数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 139-146

インパルス制御アプローチによる企業の最適配当政策
(An Optimal Dividend Policy of a Firm via an Impulse Control Approach)

大西 匡光
(OHNISHI Masamitsu)
大阪大学 大学院経済学研究科
(Graduate School of Economics, Osaka Univ.)

辻村 元男
(TSUJIMURA Motoh)
大阪大学 大学院経済学研究科
(Graduate School of Economics, Osaka Univ.)

1 モデル

モデル 1.1.

- 1 次元の**ブラウン運動フィルトレーション**付きの確率空間を準備する:

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; (\mathcal{F}(t); t \in \mathbb{R}_+)).$$

- **企業価値** (firm value) (= [**資産**の市場価値] − [**負債**の市場価値]) を表す確率過程

$$(X^x(t); t \in \mathbb{R}_+) \tag{1.1}$$

は, **株主**への配当払いが無い場合, **ドリフト付きのブラウン運動**, すなわち, 次の確率微分方程式 (SDE) に従う:

$$\begin{aligned} X^x(0) &= x \in \mathbb{R}_+; & (1.2)\\ \mathrm{d}X^x(t) &= \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \quad 0 \le t \le T^x; & (1.3)\\ X^x(t) &= 0, \quad T^x < t, & (1.4) \end{aligned}$$

ただし,

x ($\in \mathbb{R}_+$): 初期の企業価値;
μ ($\in \mathbb{R}$): **ドリフト係数**;
σ ($\in \mathbb{R}_{++}$): **拡散係数**;
$(W(t); t \in \mathbb{R}_+)$: 1 次元 $(\mathcal{F}(t))$–**標準ブラウン運動**;
$T^x := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X^x(t) \in \mathbb{R}_-\}$ は企業の**倒産時刻** ($\mathbb{R}_- := (-\infty, 0]$).

- **企業の経営主体**は, (その倒産までの) 任意の時点 (**配当払いの時刻**)

$$\tau_i, \quad i = 1, 2, \cdots \tag{1.5}$$

において, その時の企業価値 $X^{x,\delta}(\tau_i -)$ ($\in \mathbb{R}_+$) の一部, あるいは全部

$$\Delta X_i \in [0, X^{x,\delta}(\tau_i -)] \tag{1.6}$$

を, **配当**として, 株主に支払うことができる.

- 配当支払い直後, 企業価値はその分だけ減少する:

$$X^{x,\delta}(\tau_i) = X^{x,\delta}(\tau_i-) - \Delta X_i, \quad i = 1, 2, \cdots . \tag{1.7}$$

- 引き続く配当払いの間では, 企業価値は次の確率微分方程式 (SDE) に従う:

$$\mathrm{d}X^{x,\delta}(t) = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \quad \tau_i \le t < \tau_{i+1};\ i = 1, 2, \cdots . \tag{1.8}$$

-

$$T^{x,\delta} := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X^{x,\delta}(t) \in \mathbb{R}_-\} \tag{1.9}$$

  を企業の**倒産時刻**とする.

- **配当政策** δ とは, 配当支払いのタイミングとその支払額の組の列

$$\delta := ((\tau_i, \Delta X_i);\ i = 1, 2, \cdots) \tag{1.10}$$

  で定義される.

- 株主の受け取る配当 ΔX_i には**税金・取引き費用**が科せられ, その結果, 税引き後の収入は

$$K(\Delta X_i) := k\Delta X_i - c, \quad i = 1, 2, \cdots , \tag{1.11}$$

  ただし,
  $K : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$;
  $1 - k$ $(\in [0, 1])$: 税金・取引き費用の**比例部分**の係数;
  c $(\in \mathbb{R}_{++})$: 税金・取引き費用の**固定部分**.

- 株主の得る (税引き後の) **配当流の期待総割引き価値**は

$$v^{\delta}(x) := \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-r\tau_i} K(\Delta X_i) 1_{\{\tau_i < +\infty\}}\right], \tag{1.12}$$

  ただし,
  r $(\in \mathbb{R}_{++})$: 株主が設定する**割引き率**.

