数理解析研究所講究録 1251 巻 2002 年 130-138

群環の自明なソースをもつ加群と Auslander-Reiten 列について

大阪市立大学理学部　河田成人 (Shigeto KAWATA)
Department of Mathematics, Osaka City University

G を有限群とし，$(K, \mathcal{O}, k)$ を p-モジュラー系とする．すなわち，$\mathcal{O}$ は標数 0 の完備離散付値環，(π) は $\mathcal{O}$ の極大イデアルで，剰余体 $k = \mathcal{O}/(\pi)$ の標数は $p > 0$ （p は $|G|$ を割り切るある素数）であるものとし，K は $\mathcal{O}$ の商体とする．R で $\mathcal{O}$ または k を表わすことにする．ここでは RG-加群といえば，R-上自由で有限生成なものとする．特に $\mathcal{O}G$-加群とは $\mathcal{O}G$-lattice を意味する．

自明な RG-加群を R_G と書くことにする．ところで，自明なソースをもつ加群とは，ある部分群 H があって，自明な RH-加群 R_H の誘導加群 $R_H\uparrow^G := R_H \otimes_{RH} RG$ (置換加群) の直既約因子として現れる加群のことである．これから，自明なソースをもつ加群の“Auslander-Reiten 列”について考察したい．

定義　RG-加群の完全列 $\mathcal{E} : 0 \to Z \to Y \xrightarrow{f} X \to 0$ は次の 3 つの条件をみたすときに，Auslander-Reiten 列（または almost split 列）という：

（1）X と Z は直既約；

（2）$\mathcal{E}$ は分裂していない；

（3）任意の split-epi でない準同型写像 $g : W \to X$ に対し，ある準同型写像 $h : W \to Y$ が存在して $g = fh$ が成り立つ．

Auslander-Reiten, Roggenkamp らによって次の定理が示された．

定理（[AR], [R]）　任意の射影的でない直既約 RG-加群 X に対し，X を最終項とするような Auslander-Reiten 列が一意的に存在する．

Auslander-Reiten 列の“一意性”から，X を最終項とするような Auslander-Reiten 列 $0 \to Z \to Y \to X \to 0$ を $\mathcal{A}(X)$ と書き表し，また Z を τX と表すことにする (τ は Auslander-Reiten translation と呼ばれている)．$R = \mathcal{O}$ のときは $\tau = \Omega$ （ここで Ω は Heller 作用素，即ち ΩX は X の projective cover の kernel: $0 \to \Omega X \to P_X \to X \to 0$）で，$R = k$ のときは $\tau = \Omega^2$ であることが知られている ([AR], [R1])．

自明なソースをもつ加群の Auslander-Reiten 列に関して，モジュラー表現においては Erdmann が p-群の場合を，そして Uno が一般の群の場合を考察している．また Inoue-Hieda によって整数表現において G が p-群で H が G の正規部分群の場合が調べられている．§1 で

は，Inoue-Hiedaの結果の拡張を考えたい．即ち，(射影的でない）自明なソースをもつ$\mathcal{O}G$-加群で終わるAuslander-Reiten列の中間項は直既約であることを示す．また，p-群Gの位数がp^3以上ならば群環$\mathcal{O}G$は無限表現型であるというHeller-Reinerの定理があるが，この事実についてAuslander-Reitenの理論を使った別証明を§2で与える．

§1　自明なソースをもつ加群と Auslander-Reiten 列

モジュラー表現（即ち$R=k$上の表現）の場合には次の事実が知られている（p-群の場合はErdmann，一般の有限群の場合はUnoによる）．

定理([E2], [U, Theorem B])　Xは自明なソースを持つkG-加群とする．もしXのヴァーテックスが巡回群, 2面体群, 準2面体群, 4元数形の2群でなければ，Xの属するAuslander-Reiten componentの形は$\mathbb{Z}A_\infty$であり，Xはそのendに位置する．とくに，Auslander-Reiten列$\mathcal{A}(X)$の中間項は直既約である．

