数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 82-88



# ランダム経路制御を考慮した待ち行列ネットワーク

徳島大学 (Tokushima University) 大橋　守 (Mamoru Ohashi)
黒崎楽器 (Kurossaki Gakki) 大村 泰宏 (Yasuhiro Omura)

## 1　はじめに

待ち行列ネットワークについて考える。客はある窓口からネットワークに入り、特定の窓口から出るまで、ネットワーク内の窓口を移動する。到着時またはサービス完了時に、客は経路制御方策に従い次の窓口に移動する。Tassiulas and Ephremides[2] は、待ち人数の少ない窓口に移動する経路制御方策が最適であることを示した。

本論では客が移動する窓口をネットワークの状態に依存して確率的に決めるランダム経路制御方策を考え、待ち行列ネットワークの安定性について調べる。ネットワークの安定条件は客の到着率と窓口のサービス率をパラメータに持つ不等式で与えられる。さらに、ネットワークが安定となるパラメータの集合を用いて方策に順序を導入し、最適ランダム経路制御方策を示す。

最後に、ネットワークの状態とは無関係に確率的な経路制御を行うジャクソンネットワークを考え、ランダム経路制御方策の安定条件との関係を調べる。

## 2　待ち行列ネットワーク

本論で取り扱う待ち行列ネットワークをモデル化し、ネットワークの安定性について考える。

### 2.1　待ち行列ネットワーク

待ち行列ネットワークの窓口は $W$ 個で、客のタイプを $C$ 種類とする。タイプ $c\ (c=1,2,\cdots,C)$ の客は到着率 $a_c$ の定常ポアソン過程に従ってネットワークに到着する。到着した客は図 1 のように窓口の部分集合 $S_c$ の窓口からネットワークに入り、特定の窓口 $D$ から出るまでネットワーク内の窓口を移動する。また、窓口 $w$ ではサービス率 $m_w$ の指数分布に従ってサービスを行い、サービスが完了した客は窓口の部分集合 $S_w$ の窓口 $i \in S_w$ に移動する。ただし、任意の窓口 $w$ から特定の窓口 $D$ に移動する経路は必ず存在し、窓口 $w$ は $FIFO$ 基準に従ってサービスを行うとする。

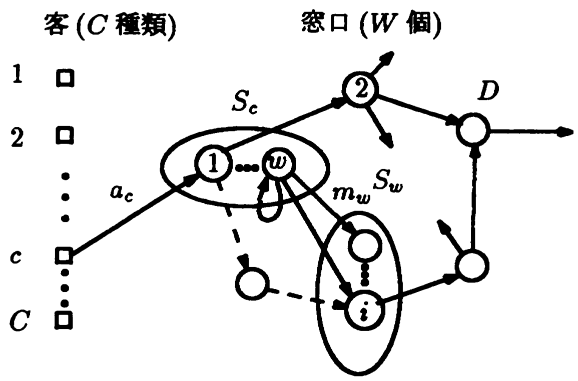


図 1: 待ち行列ネットワーク

このとき、客が次に移動する窓口を確率的に決めるランダム経路制御方策 $\pi$ を考える。このランダム経路制御方策 $\pi$ は各窓口の待ち人数に依存した経路決定確率で定義する。

### 2.2　安定

待ち行列ネットワークの状態はネットワーク内のそれぞれの窓口にいる客の人数 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_W)$ で表す。このとき、方策 $\pi$ のもとでネットワークの状態を表す確率過程を $\{\boldsymbol{X}_\pi(t):t\geq 0\}$ とし、状態空間を $\mathbf{X}\subset \mathbf{Z}^W$ で表す。

**定義 2.1** 方策 $\pi$ のもとで確率過程 $\{\boldsymbol{X}_\pi(t):t\geq 0\}$ が定常分布を持つとき、待ち行列ネットワークは安定であるという。

待ち行列ネットワークの到着率とサービス率をベクトル

$$a = (a_1, \cdots, a_C), \quad m = (m_1, \cdots, m_W)$$

で表す。また、実行可能なランダム経路制御方策 $\pi$ の集合を $\mathbf{H}$ とする。

方策 $\pi \in \mathbf{H}$ のもとで待ち行列ネットワークが安定となるパラメータ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})$ の集合を方策 $\pi$ の安定領域といい、$\mathbf{C}_\pi$ で表す。また、待ち行列ネットワークに対し

$$\mathbf{C} = \cup_{\pi \in \mathbf{H}} \mathbf{C}_\pi$$

をランダム経路制御方策の安定領域という。すなわち、パラメータ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})$ が $\mathbf{C}$ に属するとき、待ち行列ネットワークが安定となるランダム経路制御方策 $\pi \in \mathbf{H}$ が存在する。