- 企業 (の経営者) は, 株主の得る (税引き後の) 配当流の期待総割引き価値 $v^{\delta}(x)$ を最大化するような配当政策 δ を追求する. □

注 1.1. 関数 K は**優加法性**を満たす, すなわち,

$$K(\Delta x + \Delta y) > K(\Delta x) + K(\Delta y), \quad \forall(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}_+^2 \tag{1.13}$$

が成立する. □

仮定 1.1 (A1).

$$\mu > r. \tag{1.14}$$

定義 1.1 (許容配当政策). 配当政策 $\delta = ((\tau_i, \Delta X_i);\ i = 1, 2, \cdots)$ が許容的であるとは:

(1)

$$0 \le \tau_i < \tau_{i+1}, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, \quad \mathbb{P}\text{–a.s.}; \tag{1.15}$$

(2) τ_i, $i = 1, 2, \cdots$ は $(\mathcal{F}(t))$–停止時刻;

(3) ΔX_i, $i = 1, 2, \cdots$ は $\mathcal{F}(\tau_i)$–可測;

(4)

$$\mathbb{P}\left(\lim_{i \to +\infty} \tau_i \le t\right) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.16}$$

許容配当政策の全体を Δ で表す. □

配当政策 $\delta = ((\tau_i, \Delta X_i);\ i = 1, 2, \cdots)$ のもとで, 企業価値の確率過程 $\mathcal{X}^{x,\delta} = (X^{x,\delta}(t); t \in \mathbb{R}_+)$ は, 次の確率微分方程式 (SDE) に従う:

$$\begin{aligned} X^{x,\delta}(0) &= x \in \mathbb{R}_+; && (1.17) \\ \mathrm{d}X^{x,\delta}(t) &= \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t) - \mathrm{d}Z^{x,\delta}(t), \quad 0 \le t \le T^{x,\delta}; && (1.18) \\ X^{x,\delta}(t) &= 0, \quad T^{x,\delta} < t, && (1.19) \end{aligned}$$

ただし,

$$T^{x,\delta} := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : X^{x,\delta}(t) \in \mathbb{R}_-\} \tag{1.20}$$

は企業の**倒産時刻**,

$$Z^{x,\delta}(t) := \sum_{i=1}^{+\infty} \Delta X_i 1_{\{\tau_i \le t\}}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.21}$$

は時刻 t までの**累積配当額**を表す (確率過程).

2 準変分不等式

最適値関数を

$$v(x) := \sup_{\delta \in \Delta} v^\delta(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \tag{2.1}$$

と定義する.

微分作用素 L を, 次式で (定義できる場合に) 定義する: (C^2 級の関数) $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ に対して,

$$[Lu](x) := \lim_{t \downarrow 0+} \frac{\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-rt} u(X^x(t))\right] - u(x)}{t} = \frac{1}{2}\sigma^2 u''(x) + \mu u'(x) - ru(x). \tag{2.2}$$

また, 関数 $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ に対して, 以下の通り, 2 種の**作用素**を (定義できる場合に) 定義する:

$$\begin{aligned} [Mu](x) &:= \sup_{\Delta x \in [0,x]} \{k\Delta x - c + u(x - \Delta x)\}, \quad x \in \mathbb{R}_+; && (2.3) \\ [Nu](x) &:= \sup_{\tau \in \Xi} \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-r\tau}[Mu](X^x(\tau-))\right], \quad x \in \mathbb{R}_+, && (2.4) \end{aligned}$$

ただし, Ξ は $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ 値 $(\mathcal{F}(t))$–停止時刻の全体からなる集合である.

(1) 作用素 M は現在配当払いを行うとしたときの最適な配当額を定めることに対応している.
(2) 作用素 N は次に配当払いを行うべき最適なタイミングをを定めることに対応している.

定義 2.1 (準変分不等式 (Quasi–Variational Inequality: QVI)). 関数 $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ に対する, 以下の 3 条件の組を最適配当問題に対する**準変分不等式** (Quasi–Variational Inequality: QVI) と言う:

(C1)

$$u(x) \geq [Mu](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{2.5}$$

(C2)

$$[Lu](x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{2.6}$$

(C3) **(相補性条件)** すべての $x \in \mathbb{R}_+$ に対して, 不等式 (2.5) と (2.6) とのいずれか一方は等式で成立する, すなわち,

$$\{u(x) - [Mu](x)\}\{[Lu](x)\} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{2.7}$$

□

上記の相補性条件 (C3) は

$$[Lu](x) = 0, \quad \forall x \in H_u := \{x \in \mathbb{R}_+; u(x) > [Mu](x)\} \tag{2.8}$$

と書き直すこともできる.