Auslander-Reiten componentについては§2で後述する．この節では，自明なソースをもつ$\mathcal{O}G$-lattice XのAuslander-Reiten列$\mathcal{A}(X)$について考察したい．目標は$\mathcal{A}(X)$の中間項が直既約であることを示すことである．

加群の短完全列に関する次の補題はInoue-Hieda[IH]による．

補題1　RG-加群の完全列$0\to Z\to Y\to X\to 0$は分裂していなくて，Z, Xはともに直既約とする．いま$Z\subset Y$について次の条件が満たされているとする：

$$\forall f\in \mathrm{End}_{RG}(Y),\quad f(Z)\subseteq Z$$

このとき，Yは直既約である．

証明　$e\in \mathrm{End}_{RG}(Y)$をidempotentとする（i.e., $e^2=e$）．仮定の条件が満たされることから，$e|_Z: Z\to Z$および$\hat{e}: X=Y/Z\to X=Y/Z$　($\hat{e}(y+Z)=e(y)+Z$ ）が誘導される:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0\\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle e|_Z} & & \big\downarrow{\scriptstyle e} & & \big\downarrow{\scriptstyle \hat{e}} & & \\
0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

いまeがidempotentなので$e|_Z$, $\hat{e}$もともにidempotentである．またX, Zは直既約なので次の場合が考えられる：

場合1　$e|_Z=0$, $\hat{e}=\mathrm{iso}$または$e|_Z=\mathrm{iso}$, $\hat{e}=0$のとき：
　このとき完全列$0\to Z\to Y\to X\to 0$は分裂していて，矛盾．

場合2　$e|_Z=\hat{e}=0$のとき：　$e=0$となる．

場合3　$e|_Z=\hat{e}=\mathrm{iso}$のとき：　Five Lemmaより$e$はiso.

以上のことから，$\mathrm{End}_{RG}(Y)$ の idempotent は 0 または 1 しかないことがわかる． □

次の補題 2，3 も，群 G が p-群のときに [IH] で使われた議論を真似れば得られる．

補題 2　H は G の正規 p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H\uparrow^G$, $\mathcal{O}_H \mid X\downarrow_H$. もし $0 \to \Omega X \to M \to X \to 0$ が $\mathcal{O}G$-加群の完全列ならば，

$$\Omega X = \{m \in M \ : \ m\widehat{H} = 0\}$$

が成り立つ．ただし $\widehat{H} = \sum_{h\in H} h$.

証明　$\subseteq$：　$\Omega X_{\downarrow H} \cong \Omega\mathcal{O}_H \oplus \cdots \oplus \Omega\mathcal{O}_H$.　　　$\supseteq$：　$m \notin \Omega X$ とする．$0 \neq m+\Omega X \in (M/\Omega X)\downarrow_H \cong X\downarrow_H \cong \mathcal{O}_H \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_H$ について，$(m+\Omega X)\widehat{H} = |H|m+\Omega X \neq \Omega X = (\bar{0} \in M/\Omega X)$（$\Omega X$ は M の pure submodule なので）．特に $m\widehat{H} \neq 0$. □

補題 3　H は G の正規 p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H\uparrow^G$, $\mathcal{O}_H \mid X\downarrow_H$. もし $0 \to \Omega X \to M \to X \to 0$ が $\mathcal{O}G$-加群の完全列ならば，

$$\forall f \in \mathrm{End}_{RG}(M),\ \ f(\Omega X) \subseteq \Omega X$$

が成り立つ．

証明　任意の $x \in \Omega X$ に対し，$f(x)\widehat{H} = f(x\widehat{H}) = f(0) = 0$ なので $f(x) \in \Omega X$ □

補題 1，2，3 から次がわかる．

補題 4　H は G の正規 p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H\uparrow^G$, $\mathcal{O}_H \mid X\downarrow_H$. このとき，$X$ で終わる Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}(X)$ の中間項は直既約である．(注意　G が p-群のときは，Inoue-Hieda[IH, Proposition 3.2] で示されている.)