**定義 2.2** 方策 $\pi_1$、$\pi_2 \in \mathbf{H}$ に対し

$$\mathbf{C}_{\pi_1} \supseteq \mathbf{C}_{\pi_2}$$

ならば、方策 $\pi_1$ は $\pi_2$ より優れているといい、$\pi_1 \succeq \pi_2$ と表す。

Tassiulas and Ephremides[2] は確定的な経路制御方策を考慮した待ち行列ネットワークに対して順序 $\succeq$ のもとで最適な経路制御方策が次の方策 $\pi_0$ であることを示した。この方策 $\pi_0$ は客の経路制御

$$R_w(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathrm{D}, & D \in S_w \\ \arg\min_{i \in S_w}(x_i), & \text{その他} \end{cases}$$

とサーバー制御

$$F_w(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0, & x_w \le \min_{i \in S_w}(x_i),\ D \notin S_w, \\ & \quad \text{または } x_w = 0 \\ m_w, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる。すなわち、経路制御 $R_w(\boldsymbol{x})$ で、窓口 $w$ の客は次に移動できる窓口 $S_w$ の中でもっとも待ち人数が少ない窓口 $i$ に移動する。ただし、窓口の部分集合 $S_w$ に特定の窓口 $D$ が含まれるとき、客は $D$ を通ってネットワークから出る。また、サーバー制御 $F_w(\boldsymbol{x})$ で、窓口の部分集合 $S_w$ でもっとも少ない待ち人数より窓口 $w$ の待ち人数が多いときのみサーバーの最大能力でサービスを行う。

方策 $\pi_0$ は待ち行列ネットワークの状態によって次に進む窓口が確定的に決定される。ネットワークの任意の窓口の集合 $S$ に対して、$C_s$ を集合 $S$ に到着する客の種類の集合、$Q_s$ を $S$ から出て行く可能性のある窓口の集合とすると、この方策 $\pi_0$ の安定領域 $\mathbf{C}_{\pi_0}$ は

$$\mathbf{C}_{\pi_0} = \{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m}) : \sum_{c \in C_s} a_c < \sum_{w \in Q_s} m_w\}$$

で与えられる。

# 3 ランダム経路制御方策

客が次に移動する窓口を確率的に決めるランダム経路制御方策とその安定性について調べ、ランダム経路制御方策 $\pi$ の安定領域 $C_\pi$ を求める。

## 3.1 ランダム経路制御方策

次のような実行可能なランダム経路制御方策 $\pi = \{p_w^c(\boldsymbol{x}), p_{wi}(\boldsymbol{x})\} \in \mathbf{H}$ を考える。

1. タイプ $c$ の客が状態 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ の待ち行列ネットワークに到着したとき、$S_c$ の窓口 $w$ からネットワークに入る確率を $p_w^c(\boldsymbol{x})$ とする。ただし、$p_w^c(\boldsymbol{x}) = 0$ $(w \notin S_c)$ とする。

2. 窓口 $w$ でサービスを完了した客が窓口の集合 $S_w$ の窓口 $i$ に移動する確率を $p_{wi}(\boldsymbol{x})$ とする。ただし、窓口 $w$ から移動しない確率を $p_{ww}(\boldsymbol{x})$、$p_{wi}(\boldsymbol{x}) = 0$ $(i \notin S_w \cup \{w\})$ とし、$S_w$ が特定の窓口 $D$ を含むとき、客はネットワークから出るとする。

3. 任意の窓口 $w$ から特定の窓口 $D$ に移動する経路が正の確率で存在する。

実行可能なランダム経路制御方策 $\pi = \{p_w^c(\boldsymbol{x}), p_{wi}(\boldsymbol{x})\}$ のもとで確率過程 $\{\boldsymbol{X}_\pi(t) : t \ge 0\}$ の推移率は

$$q_{xy} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}), & y_w = x_w + 1, \\ & y_i = x_i \quad (i \ne w), \\ & \\ m_w p_{wi}(\boldsymbol{x}), & y_w = x_w - 1,\ y_i = x_i + 1, \\ & y_j = x_j (j \ne i, w),\ x_w \ge 1 \end{cases}$$

