

Hochschild cohomology of orders

眞田 克典 (Sanada, Katsunori)

東京理科大学理学部数学教室

(Department of Mathematics, Science University of Tokyo)

Abstract. Let $\Lambda = R[E_{11}, \dots, E_{mm}, X]$ be a subring of $M_m(R)$, the ring of $m \times m$ -matrices with entries in a commutative ring R , where X is a certain matrix such that $X^m = a$ for a nonzero divisor $a \in R$. We give a periodic Λ^e -projective resolution of period 2. Using it, we calculate the Hochschild cohomology $HH^*(\Lambda)$ of the R -algebra Λ . A hereditary order of a central simple algebra is an example of such Λ .

1 序論

多元環の Hochschild cohomology を計算することは、一般に非常に困難であるといわれています。体上の多元環に関しては、例えば [EH] にあるように、self-injective Nakayama algebra の場合などが得られていますが、その方法は、実際に両側加群としての projective resolution を求めて、それを用いて計算するという方法です。上の多元環の場合、周期的 projective resolution を持つことがわかるので、その Hochschild cohomology の計算は煩雑ではあれ、可能です。その他、[EHS], [ES], [H] で扱われている多元環はすべて周期的 projective resolution をもつものです。つまり、(ある多元環について、もし存在するなら、その) 周期的 projective resolution を見つけることがポイントとなります。

ここでは、主結果として、可換環 R 上の全行列環 $M_m(R)$ の部分多元環 $\Lambda = R[E_{11}, E_{22}, \dots, E_{mm}, X]$ (ここで、 E_{ij} は行列単位、 X は

$$X := \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & a_{m-1} \\ a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times m},$$

a_i ($1 \leq i \leq m$) は R の非零因子とします) が周期 2 の projective resolution を持つことを述べ、そして、その Hochschild cohomology 環 $HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_{\Lambda^e}^i(\Lambda, \Lambda)$ を計算します。なお、この resolution は上記 self-injective Nakayama algebra の特別な場合と非常によく似ており、それについても触れます。これらは S. König, N. Snashall との共同研究によるものです。

次章以下、いくつかの order に関してその Hochschild cohomology を紹介し、上記行列環を扱うに至った背景を述べます (§2)。そして、この行列環の周期 2 の projective resolution を述べ (§3)、最後にある特別な self-injective Nakayama algebra のもつ周期的 projective resolution を紹介します

2 いくつかの order の Hochschild cohomology の例

1. Integral group rings

任意の有限群 G に対して, $\Lambda = \mathbb{Z}G$ とする. Λ は $\mathbb{Q}G$ の \mathbb{Z} -order である. 任意の左 Λ^e (両側 Λ) 加群 M に対して, 次の同型が成り立つ:

$$H^r(\Lambda, M) \cong H^r(G, {}_\psi M).$$

ここで, 左辺は Λ の Hochschild cohomology, 右辺は群 G の通常の cohomology を表す. ${}_\psi M$ は G による conjugation で左 G 加群と見なした M を表す. この同型は, 両辺の cup 積を保存しているため, 特に環としての同型

$$HH^*(\mathbb{Z}G) \cong H^*(G, {}_\psi \mathbb{Z}G)$$

が成り立つ ([NSa]). すなわち, 群環の場合, 通常の群の cohomology に帰着される.

2. Rings of algebraic integers

Rings of algebraic integers in quadratic fields: m を任意の平方因子を含まない整数とする. $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の \mathbb{Z} -order $\Lambda = \mathbb{Z}[\sqrt{m}]$ を考える. このとき, Λ に対して, 次の周期 2 の projective resolution が存在する:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{\sigma} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{u} \Lambda \rightarrow 0.$$

ここで, $u(1 \otimes 1) = 1$, $\delta(1 \otimes 1) = 1 \otimes \sqrt{m} - \sqrt{m} \otimes 1$, $\sigma(1 \otimes 1) = 1 \otimes \sqrt{m} + \sqrt{m} \otimes 1$ とする. これを用いて, $HH^*(\Lambda) = \Lambda[x]/(2\sqrt{m})$, $\deg x = 2$, を得る.