上の補題 4 における H についての仮定から「正規」を取り除くことを，この節の残りでやりたい．そのために，問題を p-局所部分群に帰着させたいので，Auslander-Reiten 列の Green 対応を準備しておく．(Green 対応およびヴァーテックス／ソースについて詳しくは Nagao-Tsushima の本 [NT] を参照して下さい.) $Q(\neq 1)$ を G の p-部分群とし，$N = N_G(Q)$ とおく．f を (G, Q, N) に関する Green 対応とする．Q をヴァーテックスに持つ直既約な RG-加群 V に対し，

$$0 \to \tau V \to M(V) \to V \to 0$$
$$0 \to \tau fV \to M(fV) \to fV \to 0$$

をそれぞれ V, fV で終わる Auslander-Reiten 列とする．これらの Auslander-Reiten 列の中間項 $M(V)$, $M(fV)$ について次の事実が成り立つ（その証明については，モジュラー表現の場合は [K1, K2] を，整数表現の場合は [IH] を参照して下さい）．

補題5　$M(V)$ と $M(fV)$ の直既約分解において，ヴァーテックスが Q を含むような直既約因子の個数は等しい．

ところで Carlson-Jones は，$\mathcal{O}G$-加群 W に対して exponent という次のような概念を導入した：$\pi^a \mathrm{Id}_W : W \to W$ は projective map だが，$\pi^{a-1}\mathrm{Id}_W : W \to W$ は projective map ではないとき，π^a を W の exponent と呼ぶ．(ここで projective map とは，ある射影 $\mathcal{O}G$-加群を経由する $\mathcal{O}G$-準同型写像のこと.) このとき $\exp(W) = \pi^a$ と書くことにする．例えば，$\exp(\mathcal{O}_G) = |G|$ であり，また射影加群 $\mathcal{O}G$ の exponent は $\exp(\mathcal{O}G) = \pi^0 = 1$ である．

補題6　H は群 G の p-部分群で，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H \uparrow^G$，$\mathcal{O}_H \mid X \downarrow_H$．このとき $\exp(X) = |H|$．とくに，$(|H|) \subsetneqq (\pi)$ ならば（例えば $|H| \geqq p^2$ のときは），$\mathcal{A}(X)$ は mod (π) で分裂する．

証明　$\exp(\mathcal{O}_H) = |H|$ なので $|H|\mathrm{id} : \mathcal{O}_H \uparrow^G \to \mathcal{O}_H \uparrow^G$ は projective map である．X は $\mathcal{O}_H \uparrow^G$ の直既約因子なので，$|H|\mathrm{id} : X \to X$ は projective map である．いま $\pi^{-1}|H|\mathrm{id} : X \to X$ が projective map と仮定してみる．H に制限することにより，次の合成写像

$$\mathcal{O}_H \overset{\text{injection}}{\hookrightarrow} X \downarrow_H \xrightarrow{\pi^{-1}|H|} X \downarrow_H \overset{\text{projection}}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}_H$$

を得るが，$\mathcal{O}_H \mid X \downarrow_H$ なので $\pi^{-1}|H|\mathrm{id} : \mathcal{O}_H \to \mathcal{O}_H$ が projective map となってしまい，矛盾．よって $\exp(\mathcal{O}_H \uparrow^G) = |H|$．

ところで $\mathcal{A}(X)$ は，$\underline{\mathrm{End}}_{\mathcal{O}G}(X)$ の socle の生成元 μ と X の projective cover による pull back として構成される ([R1], [T])：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega X & \longrightarrow & M & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \quad :\text{AR 列 } \mathcal{A}(X) \\ & & \| & & \downarrow & \text{pull back} & \downarrow \mu & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega X & \longrightarrow & P_X & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 \quad :\text{projective cover} \end{array}$$