と書ける。また、客の移動した時点に注目した離散時間のマルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Y}_\pi(t) : t = 0, 1, \cdots\}$ の推移確率は

$$P(\boldsymbol{Y}_\pi(t) = \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{Y}_\pi(t-1) = \boldsymbol{x}) = \frac{q_{xy}}{q_x}$$

となる。ただし、$q_x = \sum_{y \in \mathbf{X}, y \neq x} q_{xy}$ とする。

## 3.2 ネットワークの安定

ランダム経路制御方策のもとで、ネットワークの安定条件を客の到着率と窓口のサービス率のパラメータを含む不等式で表すことができる。初めに、方策 $\pi$ のもとでマルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Y}_\pi(t) : t = 0, 1, \cdots\}$ の状態空間 $\mathbf{X}$ を分類する。

**補題 3.1** 方策 $\pi \in \mathbf{H}$ のもとで部分空間 $\mathbf{R} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{X} : \boldsymbol{x}$ は状態0から推移できる状態$\}$ はマルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Y}_\pi(t) : t = 0, 1, \cdots\}$ の唯一の同値類である。また、差集合 $\mathbf{X} - \mathbf{R}$ は一時的である。

[証明] 方策 $\pi$ のもとで $u_w$ を窓口 $w$ から $D$ までの最小移動回数とする。このとき、$U(\boldsymbol{x})$ はネットワークのすべての客がネットワークから出るまでの最小サービス回数

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{w=1}^{W} u_w x_w$$

とする。また、客がいる窓口で $u_w$ が最小となる窓口を

$$d = \arg \min_{w : x_w > 0} (u_w)$$

とおく。このとき、ある状態 $\boldsymbol{x}$ で $U(\boldsymbol{x}) > 0$ なら、正の確率で

$$U(\boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{y}) = 1$$

となる $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ の変化が起こる。なぜならば

1. $u_d = 1$ のとき
   方策 $\pi$ により、客は $d$ から $D$ を通りネットワークの外に出るので、窓口 $d$ でサービスが完了すると

   $$y_d = x_d - 1 \quad , y_i = x_i \quad , i \neq d$$

   となる。よって、$U(\boldsymbol{x})$ の定義より

   $$U(\boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{y}) = 1$$

   を得る。
2. $u_d > 1$ のとき
   $u_d$ は

   $$u_d = 1 + \min_{i \in S_d} (u_i)$$

   と表わすことができる。$u_d$ と $d$ の定義より

   $$x_l = 0, \quad u_l = u_d - 1$$

   となるような $S_d$ の窓口 $l$ がある。よって、客が新たに到着せず、窓口 $d$ 以外の窓口でサービスが完了しないとき、窓口 $d$ でサービスが完了した客を窓口 $l$ に移動した状態を $\boldsymbol{y}$ とすると

   $$U(\boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{y}) = 1$$

   を得る。

したがって、状態 $\boldsymbol{x}$ は $U(\boldsymbol{y}) = 0$ の状態 $\boldsymbol{y}$ に正の確率で推移することができる。関数 $U(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ ならば $U(\boldsymbol{x}) > 0$ となるので $U(\boldsymbol{y}) = 0$ となる $\boldsymbol{y}$ は $\mathbf{0}$ に限る。よって、すべての状態 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ は正の確率で状態 $\mathbf{0}$ に移動することができる。部分空間 $\mathbf{R}$ は状態 $\boldsymbol{x}$ から $\mathbf{0}$ に推移することができる状態の集合であるから $\mathbf{R}$ はマルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Y}_\pi(t) : t = 0, 1, \cdots\}$ の同値類となる。また、$\mathbf{R}$ 以外の状態は正の確率で状態 $\mathbf{0}$ に移動できるから一時的となる。

**定理 3.1** 方策 $\pi \in \mathbf{H}$ のもとで到着率とサービス率のパラメータ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})$ が不等式

$$\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) - m_w < 0, \qquad 1 \leq w \leq W, \boldsymbol{x} \in \mathbf{R} \quad (1)$$