The rings of algebraic integers in cyclotomic fields: 任意の素数 p に対して, $\zeta = \zeta_p$ を 1 の原始 p 乗根とする. $\mathbb{Q}(\zeta)$ の整数環を $\Lambda = \mathbb{Z}[\zeta]$ とおく. このとき, 次の周期 2 の projective resolution が存在する:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{\sigma} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{\delta} \Lambda \otimes \Lambda \xrightarrow{u} \Lambda \rightarrow 0.$$

ここで, $u(1 \otimes 1) = 1$, $\delta(1 \otimes 1) = 1 \otimes \zeta - \zeta \otimes 1$, $\sigma(1 \otimes 1) = \sum_{j=0}^{p-2} (\sum_{i=0}^{p-j-2} \zeta^i) \otimes \zeta^j$ とする. これを用いて, $HH^*(\Lambda) = \Lambda[x]/((1-\zeta)^{p-2}x)$, $\deg x = 2$, を得る. ここで, $1-\zeta$ は Λ の素元であることに注意する.

なお, [H] によって, 可換環 k 上の多項式環 $k[X]$ に対して, 任意の多項式 $f(X)$ による剰余環 $k[X]/(f)$ が k -algebra として, 周期 2 の projective resolution をもつことが示されており, これから上記の結果を得ることもできる.

3. An integral quaternion algebra

Λ を \mathbb{Z} 上の四元数環とする: $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}i \oplus \mathbb{Z}j \oplus \mathbb{Z}k$, $i^2 = j^2 = -1$, $ij = k = -ji$. このとき,

$$HH^*(\Lambda) = \mathbb{Z}[x, y, z]/(2x, 2y, 2z, x^2 + y^2 + z^2), \deg x = \deg y = \deg z = 1$$

であることがわかる ([Sa1]).

4. Maximal orders および hereditary orders (local case)

R を, π を素元とし, $R/(\pi)$ が有限体であるような完備離散付値環とする. K を R の商体とし, A を index $n \geq 1$ の central simple K -algebra とする. このとき, A は, ある division K -algebra D 上の行列環 $M_m(D)$ に同型となる. ここで, D は cyclic algebra $(W/K, \sigma, \pi) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} W\Pi^i$, $\Pi^n = \pi$, に同型となる. ただし, W/K は Galois 群 $G = \langle \sigma \rangle$ をもつ次数 n の不分岐拡大である. いま, S を W の付値環とすると, R -algebra $\Delta = \bigoplus_{i=0}^{n-1} S\Pi^i$ は D の一意的な maximal order となる. そして, $(\Pi) = \Delta\Pi = \Pi\Delta$ は Δ の一意的な極大両側 ideal である.

Maximal orders: $A = M_m(D)$ のすべての maximal R -order は

$$\Lambda = M_m(\Delta) = \begin{bmatrix} \Delta & \cdots & \Delta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta & \cdots & \Delta \end{bmatrix}$$

に同型となる。 R -algebra Λ は R -algebra Δ に Morita equivalent なので, 同型 $HH^*(\Lambda) \cong HH^*(\Delta)$ を得る。さて, Δ は次の周期的 projective resolution をもつことがわかっている ([Sa2]):

$$\cdots \xrightarrow{\delta} \Delta \delta_0 \Delta \xrightarrow{\sigma} \Delta \delta_1 \Delta \xrightarrow{\delta} \Delta \delta_0 \Delta \xrightarrow{u} \Delta \rightarrow 0.$$

上で $\delta_0 = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, $\delta_1 = \sum_{i=1}^n x_i^\sigma \otimes y_i$. ただし, $(x_i, y_i)_{i=1}^n$ は, $T_{W/K}(x_i y_i) = \delta_{i,j}$, $\sum_{i=1}^n x_i^\tau y_i = \delta_{\tau,1}$ を満たす, S の R -bases の pair とする。また, $u(1 \otimes 1) = 1$, $\delta(1 \otimes 1) = \Pi \otimes 1 - 1 \otimes \Pi$, $\sigma(1 \otimes 1) = \sum_{i=0}^{n-1} \Pi^i \otimes \Pi^{n-i-1}$ とおいた。これを用いて, $HH^*(\Delta) = R[x]/(\pi x)$, $\deg x = 2$, がわかる。なお, 加群の構造については [B] で知られていた。

