとき，σ^*_w は V に属する任意の x，V^* に属する任意の x^* に対し $\langle \sigma^*_w(x^*), \sigma_w(x) \rangle = \langle x^*, x \rangle$ が成り立つものとして定義する。σ^* も W の忠実な表現である。

g を自然数とする。$\mathbb{R}^g$ に属するベクトル $\mathbf{x}$ をとるとき，$1 \le j \le g$ を満たす任意の自然数 j に対し実数 x^j が定まり

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^j \end{pmatrix}$$

と表される。$\mathbb{R}^g$ には辞書式順序により $<$ を定める。

ここで $(V^*)^g$ を考える。$(V^*)^g$ に属する元 X をとる。$1 \le j \le g$ を満たす任意の自然数 j に対し，V^* に属する元 x^{*j}

が定まり

$$X = \begin{pmatrix} x^{*1} \\ \vdots \\ x^{*g} \end{pmatrix}$$

と表される. Sに属する任意のsに対し

$$\langle X, e_s \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^{*1}, e_s \rangle \\ \vdots \\ \langle x^{*g}, e_s \rangle \end{pmatrix}$$

とおく。即ち $1 \leq j \leq g$ を満たす任意の自然数に対し,

$$\langle X, e_s \rangle^j = \langle x^{*j}, e_s \rangle$$

と定める。

補題 V^*に属する任意のX, Sに属する任意のsに対し, $\langle X, e_s \rangle = 0 \in R^g$ になることと, $sX = X$となることとは同値である.

定義 V^*の部分集合Cを次のように定義する.

$$C = \{ X \in (V^*)^g \mid {}^{\forall} s \in S \quad \langle X, e_s \rangle \geq 0 \}$$

命題 Cに属する点X, Y, Wに属するwが与えられていたとする。この時, $Y = wX$が成り立つためには, 次の二条件が成り立つことが必要十分である.

i) $X = Y$

ii) 自然数rと語$(s_1, \cdots, s_r) \in S^r$が存在し, $1 \leq i \leq r$を満たすすべての自然数iに対し$s_i X = X$が成り立ち、かつ$w = s_1 \cdots s_r$となる.

写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする。このとき写像 $\hat{\rho}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ を，S に属するすべての $\hat{s}$ に対し $\hat{\rho}(s) = g - \hat{\alpha}(s)$ が成り立つものとして定義する。

定義　写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ に対し，$(V^*)^g$ の部分集合 $C(\hat{\alpha})$ を次のように定義する．

$$C(\hat{\alpha}) = \{ X \in (V^*)^g \mid \forall s \in S\ \forall j \in \mathbb{N} \cap [1, g]\ \langle X, e_s \rangle^{j} = 0\ \ \hat{\rho}(s) + 1 \leq g \Rightarrow \langle X, e_s \rangle^{\hat{\rho}(s)+1} > 0 \}$$

定義　写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ に対し，$|\hat{\alpha}|, |\hat{\rho}| \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ を次のようにして定義する

$$|\hat{\alpha}| = \{ \sum \hat{\alpha}(s) \mid s \in S \}, \quad |\hat{\rho}| = \{ \sum \hat{\rho}(s) \mid s \in S \}.$$

w を W の元とするとき，w の長さ $l(w)$ を

$$l(w) = \min \{ r \in \mathbb{Z}_+ \mid (s_1, \cdots, s_r) \in S^r\ \ w = s_1 \cdots s_r \}$$

で定義する．

S' を S の部分集合とする．このとき S' で生成される W の部分群を $W_{S'}$ で表す．ここで，$S \cap W_{S'} = S'$ が成り立つ．さらに，$W^{S'} = \{ w \in W \mid \forall s' \in S'\ \ l(ws') > l(w) \}$ とおく。自然な写像が，全単射 $W^{S'} \twoheadrightarrow W/W_{S'}$ を与えることが知られている．

命題　$\hat{\alpha}: \hat{S} \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする．このとき，$C(\hat{\alpha})$ は $(V^*)^g$ の 0 を頂点とする半線型錐体となる。また $\dim C(\hat{\alpha}) = |\hat{\alpha}|$，従って $\operatorname{codim} C(\hat{\alpha}) = |\hat{\rho}|$ となる。また，$C(\hat{\alpha})$ に属するすべての点 X に対し，その固定部分群

W_x は，$W_{\hat{\alpha}(0)}$ に等しい．

さらに，これらの集合の族

$$C = \{ c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8] \}$$

は，c の胞体分割

$$c = \coprod \{ c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8] \}$$

を与える

また，上の胞体の中余次元有限となるもの全体からなる族を C_f，これに属する胞体全体の合併を c_f とする．また，c_f に属するすべての点 X の W 軌道 WX の合併を U_f で表す。即

$$U_f = \coprod \{ w_{\hat{\alpha}}\, c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8],\ |\hat{p}| < +\infty,\ w_{\hat{\alpha}} \in W^{\hat{\alpha}(0)} \}$$

である．

命題　U_f に属する任意の二点を結ぶ線分はまた U_f に含まれる。したがって，U_f は可縮である

以下，写像 $\hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ はすべて条件 $|\hat{p}| < +\infty$ を満すものとする。