を満たすならば、待ち行列ネットワークは安定となる。

[証明] 状態空間 $\mathbf{X}$ 上の関数を

$$V(\boldsymbol{x}) = \sum_{w=1}^{W} (x_w)^2$$

とする。マルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Y}_\pi(t) : t = 0, 1, \cdots\}$ の推移確率 $q_{xy}/q_x$ が正のとき、すなわち、ネットワークに客の到着かサービスが完了したとき状態 $\boldsymbol{x}$ から状態 $\boldsymbol{y}$ に推移する。このとき、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の要素は高々2つ異なり、その要素の差は1であるから

$$V(\boldsymbol{y}) \leq 3V(\boldsymbol{x}) + W < \infty, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}V(\boldsymbol{y}) &\le \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}(3V(\boldsymbol{x})+W)\\ &= \frac{1}{q_{\boldsymbol{x}}}(3V(\boldsymbol{x})+W)\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X},\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} q_{\boldsymbol{xy}}\\ &= 3V(\boldsymbol{x})+W\end{aligned}$$

を得る。$V_b=\{\boldsymbol{x}:\boldsymbol{x}\in\mathbf{X},\ V(\boldsymbol{x})\le b\}$ によって定義される集合 $V_b$ はすべての $b$ に対して要素の数が有限となる。したがって、補題 3.1 とフォスターの定理 (Cohen[1]、$p59$ 参照) より任意の $\epsilon>0$ に対して

$$-\epsilon \ge \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}(V(\boldsymbol{y})-V(\boldsymbol{x})),\quad \boldsymbol{x}\notin V_b \tag{2}$$

ならばマルコフ連鎖 $\{\boldsymbol{Y}_\pi(t):t=0,1,\cdots\}$ は定常分布をもつ。よって、(1) よりこのフォスターの基準を満たすことを示せば待ち行列ネットワークは安定となる。フォスターの基準は任意の $\boldsymbol{x}\notin V_b$ に対して

$$\begin{aligned}&\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}(V(\boldsymbol{y})-V(\boldsymbol{x}))\\ &= \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\Big(\sum_{w=1}^{W}(y_w)^2-\sum_{w=1}^{W}(x_w)^2\Big)\\ &= \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}[2x_w(y_w-x_w)\\ &\quad +(y_w-x_w)^2]\\ &= \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}2x_w(y_w-x_w)\\ &\quad + \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}(y_w-x_w)^2 \end{aligned}\tag{3}$$

と書ける。$q_{\boldsymbol{xy}}>0$ のとき図 2 のように状態 $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ への推移は客の到着かサービスが完了したときで、各要素 $x_w,\ w=1,2,\cdots,W$ の差は高々1 である。よって、(3) の第 2 項は

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}(y_w-x_w)^2\le 2 \tag{4}$$

となる。(3) の第 1 項は

$$\begin{aligned}&\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}2x_w(y_w-x_w)\end{aligned}$$

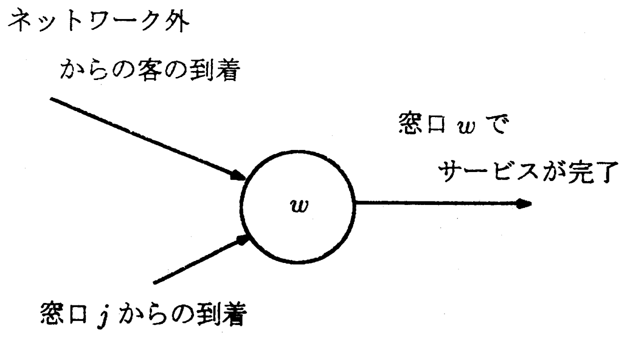


図 2: 窓口 $w$ の状態変化

$$\begin{aligned}&= \frac{2}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} q_{\boldsymbol{xy}}x_w(y_w-x_w)\\ &= \frac{2}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}x_w\Big(\sum_{c=1}^{C}a_c p_w^c(\boldsymbol{x})-m_w\\ &\quad +\sum_{j=1}^{W}m_j p_{jw}(\boldsymbol{x})\Big)\end{aligned}$$

となる。ここで、$k$ を

$$k=\max_w\Big\{\sum_{c=1}^{C}a_c p_w^c(\boldsymbol{x})+\sum_{j=1}^{W}m_j p_{jw}(\boldsymbol{x})-m_w\Big\}$$

