数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 124-129

3×3 有限射影線型群のコホモロジーについての注

手塚 康誠 (Michishige Tezuka)
琉球大学理学部 (Faculty of Science

序

これは前回の集会で話さしてもらった、スペクトル列
報告です。使う記号から初めたいと思います。$\mathbb{F}_q$ を
有限体、$\mathbb{C}$を複素数として射影線型群 $PGL_3(q)$,
$PGL_3(q)=GL_3(q)/\mathbb{F}_q^\times$, $PGL_3(\mathbb{C})=GL_3(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$

と定義します。ここで $\mathbb{F}_q^\times$, $\mathbb{C}^\times$ は $\mathbb{F}_q$ 及び$\mathbb{C}$の乗法群として

$$\mathbb{F}_q^\times=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&&\\&\alpha&\\&&\alpha\end{pmatrix}\middle|\ \alpha\in\mathbb{F}_q^\times\right\}$$

等です。このとき有限群のコホモロジー $H^\cdot(PGL_3(q),$
を考えます。係数体を $\mathbb{Z}/3$ に限る理由として、対応する
$PGL_3(\mathbb{C})$について, $\ell\neq3$ とすると

$$H^\cdot(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/\ell)\xrightarrow{\sim}H^\cdot(GL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/\ell).$$

更に $PGL_3(\mathbb{C})$ の積から定義される余積 $\Delta:H^\cdot(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/3)\otimes H^\cdot(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/3)$ が非可換になることによります。G
単純シュバレイ群とするとき, $H^\cdot(G(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/\ell)$ のホップ代数
ボレル, 荒木, 戸田, 三村, 河野の諸先生の研究によって
それによると上述の $H^\cdot(PGL_3(\mathbb{C}),\mathbb{Z}/3)$が ランクの一番小さい群
が可換とはならない例になっています。以下 PGL_3 をGと
ジーの係数はことわりがない場合は $\mathbb{Z}/3$ とします。

1 方法と結果

前回話させていただいたとき、構成したスペクトル列

(1) $$E_2 = \mathrm{cot}_{H^*(G(\mathbb{C}))}(H^*(G(\mathbb{C})), \mathbb{Z}/3) \Rightarrow H^*(G(q))$$

を使って、E_2項を計算します。次にE_∞項を見たいわけですが、これはE_2項からだけからではわかりませんでした。仕方がないので、$H^*(G(q))$を別のやり方で行なってみました。$q \equiv 4, 7 \bmod 9$の条件より$G(q)$の3-Sylow群は位数27のextra special 3-群Eになっているので、$H^*(E)$は計算されているので、それから$H^*(G(q))$を計算してみました。その結果$E_2 = E_\infty$となっていることがわかりました。この説明からわかりますように、この方法は全く不完全です。しかし上のスペクトル列のE_2項はかなり計算が可能です。例外群E_6, $q \equiv 1 \bmod 2^n$（nは十分大）で係数は$\mathbb{Z}/2$や、最近西本氏によりF_4, $q \equiv 1 \bmod 3^n$（nは十分大）、係数は$\mathbb{Z}/3$でE_2-項は計算されました。そこでこれらの群のelementary abelian groupsは庄司、水野先生などによってわかっているので、それらの正規化群を調べることで、E_∞-項がある程度わかるのではないかと思っています。しかしこちらにはこれらの事は手に余ることなので、群論の方に色々教えていただければと思っています。一応結果をまとめると

定理1 $G(q) = PGL_3(q)$, $q \equiv 4, 7 \bmod 9$とする。このとき次が成立します。

(2) $E_2 = E_\infty$

(3) $$PS\,H^*(G(q), \mathbb{Z}/3) = \frac{f(t)}{(1-t^8)(1-t^{12})}$$

$$f(t) = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 3t^4 + 3t^5 + 3t^6 + 4t^7 + 4t^8 + 4t^9 + 4t^{10} + 4t^{11} + 3t^{12} + 3t^{13} + 3t^{14} + 3t^{15} + 2t^{16} + t^{17} + t^{18}$$

ここで $PS\,H^*(G(q), \mathbb{Z}/3) = \sum_{n=0}^{\infty} (\dim_{\mathbb{Z}/3} H^n(G(q)))\,t^n$.

