数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 64-68

変数分離可能な多次元非線形ナップザック問題の解法と 2次形式ナップザック問題への適用

姫路獨協大学　並川　哲郎
岡山理科大学　岩崎　彰典
岡山理科大学　太田垣　博一
関西大学　仲川　勇二

1　まえがき

多次元非線形ナップザック問題は非線形整数計画と等価であり，組合せ最適化の手法を使って解くためため，凸性や微分可能性を持たない非線形整数計画へ適用することができる。しかしながら，組合せ最適化問題はＮＰ困難であるため大規模な問題は解くことは困難である。従来，一つの制約条件を持つ非線形ナップザック問題に対しては，分枝限定法や動的計画法が開発されてきたが，複数の制約条件をもつ多次元非線形ナップザック問題に対しては分枝限定法や動的計画法は効率的ではない。我々は，変数分離可能な多次元非線形ナップザック問題に代理制約法を適用し近似解を求め，その解から出発して近似解を改善し，コンピュータの記憶容量が充分ある場合は厳密解を求めることができるアルゴリズムを提案する。

2　変数分離可能な多次元非線形ナップザック問題

変数分離可能な多次元非線形ナップザック問題はつぎの式で定式化される。

$$\text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x_n) \tag{1}$$

$$\text{subject to} \quad g_m(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} g_{mn}(x_n) \le b_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{2}$$

$$x_n \in \mathcal{K}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

ここで，変数$\boldsymbol{x} = x_1, x_2, \ldots, x_N$，項目集合$\mathcal{K}_n = \{1, 2, \ldots, K_n\}$，であり，$f_n(x_n)$，$g_{mn}(x_n)$はそれぞれ非負の目的関数，$b_m$は制約許容量である。

非線形ナップザック問題はNauss [1] により研究が始まり，Sinha [2] やDyer [3]，仲川 [4] により効率的なアルゴリズムが開発されてきた。しかし，多次元非線形ナップザック問題のように複数の制約条件を持つ問題にそれらの手法を直接適用することはできない。そこで我々は多次元非線形ナップザック問題に代理制約法を適用する。

3　代理制約法（SD)

代理制約法はDyer [6] により整数計画問題へ適用された。
岩崎ら [7] は代理制約法を多次元非線形ナップザック問題へ適用した。代理双対問題は次式で与えられる。

$$\min\{\mathrm{opt}[\mathrm{S}(\boldsymbol{u})] : \boldsymbol{u} \in U\}, \tag{4}$$

ただし, $\mathrm{opt}[\mathrm{S}(\boldsymbol{u})]$ は問題 $\mathrm{S}(\boldsymbol{u})$ の最適な目的関数値,

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{M-1})^T \in R^{M-1}, \tag{5}$$

$$U = \{\boldsymbol{u} \in R^{M-1} : \sum_{m=1}^{M-1} u_m \leq 1, \boldsymbol{u} \geq 0\}, \tag{6}$$

である。ここで, $\mathrm{S}(\boldsymbol{u})$ は代理問題とよばれ次式で与えられる。

$$\text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}) \tag{7}$$

$$\text{subject to} \quad \varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) \leq \beta, \tag{8}$$

ただし,

$$\varphi(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}) = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{g_m(\boldsymbol{x}) - g_M(\boldsymbol{x})\} + g_M(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

$$\beta = \sum_{m=1}^{M-1} u_m\{b_m - b_M\} + b_M, \tag{10}$$

である。我々は, 代理双対問題を解くためのアルゴリズムとしてCOP アルゴリズム [5] を用いる。これは代理乗数の作る多面体を考え, 代理問題の最適解を排除するように多面体を切断し代理乗数を更新するアルゴリズムである。次にそのアルゴリズムを示す。

BEGIN
$\quad \boldsymbol{u}' \leftarrow$ 初期値;
$\quad$ **DO**
$\quad\quad \boldsymbol{x}' \leftarrow \mathrm{opt}[\mathrm{S}(\boldsymbol{u}')]$;
$\quad\quad \boldsymbol{u}' \leftarrow \mathrm{COP}[\mathrm{S}(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{x}')]$;
$\quad$ **WHILE** (Uが空でない);
END

代理双対問題の実行可能領域は, 原問題の実行可能領域をすべて含んでいるので, その解は原問題の上界値を与えるが実行可能になるとは限らない。そこで, 何らかの実行可能解を求めるためには近似解法が必要であり, 得られた近似解は上界値と比較することによりその解の品質を評価することができる。