定義　写像 $\hat{\alpha} : S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ が与えられたとする．

i)　S に属する s が条件 $\hat{p}(s) = 8 - 1$ を満たしているとする．

このとき，$(V^*)^8$ の部分集合 $\partial_s c(\hat{\alpha})$ を次のように定める

$\partial_s c(\hat{\alpha})$

$$= \{ X \in (V^{*8}) \mid$$

$$\mid \forall t \in S \quad t \neq s \quad \forall j \in \mathbb{N} \cap [1, \hat{p}(t)] \quad \langle X, e_t^j \rangle = 0 \quad \hat{p}(t)+1 \leq 8 \to \langle X, e_t^{\hat{p}(t)+1} \rangle > 0$$

$| \ t = s \quad \forall j \in N \cap [1, \hat{\rho}(s)+1] \ \langle X, e_s^j \rangle = 0 \quad \}$

ii) Sに属するsが条件 $\hat{\rho}(s) \leq g-2$ を満たすものとする

このとき$(V^*)^g$ の部分集合 $\partial_s^{\pm} C(\hat{\alpha})$ を次のように定める

$\partial_s^{\pm} C(\hat{\alpha})$

$= \{ X \in (V^*)^g$

$| \ \forall t \in S \quad t \neq s \quad \forall j \in N \cap [1, \hat{\rho}(t)] \ \langle X, e_t^j \rangle = 0 \quad \hat{\rho}(t)+1 \leq g \rightarrow \langle X, e_t^{\hat{\rho}(t)+1} \rangle > 0$

$t = s \quad \forall j \in N \cap [1, \hat{\rho}(s)+1] \ \langle X, e_s^j \rangle = 0 \quad \hat{\rho}(s)+2 \leq g \wedge \langle X, e_s^{\hat{\rho}(s)+2} \rangle \gtrless 0 \}$

定義 Coxeter対 (W, S) が与えられたとき、これから定まるCoxeter図式 Γ とは、次の条件を満たす1次元単体的複体をいう。

0) $\Gamma_0 = S$

1) $\Gamma_1 = \{ \{s, s'\} \subset S \mid s \neq s' \quad 3 \leq m(s, s') \}$

定義 写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする。このとき、$\hat{\alpha}$によって定義されるフィルター $\{ {}^{\alpha}S \mid \alpha \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, g] \}$ を次のように定める

$${}^{\alpha}S = \{ t \in S \mid \alpha \leq \hat{\alpha}(t) \}$$

定義 写像 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする。Sに属するsに対し、$\alpha = \hat{\alpha}(s)$ とおく。このとき、$\Gamma \setminus {}^{\alpha}S \cup \{s\}$ のsを含む連結成分を ${}_{\alpha}\Gamma_s$, $S \cap {}_{\alpha}\Gamma_s$ を ${}_{\alpha}S_s$ と書く。

定理 $\hat{\alpha}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ が与えられたとする。

Wに属するuと写像 $\hat{\beta}: S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0, g]$ をとる。これらが

i) $\operatorname{codim}\left(\overline{C}(\hat{\alpha}) \frown u\,C(\hat{\beta}),\ \overline{C}(\hat{\alpha})\right) \geqq 2$

ii) $u \in W^{\hat{\beta}^{-1}(0)}$

を満たすためには，S に属する s が存在し，s が以下の条件 i_s)，ii_s^+)，ii_s^-) の何れかを満たすことが必要十分である。

i_s) $\hat{\rho}(s) = g-1$

i_s-1) $u = 1$

i_s-2)

$$\hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \neq s \\ \hat{\alpha}(s) - 1 & t = s \end{cases}$$

i_s-3) $u\,C(\hat{\beta}) = \partial_s C(\hat{\alpha})$

ii_s^+) $\hat{\rho}(s) \leqq g-2$

ii_s^+-1) $u = 1$

ii_s^+-2)

$$\hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \neq s \\ \hat{\alpha}(s) - 1 & t = s \end{cases}$$

ii_s^+-3) $u\,C(\hat{\beta}) = \partial_s^+ C(\hat{\alpha})$

ii_s^-) $\hat{\rho}(s) \leqq g-2$

ii_s^--1-1) $u \in W_{{}_{\hat{\alpha}(s)}S_s} \frown W^{S \setminus \{s\}}$

ii_s^--1-2) $\operatorname{ad} u^{-1}\left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \frown {}^{\hat{\alpha}(s)-1}S\right)\right) \subset S$

ii_s^--2)

$$\hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \in S \setminus {}_{\alpha(s)}S_s \\ \hat{\alpha}(s) - 1 & t \in {}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \operatorname{ad} u^{-1}\left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \frown {}^{\hat{\alpha}(s)-1}S\right)\right) \\ \hat{\alpha}(\operatorname{ad} u(t)) & t \in \operatorname{ad} u^{-1}\left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \setminus \left({}_{\hat{\alpha}(s)}S_s \frown {}^{\hat{\alpha}(s)-1}S\right)\right) \end{cases}$$

ii-3) $\mathrm{codim}\Big(\partial_s^- C(\hat{\alpha}) \setminus$

$$\bigsqcup\{u C(\hat{\beta}) \mid u \in W \quad \hat{\beta} \cdot S \to \mathbb{Z}_+ \cap [0,\ 8]\ \text{ii-1)}\ \text{ii-1-2)}\ \text{ii-2)}\}\Big)$$

≤ 1

以下は、有限鏡映群の場合と同じ論法[1]を用いればよい。

文献

[1] 中村得之　有限鏡映群のある種の分解の構成
数理解析研究所講究録 1057 (1998) 56〜66