とおくと、(1) より $k$ は負となる。よって

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}2x_w(y_w-x_w)\le\frac{2}{q_{\boldsymbol{x}}}kx_M$$

となる。ただし $x_M=\sum_{w=1}^{W}x_w$ とする。$\boldsymbol{x}\notin V_b$ のとき $V(\boldsymbol{x})>b$ であるから

$$x_M>\sqrt{b}$$

となる。また、$k<0$ より

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}\sum_{w=1}^{W}2x_w(y_w-x_w)<\frac{2}{d}k\sqrt{b} \tag{5}$$

ただし、$d$ は $d=\sup_{\boldsymbol{x}\notin V_b}q_{\boldsymbol{x}}>0$ とする。(4) と (5) より (3) は

$$\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}(V(\boldsymbol{y})-V(\boldsymbol{x}))\le 2+\frac{2}{d}k\sqrt{b}$$

と書ける。ゆえに、十分大きい $b$ を選ぶことによって

$$-\epsilon\ge\sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbf{X}:\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}} \frac{q_{\boldsymbol{xy}}}{q_{\boldsymbol{x}}}(V(\boldsymbol{y})-V(\boldsymbol{x})),\quad \boldsymbol{x}\notin V_b$$

を得る。

**定理 3.2** 方策 $\pi \in \mathbf{H}$ のもとで待ち行列ネットワークが安定ならば、到着率とサービス率のパラメータ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})$ が不等式 *(1)* を満たす。

[証明] ネットワークの任意の窓口を $w$ とする。$r_a^w(\boldsymbol{x}, \pi)$ を窓口 $w$ への到着率、$r_d^w(\boldsymbol{x}, \pi)$ を窓口 $w$ の出発率とする。また、それぞれの平均を $r_a^w$、$r_d^w$ とする。ランダム経路制御方策 $\pi$ のもとで窓口 $w$ への到着は外部からの到着と他の窓口でサービスが完了したときに限られるから

$$\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) = r_a^w(\boldsymbol{x}, \pi)$$

となる。同様に窓口 $w$ の出発率はサービス率 $m_w$ 以下であるから

$$r_d^w(\boldsymbol{x}, \pi) \leq m_w$$

となる。仮定よりネットワークは安定であるから方策 $\pi$ に対し、唯一の定常分布 $\{p_x^\pi,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}\}$ が存在し

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \mathbf{X}} p_x^\pi \{\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) \quad &+ \quad \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x})\} \\ &= \quad \sum_{x \in \mathbf{X}} p_x^\pi r_a^w(\boldsymbol{x}, \pi) \\ &= \quad r_a^w\end{aligned}$$

$$r_d^w = \sum_{x \in X} p_x^\pi r_d^w(\boldsymbol{x}, \pi) \leq \sum_{x \in X} p_x^\pi m_w = m_w$$

と書ける。また、安定であるから平均到着率と平均出発率は等しいから

$$r_a^w = r_d^w$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\sum_{x \in \mathbf{X}} p_x^\pi \{\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) \quad &+ \quad \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x})\} \\ &= \quad \sum_{x \in \mathbf{X}} p_x^\pi r_d^w(\boldsymbol{x}, \pi) \\ &\leq \quad m_w\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、等号が成り立つのは定常分布の $p_x^\pi$ が正である $\boldsymbol{x} \in \mathbf{X}$ に対して

$$r_d^w(\boldsymbol{x}, \pi) = m_w$$

でなければばならない。$\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき、補題 3.1 より $p_0^\pi > 0$ となるが、すべての窓口に客はいないので窓口 $w$ の出発率は

$$r_d^w(\boldsymbol{x}, \pi) = 0$$

となり

$$r_d^w(\boldsymbol{x}, \pi) = m_w$$

に矛盾する。よって、定理は証明された。

**注 3.1** 定理 *3.1* と定理 *3.2* で方策 $\pi$ のもとでの待ち行列ネットワークが安定となる必要十分条件を得た。これより方策 $\pi \in \mathbf{H}$ の安定領域は

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_\pi = \{((\boldsymbol{a}, \boldsymbol{m})) : &\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) \\ &+ \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) - m_w < 0, \\ &\qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R},\ w = 1, 2, \cdots, W\}\end{aligned}$$