4 近似解法

実行可能でない代理双対問題の解を$\boldsymbol{x}^{\mathrm{SD}}$, 最適な代理乗数を$\boldsymbol{u}_m^{\mathrm{SD}}$とし, 次の式を考える。

$$\tilde{\beta} = \sum_{m=1}^{M-1} u_m^{\mathrm{SD}}\left\{\sum_{n=1}^{N} g_{mn}(x_n^{\mathrm{SD}}) - \sum_{n=1}^{N} g_{Mn}(x_n^{\mathrm{SD}})\right\} + \sum_{n=1}^{N} g_{Mn}(x_n^{\mathrm{SD}}). \tag{11}$$

代理問題のβを$\tilde{\beta}$で置き換え, 実行可能領域が縮小された次の代理問題 $\tilde{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{SD}})$:

$$\text{maximize} \quad f(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

$$\text{subject to} \quad \varphi(\boldsymbol{u}^{\mathrm{SD}}, \boldsymbol{x}) < \tilde{\beta}, \tag{13}$$

を得る。この問題の厳密解$\boldsymbol{x}'$が実行可能でなければ(11)式の$\boldsymbol{x}^{\mathrm{SD}}$を$\boldsymbol{x}'$で置き換え，上記手順を実行可能解が得られるまで繰り返す。そのアルゴリズムを次に示す。

BEGIN
　　$\tilde{\beta} \leftarrow \varphi(\boldsymbol{u}^{\mathrm{SD}}, \boldsymbol{x}^{\mathrm{SD}})$;
　　DO
　　　　$\boldsymbol{x}' \leftarrow \mathrm{opt}[\tilde{\mathrm{S}}(\boldsymbol{u}^{\mathrm{SD}})]$;
　　　　IF ($\boldsymbol{x}'$が実行可能) **THEN** 近似解を出力; **EXIT**;
　　　　ELSE $\tilde{\beta} \leftarrow \varphi(\boldsymbol{u}^{\mathrm{SD}}, \boldsymbol{x}')$;
　　　　ENDIF
　　WHILE ($\boldsymbol{x}'$が実行不可能);
END

5 厳密解の探索と近似解の改善

近似解の改善と厳密解の探索を行うアルゴリズム(以下MCと略す)を以下に示す。代理双対問題の解を$\boldsymbol{x}^{\mathrm{SD}}$，問題の上界値解を$f^{\mathrm{UB}}$，近似解法の与える解を$\boldsymbol{x}^{\mathrm{NEAR}}$とする。

BEGIN
$f^{\mathrm{UB}} \leftarrow f(\boldsymbol{x}^{\mathrm{SD}})$; $f^{\mathrm{LB}} \leftarrow f(\boldsymbol{x}^{\mathrm{NEAR}})$; $\hat{\beta} \leftarrow \beta(\boldsymbol{x}^{\mathrm{NEAR}})$;
Step1 :
　　$f^{\mathrm{T}} \leftarrow f^{\mathrm{UB}} - \varepsilon$;
　　f^{T}以上の目的関数値を持つ解を列挙する。;
　　IF (列挙不可能) **THEN** **Step2**へ;
　　　　IF (実行可能解がある) **THEN** 厳密解を出力; **EXIT**;
　　　　ELSE $f^{\mathrm{UB}} \leftarrow f^{\mathrm{T}}$;
　　　　ENDIF
　　ENDIF
　　Step1へ;
Step2 :
　　$f^{\mathrm{T}} = f^{\mathrm{LB}} + \varepsilon; \hat{\beta} \leftarrow \hat{\beta} + \delta$;
　　$\hat{\beta}$の制約許容量の条件のもとでf^{T}以上の目的関数値を持つ解を列挙する。;
　　IF (列挙可能) **THEN**
　　　　IF ($f^{\mathrm{UB}} = f^{\mathrm{LB}}$) 厳密解を出力; **EXIT**;
　　　　ELSE $f^{\mathrm{LB}} \leftarrow f$(実行可能解); $\hat{\beta} \leftarrow \beta$(実行可能解);
　　　　ENDIF
　　ENDIF
　　δとεを少し小さくして**Step2**へ;