いま $(|H|) \subsetneqq (\pi)$ とすると，$\mu \in \pi\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(X)$ となるので，mod π で reduction すると $\overline{\mu}$ は（kG-準同型写像として）0-写像となる．従って上の pull back を mod π で reduction したものは分裂する．□

$\mathcal{O}G$-加群 W に対して，kG-加群 $W/\pi W$ を $\overline{W}$ と書くことにする．

補題7　H は G の p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H \uparrow^G$，$\mathcal{O}_H \mid X \downarrow_H$．$(|H|) \subsetneqq (\pi)$ ならば（例えば $|H| \geqq p^2$ のときは），Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}(X) : 0 \to \Omega X \to M \to X \to 0$ の中間項の各直既約因子のヴァーテックスは H を（G-共役の意味で）含む．

証明　Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}(X)$ は mod π で reduction すると分裂するので $\overline{M} \cong \overline{X} \oplus \overline{\Omega X}$．よって M は高々 2 個の直既約加群の直和であり，特に M の直既約因子 Y について $\overline{X} \mid \overline{Y}$ または $\overline{\Omega X} \mid \overline{Y}$．従って $k_H \mid \overline{X} \downarrow_H \mid \overline{Y} \downarrow_H$ または $\Omega k_H \mid \overline{Y} \downarrow_H$．いま，もし Y のヴァーテックスが H を含まないと仮定すると，Mackey 分解をみることにより，$\overline{Y} \downarrow_H$ に

はヴァーテックスが H である因子は現れないので，矛盾．よって Y のヴァーテックスは H を含むとわかる． □

補題８　H は G の p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H\uparrow^G$，$\mathcal{O}_H \mid X\downarrow_H$．$|H| = p$ ならば，Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}(X) : 0 \to \Omega X \to M \to X \to 0$ の中間項の射影的でない各直既約因子のヴァーテックスは H を（G-共役の意味で）含む．

証明　Y が M の直既約因子ならば $\mathrm{vx}(Y)$ と $\mathrm{vx}(X)$ の間には包含関係があり（Erdmann），いま H は G の極小部分群である． □

補題９　H は G の p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H\uparrow^G$，$\mathcal{O}_H \mid X\downarrow_H$．$(|H|) \subsetneqq (\pi)$ ならば（とくに $|H| \geqq p^2$ のときは），$\mathcal{A}(X)$ の中間項 M は直既約である．

証明　補題７から M の各直既約因子のヴァーテックスは H を含む．また補題４より X の Green 対応子 fX で終わる Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}(fX)$ の中間項は直既約であり，そのヴァーテックスは H を含む．よって補題５より M は直既約と云える． □

補題１０　H は G の p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H\uparrow^G$，$\mathcal{O}_H \mid X\downarrow_H$．$|H| = p$ のとき，$\mathcal{A}(X)$ の中間項 M は直既約である．

証明　補題８から M の各直既約因子で射影的でないもののヴァーテックスは H を含む．また補題４より X の Green 対応子 fX で終わる Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}(fX)$ の中間項は直既約であり，もしこれが射影的でなければ，そのヴァーテックスは H を含む．よって補題５より M の projective-free part は直既約であり，さらに次の補題１１から，M は直既約とわかる． □

補題１１　$H\ (\neq 1)$ は G の p-部分群とし，X は自明なソース $\mathcal{O}_H$ をもつ加群とする：$X \mid \mathcal{O}_H\uparrow^G$，$\mathcal{O}_H \mid X\downarrow_H$．もし Auslander-Reiten 列 $\mathcal{A}(X) : 0 \to \Omega X \to M \to X \to 0$ の中間項 M の直既約分解においてある直既約射影加群 P が現れれば，実は $M = P$ となっている．とくに M は直既約である．