となる。

次に、ランダム経路制御方策 $\pi$ と確定的経路制御方策 $\pi_0$ の順序関係を調べ、最適経路制御方策を示す。

**系 3.1** 任意の方策 $\pi \in \mathbf{H}$ に対して $\pi_0 \succeq \pi$ となる。

[証明] ランダム経路制御方策 $\pi$ のもとで待ち行列ネットワークの安定条件は

$$\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) - m_w < 0$$

である。今、窓口 $w$ をネットワークの状態 $x_w$ の値により昇順に並び換え、同じ $w$ で表し、適当な $l$ に対して $S = \{w :\ w \geq l\}$ とおく。このとき、確定的経路制御方策 $\pi_0$ を用いると

$$\begin{aligned}0 > \sum_{w \in S} \sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) \quad &+ \quad \sum_{w \in S} \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) \\ &- \quad \sum_{w \in S} m_w\end{aligned}$$

となる。客は待ち人数の少ない窓口に向かうので右辺の第 2 項は

$$\sum_{w \in S} \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x})$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{w\in S}\sum_{j=1}^{w} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) + \sum_{w\in S}\sum_{j=w+1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) \\
&= \sum_{w\in S}\sum_{j=w+1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

と書ける。よって

$$
\begin{aligned}
0 &> \sum_{w\in S}\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c(\boldsymbol{x}) + \sum_{w\in S}\sum_{j=w+1}^{W} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad - \sum_{w\in S} m_w \\
&= \sum_{c\in C_S} a_c + \sum_{w\in S}\sum_{j\in S:S_j\subset S} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) \\
&\quad + \sum_{w\in S}\sum_{j\in Q_S} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) - \sum_{w\in S} m_w \\
&= \sum_{c\in C_S} a_c + \sum_{j\in S:S_j\subset S} m_j \\
&\quad + \sum_{w\in S}\sum_{j\in Q_S} m_j p_{jw}(\boldsymbol{x}) - \sum_{w\in S} m_w \\
&\geq \sum_{c\in C_S} a_c - \sum_{w\in Q_S} m_w
\end{aligned}
$$

となり確定的経路制御方策 $\pi_0$ の安定条件が成立する。状態 $\boldsymbol{x}_w$ の値による窓口 $w$ の並び換えを行ったが状態 $\boldsymbol{x}$ が任意であることから

$$
\mathbf{C}_{\pi_0} \supseteq \mathbf{C}_\pi
$$

となり、$\pi_0 \succeq \pi$ を得る。

**注 3.2** 系 *3.1* より方策 $\pi_0$ はランダム経路制御方策 $\pi$ より優れた方策といえる。よって、どんなランダム経路制御方策を用いても、一番待ち人数の少ないところに確定的に客を移動する方策が順序 $\succeq$ のもとで最適な経路制御方策となる。

## 4 ジャクソンネットワーク

前節でランダム経路制御を行う方策 $\pi$ の安定条件を求めた。ここではネットワークの状態と無関係に移動する窓口を確率的に決めるジャクソンネットワークの安定条件とランダム経路制御方策との関係を調べる。

**補題 4.1** ジャクソンネットワークのランダム経路制御方策のもとで、次の方程式

$$
z_w = \sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c + \sum_{j=1}^{W} z_j p_{jw}, \quad 1 \leq w \leq W \qquad (6)
$$

を満たす $z_w < m_w$ が存在するとき、ジャクソンネットワークは安定となる。

待ち行列ネットワークが安定ならば定常確率 $\{p_x^\pi,\ \boldsymbol{x} \in \mathbf{X}\}$ が存在する。今

$$
\begin{aligned}
p_w^c &= \sum_{x\in\mathbf{X}} p_w^c(\boldsymbol{x}) p_x^\pi \\
p_{wi} &= \sum_{x\in\mathbf{X}} p_{wi}(\boldsymbol{x}) p_x^\pi
\end{aligned}
$$

とおくとランダム経路制御方策 $\pi$ の安定条件 (1) は

$$
\sum_{c=1}^{C} a_c p_w^c + \sum_{j=1}^{W} m_j p_{jw} - m_w < 0 \qquad (7)
$$

と書ける。簡単のために (6)、(7) を行列を用いて

$$
\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1W} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2W} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{W1} & p_{W2} & \cdots & p_{WW} \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \sum_c a_c p_1^c \\ \sum_c a_c p_2^c \\ \cdots \\ \sum_c a_c p_W^c \end{pmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_W \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdots \\ m_W \end{pmatrix}
$$