6 計算機実験

凸2次計画問題は重要な問題として従来広く研究され，近年今野[8]により非凸な問題へ拡張されている。我々は変数分離可能な問題の例としてBretthauerとShetty[9]が解いた2次形式ナップザック問題を取り扱う。本実験ではBretthauerらの問題を複数制約条件および非凸へ拡張して、本手法を適用する。この問題は次のように定式化される。

$$\text{maximize} \quad -\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{2}d_n x_n^2 - a_n x_n) \tag{14}$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{n=1}^{N} b_{mn}x_n \leq b_m, \quad m = 1, 2, \ldots, M, \tag{15}$$

$$l_n \leq x_n \leq u_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{16}$$

$$x_n \quad \text{integer}, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{17}$$

ここで各係数を $d_n \in [-28, 28], a_n \in [30, 80], b_n \in [1, 13], n = 1, 2, \ldots, N$, 探索空間を$l_n$ *and* $u_n \in [4, 15], n = 1, 2, \ldots, N$とした。この問題は2次の係数に負の数を含むために非凸な問題である。この問題の計算機実験の結果を表1から表3に示す。ここで、斜体数字は本手法によって得られた解が厳密解であることを表す。これらの結果から、本手法は得られた解の品質を改善しており、多くの場合に厳密解を与えることがわかる。

7 まとめ

問題が変数分離型であれば凸性や微分可能性を持たないさまざまな問題に対して本手法を適用することができる。例えば探索空間が連続である計画問題は、探索空間を離散化することにより多次元非線形ナップザック問題へ変換することができる。その厳密解の近傍へ探索空間を縮小することによって解の精度を高めることができる。しかしながら、複数の制約条件を持つ組合せ問題に対する有効な解法は開発されていなかったが，本手法により従来厳密解を見つけることができなかった問題の厳密解を見つけることができた。問題の規模や制約許容量の厳しさによっては厳密解を見つけることは非常に困難であるが，それはメモリ量に依存する。今後メモリ量の増大と，効率的なメモリ管理によってかなり実用的な問題が解けるようになると期待される。

参考文献

[1] Nauss R. M., "The 0-1 knapsack problem with multiple choice constraints" European Journal of Operational Rsearch, Vol. 2, pp. 125-131, 1978.

[2] Sinha P. and Zoltoner A. A., "The multiple-choice knapsack problem" Operations Rsearch, Vol. 27, pp. 503-515, 1979.

[3] Dyer M. E., Kayal N. and Walker J., "A branch and bound alglithm for solving the multiple-choice knapsack problem" Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 11, pp. 231-249, 1984.

[4] 仲川勇二, "離散最適化問題のための新解法" 信学論A, Vol. J78-A, No. 8, pp. 550-556, 1990.

[5] 仲川勇二, 疋田光伯, 鎌田弘, “代理双対問題を解くためのアルゴリズム” 信学論 A, Vol. J67-A, No. 1, pp. 53-59, 1984.

[6] Dyer M. E., “Calculating surrogate constraints” Mathematical Programming, Vol. 19, pp. 255-278, 1980.

[7] 岩崎彰典, 太田垣博一, 仲川勇二, 宮下文彬, 成久洋之, “代理制約法の多次元非線形ナップザック問題への適用” 信学論 A, Vol. J78-A, No. 8, pp. 1065-1068, 1995.

[8] 今野浩, “大域的最適化法の現状” 情報処理, Vol. 36, pp. 1062-1069, 1995.

[9] Bretthauer K. and Shetty B., “The nonlinear resource allocation problem” Operations Research Computing, Vol. 43, pp. 670-683, 1995.

問題番号	近似解	MC 解	上界値
1	110930.0044	*120214.0595*	120220.4382
2	109750.8511	*112104.6001*	112120.4071
3	110689.1969	*116503.9397*	116546.9801
4	110891.5412	*119511.7303*	119548.3692

表 1: 2次形式ナップザック問題 (制約数 $M = 3$, 変数 $N = 100$) の目的関数値

問題番号	近似解	MC 解	上界値
1	110731.0702	*110920.5579*	110921.3236
2	120213.2847	*120214.0595*	120220.4382
3	106429.0437	*106460.8223*	106476.5869
4	111874.7812	*111876.7093*	111922.0094

表 2: 2次形式ナップザック問題 (制約数 $M = 5$, 変数 $N = 100$) の目的関数値

問題番号	近似解	MC 解	上界値
1	593707.7355	593783.2263	593941.2604
2	572361.1275	572361.3105	572373.9828
3	575484.9979	575541.8306	575620.5433
4	591836.5928	592278.0696	592346.096

表 3: 2次形式ナップザック問題 (制約数 $M = 5$, 変数 $N = 500$) の目的関数値