3 E_2項の計算

まず Cotor の定義を復習してみます。Aを体 k 上の Hopf 代数, $\Delta: A \to A\otimes A$ を coproduct, M は A上の comodule ($\Delta_M: M \to M\otimes A$) とします。$C^n(M, A) = M\otimes A^{\otimes n}$, $d^n: C^n(M, A) \to C^{n+1}(M, A)$ を

$$d^n = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d_i^n,$$

$$d_0^n(m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n) = \Delta_M(m)\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n$$

$$d_i^n(m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n) = m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_{i-1}\otimes \Delta(a_i)\otimes a_{i+1}\otimes \cdots \otimes a_n, \quad 1\le i\le n$$

$$d_{n+1}^n(m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n) = m\otimes a_1\otimes \cdots \otimes a_n\otimes 1$$

として, $\mathrm{Cot}_A^n(M, k) = H^n(C^{\cdot}(M, A), d)$ として定義します。

次に $\mathrm{Cot}_{H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))}(H^{\cdot}(G(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/3)$ を作用をはっきりされるため $\mathrm{Cot}_{H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))}(H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))_{ad},$ $\mathbb{Z}/3)$ と書くことにします。coproduct $\Delta: H^{\cdot}(G(\mathbb{C})) \to H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))\otimes H^{\cdot}(G(\mathbb{C}))$ は積 $G(\mathbb{C})\times G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$ から誘導されたもの。$q\equiv 4,7 \bmod 9$ のとき, Frobenius F は $H^{\cdot}(G_{\bar{k}})$ に自明に作用 ($\bar{k}$ は k の代数閉包, コホモロジーはエタール) することがわかるので, $H^{\cdot}(G(\mathbb{C})_{ad}, \mathbb{Z}/3)$ は $G(\mathbb{C})_{ad}\times G \to G(\mathbb{C})_{ad}$ は $(x, g) \to g^{-1}xg$ から誘導されます。最初に必要なデーターは

定理1 (Baum-Browder [B-B])
$G = G(\mathbb{C}) = PGL_3(\mathbb{C})$ とするとき

(1) $H^{\cdot}(G) = \mathbb{Z}/3[x_2]\otimes \Lambda(x_1, x_3)$

(2) $\Delta: H^{\cdot}(G) \to H^{\cdot}(G)\otimes H^{\cdot}(G)$ は

$$\Delta(x_3) = x_3\otimes 1 + 1\otimes x_3 + x_1\otimes x_2$$

$$\Delta(x_i) = x_i\otimes 1 + 1\otimes x_i \qquad i=1, 2.$$

補題2. comodule $\Delta_{od}\ H^*(G(\mathbb{C})_{od}) \to H^*(G(\mathbb{C})_{od}) \otimes H^*(G(\mathbb{C}))$ は

$$\Delta_{od}(x_3) = x_3 \otimes 1 + x_1 \otimes x_2 - x_2 \otimes x_1$$

$$\Delta_{od_F}(x_i) = x_i \otimes 1, \quad i = 1, 2.$$

これで Cot を計算するのに必要な情報はそろいましたが、まだ実際に計算するには、定義からでは大変です。しかし Kono-Mimura-Shimada [KMS] により $C^*(H^*(G(\mathbb{C})_{od}), H^*(G(\mathbb{C}))$ を適当な関係式で割ったものが与えられています。それを使って計算したものを示します。

命題3 $E_2 \simeq (C \oplus D) \otimes \mathbb{Z}/3[y_{12}]$

ここで

$$C = \mathbb{Z}/3[y_8]\{\mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^3 \otimes \Lambda(x_1)\{\tau_6, y_7\tau_6\} \oplus \mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^2 \otimes \Lambda(x_1)\{\tau_{12}\} \oplus \{\gamma_7\} \oplus \{\gamma_{11}\}\}$$

$$\oplus\ \mathbb{Z}/3[y_2] \otimes \Lambda(x_1)\{\gamma_7\}$$

$$D = \mathbb{Z}/3[y_8]\{\mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^3 \otimes \Lambda(x_1)\{1, y_7\} \oplus (\mathbb{Z}/3[x_2]/x_2^3 \otimes \Lambda(x_1) - \{x_2^2 x_1\})\{y_3\} \oplus \{y_8 y_7\}\}$$

$$\oplus\ \mathbb{Z}/3[y_2]\{y_2, x_1 y_2\}$$

この表示を使うことで初めの定理に書いた E_2-項の Poincaré polynomial を計算できます。

4 $G(q)$ と $H^*(G(q))$

$G(q)$, $q \equiv 4, 7 \bmod 3$ の 3-local structure は split する完全列

(1) $1 \to \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \to G \to SL_2(\mathbb{Z}/3) \to 1$