Hereditary orders: A のすべての hereditary order は次の行列環に同型である:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\Delta) & \cdots & \cdots & (\Delta) \\ (\Pi) & (\Delta) & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ (\Pi) & \cdots & (\Pi) & (\Delta) \end{bmatrix}^{\{m_1, m_2, \dots, m_r\}}$$

ここで, invariants $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ は対角線上のブロック行列のサイズを表す。 r を type とよぶ。さて, type r をもつ hereditary order は type r , invariants $\{1, 1, \dots, 1\}$ をもつ basic な hereditary order に Morita equivalent であることがわかる。従って, Hochschild cohomology は basic なものに限って考えればよい。ところで, basic な hereditary order は Frobenius 的なので, 完備 Hochschild cohomology ring を構成することができ, それが 2 次の可逆元をもつことから, Hochschild cohomology は周期 2 であることがわかる ([Sa2])。 (このことから, hereditary order は周期 2 の projective resolution をもつであろうことが想像されるが, 特別の場合には, 次章で述べるように実際にそうである。)

3 ある行列環の周期的 projective resolution

可換環 R 上の全行列環 $M_m(R)$, $m \geq 2$, の部分多元環 $\Lambda = R[E_{11}, E_{22}, \dots, E_{mm}, X]$ を考える。ここで, E_{ij} は行列単位, X は

$$X := \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & a_{m-1} \\ a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times m},$$

a_i ($1 \leq i \leq m$) は R の非零因子とする。この章では, Λ が周期 2 の projective resolution を持つことを述べ, そして, その Hochschild cohomology 環 $HH^*(\Lambda) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_{\Lambda^e}^i(\Lambda, \Lambda)$ を計算する。

前章4節の notation (R は完備離散付値環, π をその素元) を用いて, 上の Λ で与えられる order の形の例を記しておく:

例1. 例えば, $m = 2, m = 3$ の場合は次のような tiled order となる:

$$\begin{bmatrix} R & \pi^{s_1} \\ \pi^{s_2} & R \end{bmatrix} \text{ if } m = 2, \quad \begin{bmatrix} R & \pi^{s_1} & \pi^{s_1+s_2} \\ \pi^{s_2+s_3} & R & \pi^{s_2} \\ \pi^{s_3} & \pi^{s_1+s_3} & R \end{bmatrix} \text{ if } m = 3.$$

例2. また,

$$\text{If } X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 \\ \pi^s & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ then } \Lambda = \begin{bmatrix} R & \cdots & \cdots & R \\ \pi^s & R & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \pi^s & \cdots & \pi^s & R \end{bmatrix}.$$

したがって, 特に $s = 1$ のときは hereditary order となる。

左 Λ^e -projective modules を次のように定義する:

$$P_0 = \bigoplus_{i=1}^m \Lambda E_{ii} \otimes E_{ii} \Lambda, \quad P_1 = \bigoplus_{i=1}^m \Lambda E_{ii} \otimes E_{i+1, i+1} \Lambda,$$

そして, 左 Λ^e -homomorphisms $\delta : P_1 \rightarrow P_0, \sigma : \Lambda \rightarrow P_1$ を

$$\begin{aligned} \delta(E_{ii} \otimes E_{i+1, i+1}) &= E_{ii} (1 \otimes X - X \otimes 1) E_{i+1, i+1}, \\ \sigma(E_{ii}) &= E_{ii} \left(\sum_{k=0}^{m-1} X^k \otimes X^{m-k-1} \right) E_{ii} \text{ for } 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

で定義する。 $u : P_0 \rightarrow \Lambda$ は multiplication map とする。そのとき

定理 A. 次の左 Λ^e 加群の exact sequence が存在する:

$$0 \rightarrow \Lambda \xrightarrow{\sigma} P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{u} \Lambda \rightarrow 0.$$