証明　ΩX から P への既約写像（単射）が存在することから，ΩX は $\mathrm{Rad}(P)$ の直和因子である．$S := \mathrm{top}(\overline{P})$ とおくと，$\mathrm{Soc}(\overline{\mathrm{Rad}(P)}) \cong S \oplus S$ となっている（なぜならもし $\mathrm{Soc}(\overline{\mathrm{Rad}(P)}) \cong S$ なら P のみがこの block に属する唯一の直既約 $\mathcal{O}G$-lattice となり [K3, Lemma 2]，X の存在に矛盾）．
ここで，$\mathrm{Soc}(\overline{\Omega X}) \cong S$ が成り立つことを主張する：　実際，$\mathrm{Soc}(\overline{\Omega X}) \cong S \oplus S$ と仮定してみる．このとき $\Omega X \cong \mathrm{Rad}(P)$ であることをまず注意しておく．よって，ΩX が与える通常指標 $\vartheta_{\Omega X}$ は P が与える通常指標 ϑ_P と一致する．また ΩX の入射包絡は $P \oplus P$ なの

で M が与える通常指標 ϑ_M は $2\vartheta_P$ である．従って X が与える通常指標 ϑ_X は ϑ_P と一致する．ところで，$X\downarrow_H \cong \mathcal{O}_H \oplus$(置換加群) なので $\vartheta_{X\downarrow_H} = \mathbf{1}_H +$ (置換指標) と書ける．ここで $\mathbf{1}_H$ は単位指標．特に $1 \neq h \in H$ に対し $\vartheta_X(h) \neq 0$．一方，$\vartheta_{P\downarrow_H}$ は射影 $\mathcal{O}H$-加群が与える通常指標となるので $\vartheta_P(h) = 0$ となり，矛盾が生じる．

さて $\mathrm{Soc}(\overline{\Omega X}) \cong S$ なので ΩX の入射包絡は P であることがわかり，特に $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} M = \mathrm{rank}_{\mathcal{O}} P$ が従う．□

補題９，１０をまとめて

命題 (射影的でない) 自明なソースをもつ $\mathcal{O}G$-加群で終わる Auslander-Reiten 列の中間項は直既約である．

§2 無限表現型の群環

群環 RG 上の直既約加群の同型類の個数が有限個のとき，RG は有限表現型であるという．一方，直既約加群の同型類が無限個あるときは無限表現型という．Heller-Reiner により次が示された：

定理 [Heller-Reiner] p-群 G が位数 p^3 以上なら群環 $\mathcal{O}G$ は無限表現型である．

この節では，Auslander-Reiten の理論を使ってこの事実の別証明を与えたい．

$\Gamma(RG)$ で 群環 RG の Auslander-Reiten quiver を，$\Gamma_s(RG)$ で RG の stable Auslander-Reiten quiver を表すことにする．ところで Auslander-Reiten quiver $\Gamma(RG)$ とは，“点”の集合としては直既約 RG-加群の同型類 $[M]$ を考えて，直既約 RG-加群 M, N に対して M から N への既約写像が存在する時に $[M] \to [N]$ のように“矢”を書くことによって得られる付値有向グラフのことである．($f : M \to N$ が既約写像とは，本質的な分解ができないときをいう．即ち次の条件をみたすとき：f は split-mono でも split-epi でもなく，もし $f = hg$ と合成写像に分解されれば，g が split-mono かまたは h が split-epi である．) 既約写像と Auslander-Reiten 列との間には次のような密接な関係が知られている：

命題 M, N をともに射影的ではない直既約 RG-加群とするとき，次は同値；
（１）M から N への既約写像が存在する：
（２）M から始まる Auslander-Reiten 列の中間項の直和因子として N が現れる：
（３）N で終わる Auslander-Reiten 列の中間項の直和因子として M が現れる．

また stable Auslander-Reiten quiver $\Gamma_s(RG)$ とは，$\Gamma(RG)$ から射影的 (=入射的) RG-加群に対応する点とそれらの点につながる矢を取り除いたグラフのことである．この stable Auslander-Reiten quiver の連結成分 (以後 Auslander-Reiten component とよぶ) のグラフ