とおくと、(6)、(7) はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{P}^t \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z} \quad (\boldsymbol{z} < \boldsymbol{m}) \qquad (8) \\
\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{P}^t \boldsymbol{m} &< \boldsymbol{m} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

と書き換えることができる。

**定理 4.1** *(9)* が成り立つならば *(8)* を満たす $\boldsymbol{z} < \boldsymbol{m}$ が存在する。

[証明] 数列 $\{\boldsymbol{\alpha}_n\}$ を

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}_1 &= \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{P}^t \boldsymbol{m} \\
\boldsymbol{\alpha}_{n+1} &= \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{P}^t \boldsymbol{\alpha}_n, \quad n = 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

とおく。(9) より $\alpha_1 < m$ となり、$P$ が非負行列であるから

$$\alpha_2 = \gamma + P^t\alpha_1 \le \gamma + P^t m = \alpha_1$$

を得る。同様にして

$$\alpha_{n+1} \le \alpha_n$$

となり $\alpha_n$ は単調減少列で $m > \alpha_n \ge \gamma$ となる。よって、$\{\alpha_n\}$ の極限が存在し、極限値を

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = z$$

とおく。したがって

$$\gamma + P^t z = z$$

となる $z < m$ が存在する。

**定理 4.2** ジャクソンネットワークの安定条件 *(8)* を満たす $z$ が存在するならば *(9)* が成り立つ。

[証明] 次の線形計画問題を考える。

- 主問題
  目的関数
  $$0 \cdot x_1 + (m - z) \cdot x_2 \to \text{最小化}$$
  制約条件
  $$\begin{pmatrix} P - \lambda E & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \ge \gamma$$
  ただし、$x_1, x_2 \ge 0$、$\lambda$ は $P$ の最大固有値とする。

- 双対問題
  目的関数
  $$\gamma \cdot y \to \text{最大化}$$
  制約条件
  $$\begin{pmatrix} P^t - \lambda E \\ E \end{pmatrix} y \le \begin{pmatrix} 0 \\ m - z \end{pmatrix}$$

ただし、$y \ge 0$ とする。

ここで、$P$ が非負行列であるから $x_1$ を $\lambda$ の固有ベクトル、$x_2 = \gamma$ とすると主問題の最適解となり、最適値が $(m - z) \cdot \gamma$ となる。よって、双対定理より双対問題も実行可能解 $y$ が存在する。双対問題の制約条件は

$$\begin{aligned} P^t y - \lambda y &\le 0 \\ y &\le m - z \end{aligned}$$

と書ける。最大固有値 $\lambda$ は確率行列の性質 (岩堀 [3]、$p$95 参照) より $\lambda < 1$ であるから

$$P^t y \le \lambda y < y$$

と書ける。したがって、(8) より

$$\begin{aligned} \gamma + P^t(y + z) &= \gamma + P^t y + P^t z \\ &= P^t y + z \\ &\le y + z \end{aligned}$$

を得る。また、双対定理より双対問題の最適解が $y = m - z$ となる。よって

$$\gamma + P^t m < m$$

を得る。

## 5 おわりに

本論で、ランダム経路制御方策 $\pi \in \mathbf{H}$ のもとでネットワークの安定条件を客の到着率と窓口のサービス率のパラメータを含む不等式で表し、方策 $\pi$ の安定領域 $\mathbf{C}_\pi$ を示した。方策 $\pi$ の安定条件を満たすパラメータは方策 $\pi_0$ の安定条件を満たし、確定的経路制御を行う方策 $\pi_0$ が最適経路制御方策となる。また、方策 $\pi$ の安定条件からジャクソンネットワークの安定条件が得られる。

## 参考文献


[1] Cohen,J.W. (1982) *The Single Server Queue.* North Holland,Amsterdam. *J. Appl. Prob.* **21**. 379-393.

[2] Tassiulas,L. and Ephremides,A. (1996) Throughput properties of a queueing network with distributed dynamic routing and flow control. *Adv. Appl. Prob.* **28**, 285-307.

[3] 岩堀 信子 (1976) グラフと確率行列, 産業図書.