定理 B. Λ の Hochschild cohomology ring は

$$HH^*(\Lambda) = R[x]/(ax), \quad \deg x = 2,$$

となる。ただし, $a := a_1 a_2 \cdots a_m$ とおいた。

4 Self-injective Nakayama algebra の周期的 projective resolution

[EH] に述べられている, basic self-injective Nakayama algebra の周期 2 の projective resolution を紹介する。

K を体, $m \geq 2$ とする. basic self-injective Nakayama K -algebra は次の形をしている:

$$KQ/I := B_m^k (= B).$$

ただし, Q は m 個の vertex と m 個の arrow をもつ, すべて同じ向きの circular quiver, また, I は少なくとも長さ $k \geq 2$ のすべての path で生成されるイデアルである. ここで, vertex を e_1, e_2, \dots, e_m , arrow を $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ とし, $X = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m$ とおく. そのとき, 最初の二つの step が次のようになる, B^e -projective resolution を取ることができる:

$$0 \rightarrow \Omega^2 B \rightarrow P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{u} B \rightarrow 0.$$

ここで,

$$P_0 = \bigoplus_{i=1}^m B e_i \otimes e_i B, \quad P_1 = \bigoplus_{i=1}^m B e_i \otimes e_{i+1} B \quad (e_{m+1} := e_1)$$

とおいた. また, B^e 同型 $\Omega^2 B \cong {}_1 B_{\beta^k}$ が存在する. ただし, $k = mq + \bar{k}$ ($0 \leq \bar{k} < m$), $\beta: B \rightarrow B$ は $e_i \mapsto e_{i-1}$, $\nu_i \mapsto \nu_{i-1}$ なる自己同型を表す. Nakayama 自己同型は $\beta^{\bar{k}-1}$ で与えられる. 例えば $m = k$ のときは, $\bar{k} = 0$. したがって, ${}_1 B_{\beta^k} = {}_1 B_1$ なので, B は周期 2 の B^e -projective resolution をもつことがわかる. (以上 [EH]).

さて, この同型をとおして上の sequence を書き換えると次を得る:

$$0 \rightarrow {}_1 B_{\beta^k} \xrightarrow{\sigma} P_1 \xrightarrow{\delta} P_0 \xrightarrow{u} B \rightarrow 0.$$

ここで, u は multiplication. また, δ, σ は次によって引き起こされることがわかる:

$$\delta(e_i \otimes e_{i+1}) = e_i(1 \otimes X - X \otimes 1)e_{i+1}, \quad \sigma(1) = \sum_{j=0}^{m-1} X^j \otimes X^{m-j-1}.$$

これは, 定理 A の sequence とほとんど同じ形である.

参考文献

- [B] F. R. Bobovich, Cohomologies of maximal orders of simple central algebras, *Math. Notes* **6** (1969), 589–592
- [EH] K. Erdmann and T. Holm, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n , *Forum Math.* **11** (1999), 177–201
- [EHS] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall, Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n , II, *to appear*
- [ES] K. Erdmann and N. Snashall, On Hochschild cohomology of preprojective algebras I, II, *J. Algebra* **205** (1998), 391–412, 413–434
- [H] T. Holm, Hochschild cohomology rings of algebras $k[X]/(f)$, *Contributions to Algebras and Geometry* **41** (2000), 291–301
- [NSa] T. Nozawa and K. Sanada, Cup products on the complete relative cohomologies of finite groups and group algebras, *Hokkaido Mathematical Journal* **28** (1999), 545–556
- [Sa1] K. Sanada, On the Hochschild cohomology of crossed products, *Comm. Algebra* **21** (1993), 2727–2748
- [Sa2] K. Sanada, Hochschild cohomology of minimal hereditary orders, *J. Algebra* **176** (1995), 786–805

162-0827 東京都新宿区若宮町 26

東京理科大学理学部数学教室

E-mail: sanada@rs.kagu.sut.ac.jp