としての形について，Riedtmann による structure theorem が知られている．

定理 [Riedtmann]　AR-component Θ に対して，ある tree class T と，translation quiver $\mathbf{Z}T$ のある自己同型からなる admissible group Π が定まって，$\Theta \cong \mathbf{Z}T/\Pi$ となる．

群環の場合によく現われる tree class $A_\infty : \bullet\!-\!\!\bullet\!-\!\!\bullet\!-\!\!\bullet\!-\!\cdots$ を例にしてみると，$\mathbf{Z}A_\infty$ は下の図のような形のグラフである：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & & \vdots & & & & \\
 & & \tau^2N \arrow[dr] & & \tau N \arrow[dr] & & N \arrow[dr] & & \tau^{-1}N & \\
\cdots & \tau^2M \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau M \arrow[ur] \arrow[dr] & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & \tau^{-1}M \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots \\
\tau^2L \arrow[ur] & & \tau L \arrow[ur] & & L \arrow[ur] & & \tau^{-1}L \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

また $\mathbf{Z}A_\infty$ を自己同型群 $\Pi = \langle\tau^n\rangle$ で割ったものは階数 n の tube とよばれる．

Auslander-Reiten quiver とは大雑把に言うと，(既約写像は Auslander-Reiten 列に現れる写像であるので,) Auslander-Reiten 列を寄せ集めて張り合せたものである．$\mathbf{Z}A_\infty$ では，“網目”がそれぞれ Aulsander-Reiten 列に相当している．上の図で M に注目すると完全列 $0 \to \tau M \to L \oplus \tau N \to M \to 0$ が Auslander-Reiten 列であり，また L に注目すると完全列 $0 \to \tau L \to \tau M \to L \to 0$ が Auslander-Reiten 列である．とくに，直既約加群 L が Auslander-Reiten component の end(端) に位置することは，L で終わる Auslander-Reiten 列の中間項の projective-free part が直既約であることと同値である．

Auslander-Reiten translation τ に関して $\tau^m W \cong W$ $(\exists m \in \mathbb{N})$ となる加群を τ-周期的な加群という．τ-周期的な直既約加群を含む Auslander-Reiten component の形状についての次の結果は Happel-Preiser-Ringel による：

定理 [Happel-Preiser-Ringel]　Auslander-Reiten component Θ が Auslander-Reiten translation τ に関して周期的な直既約加群を含むとする．このとき，

（1）Θ が無限個の直既約加群を含めば，Θ は tube である．

（2）Θ が有限個の直既約加群からなれば（従って有限表現型ならば）Θ の tree class は Dynkin である．

注意　Dynkin diagrams は以下のようなグラフである：

$A_n : \bullet - \bullet - \bullet \cdots \bullet - \bullet$，　$B_n : \bullet \Leftarrow \bullet - \bullet \cdots \bullet - \bullet$，　$C_n : \bullet \Rightarrow \bullet - \bullet \cdots \bullet - \bullet$,

$$
D_n : \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \cdots \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\
 & \bullet & & &
\end{tikzcd}, \quad F_4 : \bullet - \bullet \Rightarrow \bullet - \bullet, \quad G_2 : \bullet \Rrightarrow \bullet,
$$

$$
E_6 : \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\
 & & \bullet & &
\end{tikzcd}, \quad
E_7 : \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\
 & & \bullet & & &
\end{tikzcd}, \quad
E_8 : \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
\bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\
 & & \bullet & & & &
\end{tikzcd}
$$

よって，もし群環 $\mathcal{O}G$ が有限表現型なら，Happel-Preiser-Ringel の定理（2）から，Auslander-Reiten component の end に位置するような直既約加群からなる τ-軌道は高々3個である．言い換えれば，もし Auslander-Reiten component の end に位置するような直既約加群からなる τ-軌道が4個以上存在することがいえれば，それは無限表現型であるとわかる．