で与えられ 行列で書くと

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{SL_2(\mathbb{Z}/3)} \\ 0 & & \end{pmatrix} \;\middle|\; * \in \mathbb{Z}/3 \right\} \subset SL_3(\mathbb{Z}/3).$$

G と $G(q)$ の 3-sylow 群は同型で

$$P=\left\{\begin{pmatrix}1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1\end{pmatrix} \;\middle|\; * \in \mathbb{Z}/3\right\}$$

で与えられます。(1) の完全列で $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 = \langle a, c\rangle$, $b=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}/3)$ とすると $P = \langle a, b, c \mid a^3 = b^3 = c^3 = 1,\ [a, b] = c\rangle$ となります。

補題4 elementary 3-abelian group A について $W(A) = N_G(A)/A$, $N_G(A) = \{g \in G \mid g^{-1}Ag = A\}$ とするとき, $W(\langle c, a\rangle) = SL_2(\mathbb{Z}/3)$, $W(\langle c, b\rangle) \simeq W(\langle c, ab\rangle) \simeq S_3$ (3次対称群).

$H^{\cdot}(P)$ は Leary や Milgram-T で与えられていて, その計算結果から

命題5. Ristriction maps の族

$$H^{\cdot}(G) \longrightarrow H^{\cdot}(\langle c, a\rangle)^{SL_2(\mathbb{Z}/3)} \oplus H^{\cdot}(\langle c, b\rangle)^{S_3} \oplus H^{\cdot}(\langle c, ab\rangle)^{S_3}$$

は単射である。

この結果から $H^{\cdot}(G)$ が具体的に書けます。結果を書くと,

定理 6

$$H^{\cdot}(P) = \mathbb{Z}/3[c] \otimes \left\{\begin{array}{l} \mathbb{Z}/3[b_1]\{1, b_3, b_3^2, e_1, e_1 b_3, e_1 b_3^2, \alpha_1, \alpha_1 b_3^2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_1 b_3, \tilde{\alpha}_1 b_3^2\} \\ \oplus\, \mathbb{Z}/3[b_3]\{b_3^3, e_3, \alpha_3, \tilde{\alpha}_3\} \oplus \{e_1\alpha_3\} \oplus \{b_1\alpha_3 - b_3\alpha_1\} \\ \oplus\, \{\alpha_1\tilde{\alpha}_3\} \end{array}\right.$$

次元は, $|c|=6$, $|b_1| = |b_3| = |\alpha_1| = |\alpha_3| = 2$, $|\tilde{\alpha}_1| = |\tilde{\alpha}_3| = 3$, $|e_1| = |e_3| = 1$.

このとき命題3の生成元は

$y_{12} = b_1^6 + b_3^6 + c^2$, $y_8 = b_1 c$, $x_1 = e_3$, $y_2 = b_3 + \alpha_1$, $x_2 = \alpha_1$,

$y_3 = \beta(y_2)$, $y_7 = P^1\beta(y_2)$, $\tau_6 = b_3 b_1^3$, $\gamma_8 = \alpha_3 c$, $\gamma_9 = \beta(\alpha_3 c) = \tilde{\alpha}_3 c$

$\gamma_{11} = \alpha_1\tilde{\alpha}_3 c$, $\tau_{12} = b_3^2 b_1^4$ に取れます。尚これから $\tau_6 = x_2^3$, $\tau_{12} = \tau_6^2 = x_2^6$ となり τ_6, τ_{12} は ring generator としては必要がありません。ここで β は Bockstein operation, P^1 は Steenrod operation です。

他の文献については前回を見てください。

References

[MKS] Mimura. M Kono. A and N. Shimada Cohomology of classifying spaces of certain associative H-spaces , J. Math. Kyoto univ 15-3(1975) 607-617

[BB] P. F. Baum-W. Brouder The cohomology of quotients of classical groups, Topology, 3(1965), 3o5-336