今から Happel-Preiser-Ringel の定理を利用して，Heller-Reiner の定理の別証明をしよう．

p-群 G は巡回群かもしくは4元数形の2群の場合だけを考えればよい：実際，そうでなければ，群環 $\mathcal{O}G$ は無限表現型（例えば自明な加群 $\mathcal{O}_G$ は Ω-周期的ではない）となる．従って，すべての $\mathcal{O}G$-加群は Ω-周期的である．群環 $\mathcal{O}G$ において $\tau = \Omega$ なので Happel-Preiser-Ringel の定理から Auslander-Reiten components は tube かもしくはその tree class は Dynkin である．

H_1, H_2 を G の部分群で位数がそれぞれ p, p^2 のものとする．§1の命題から，$\mathcal{O}_G$，$\mathcal{O}_{H_1}\uparrow^G$，$\mathcal{O}_{H_2}\uparrow^G$ は Auslander-Reiten component の end に位置し，(vertex が異なるので）互いに異なる τ-軌道に属する．また [K4] から $\mathcal{O}G$ の radical $J(\mathcal{O}G)$ も Auslander-Reiten component の end に位置している．ところで $J(\mathcal{O}G)/\pi J(\mathcal{O}G) \cong k_G \oplus \Omega k_G$ であるが，自明なソースを持つ $\mathcal{O}G$-加群を mod π で reduction しても直既約なので，$J(\mathcal{O}G)$ は自明なソースを持つ加群とは別の τ-軌道に属することがわかる．これらのことから Auslander-Reiten component の end に位置するような直既約加群からなる τ-軌道が4個以上存在することがいえた．よって上の注意から群環 $\mathcal{O}G$ は無限表現型とわかる．

参考文献

[AR] Auslander, M. and Reiten, I.: *Representation theory of artin algebras V: Methods for computing almost split sequences and irreducible morphisms*, Comm. Algebra **5**(1977), 519–544.

[B] Benson, D. J.: Representations and cohomology I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 30, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[CJ] Carlson, J. F. and Jones, A.: *An exponential property of lattices over group rings*, J. London Math. Soc. **39**(1989), 467–479.

[D1] Dieterich, E.: *Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings*, Math. Z. **183**(1983), 43–60.

[D2] Dieterich, E.: *Group rings of wild representation type*, Math. Ann. **266**(1983), 1–22.

[E1] Erdmann, K.: Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Note in Mathematics, Vol. 1428, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1990.

[E2] Erdmann, K.: *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver of p-groups*, Math. Z. **203**(1990), 321–334.

[HPR] Happel, D., Preiser, U. and Ringel, C. M.: *Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to $D\mathrm{Tr}$-periodic modules*, in Representation theory II, Lecture Notes in Math. Vol. 832, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[HR] Heller, A. and Reiner, I.: *Representations of cyclic groups in rings of integers. II*, Ann. of Math. **77**(1963), 318–328.

[IH] Inoue, T. and Hieda, Y.: *A note on Auslander-Reiten quivers for integral group rings*, Osaka J. Math. **32**(1995), 483–494.

[K1] Kawata, S.: *The Green correspondence and Auslander-Reiten sequences*, J. Algebra **123**(1989), 1–5.

[K2] Kawata, S.: *Module correspondence in Auslander-Reiten quivers for finite groups*, Osaka J. Math. **26**(1989), 671–678.

[K3] Kawata, S.: *On standard Auslander-Reiten sequences for finite groups*, Arch. Math. **75**(2000), 92–97.

[K4] Kawata, S.: *On Auslander-Reiten components and projective lattices of p-groups*, to appear in Osaka J. Math.

[NT] 永尾汎, 津島行男: 有限群の表現, 裳華房, 1987.

[R1] Roggenkamp, K. W.: *The construction of almost split sequences for integral group rings and orders*, Comm. Algebra **5**(1977), 1363–1373.

[R2] Roggenkamp, K. W.: Integral representations and structure of finite group rings, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1980.

[T] Thévenaz, J.: *Duality in G-algebras*, Math. Z. **200**(1988), 47–85.

[U] Uno, K.: *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver*, Math. Z. **208**(1991), 411–436.