定義 2.2 (QVI–制御). 関数 $u^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ を QVI (C1), (C2), (C3) に対する解とする. このとき, 以下で規定される許容配当政策 $\delta^* \in \Delta$ (が存在するとき, それ) を **QVI–制御** と言う:

(D1)

$$\tau_i \ = \ \inf\left\{t > \tau_{i-1} : u^*(X^{x,\delta^*}(t-)) = [Mu^*](X^{x,\delta^*}(t-))\right\}, \quad i \in \mathbb{Z}_{++} := \{1, 2, \cdots\};$$

(D2)

$$\Delta X_i = \mathop{\arg\max}_{\Delta x \in [0, X^{x,\delta^*}(\tau_i-)]} \left\{k\Delta x - c + u^*(X^{x,\delta^*}(\tau_i-) - \Delta x)\right\}, \quad i \in \mathbb{Z}_{++}. \tag{2.9}$$

□

定義 2.3.

(1) 許容配当政策 $\delta \in \Delta$ に対応する企業価値過程 $\mathcal{X}^{x,\delta} = (X^{x,\delta}(t); t \in \mathbb{R}_+)$ に対して,

$$G(B; x, \delta) := \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} X_t^{x,v} 1_B \mathrm{d}t\right], \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), x \in \mathbb{R}_+ \tag{2.10}$$

で定義される可測空間 $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ 上の測度を **Green 測度**, あるいは**期待総占有測度**と言う, ただし, 1_B は Borel 集合 B $(\in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ の定義関数.

(2) 連続関数 $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ が, $\mathcal{X}^{x,\delta}$ に関して, 確率的に (stochastically) $\mathbb{C}^2$ であるとは, $[Lu](y)$ が, Green 測度 $G(\cdot; x, \delta)$ のもとでの, ほとんどすべての点 $y \in \mathbb{R}_+$ において, きちんと定義される (well–defined) 場合を言う. □

定理 2.1. 連続関数 $u^*:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ を QVI (C1), (C2), (C3) に対する解とし, 以下の正規条件を満たすものとする: 任意の初期状態 $x\in\mathbb{R}_+$ と任意の許容配当政策 $\delta\in\Delta$ に対する企業価値過程 $\mathcal{X}^{x,\delta}=(X^{x,\delta}(t);t\in\mathbb{R}_+)$ に対して,

(1) u^* は, $\mathcal{X}^{x,\delta}$ に関して, 確率的に $\mathbb{C}^2$;
(2)

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-rt}u^*(X^{x,\delta}(t))=0,\quad \mathbb{P}\text{–a.s.};\tag{2.11}$$

(3) 確率変数の族 $\{u^*(X^{x,\delta}_{\tau_i}):i\in\mathbb{Z}_{++}\}$ は, 確率測度 $\mathbb{P}$ に関して, 一様可積分 (uniformly integrable).

このとき,

$$v(x):=\sup_{\delta\in\Delta}v^\delta(x)\le u^*(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}_+\tag{2.12}$$

が成り立つ. さらに, 関数 u^* によって規定される QVI–制御 $\delta^*\in\Delta$ のもとで,

$$v^{\delta^*}(x)=u^*(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}_+\tag{2.13}$$

が成り立つ. したがって, QVI–制御 δ^* は最適な配当政策であり, u^* は最適値関数 v に一致する:

$$v^{\delta^*}(x)=u^*(x)=v(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}_+.\tag{2.14}$$

□

3 スムース・ペースティング法

一般に, QVI (C1), (C2), (C3) は, 解析的に, あるいは数値的にさえも解くことは困難であるため, 問題の構造を利用することで, (ほぼ) 明示的な解を求めることのできる条件を明らかにすることには意味がある. この際に有効な原理・手法が**スムース・ペースティング法** (smooth pasting technique) である.

最適な配当政策 $\delta^*\in\Delta$ は, 適当な仮定・条件のもとで, **2 個のパラメータ**

$$(\beta,b)\quad (0<\beta<b<+\infty)\tag{3.1}$$

を用いた, 以下のような配当払い規則で記述できることが**予想される**:

(1) 企業価値が区間 $[0,b)$ 内にある限り, 配当払いを行わない;
(2) 企業価値が $[b,+\infty)$ 内の値, 例えば x $(\in[b,+\infty))$ にあれば, 即座に $x-\beta$ $(\ge b-\beta>0)$ だけの配当を払い, 企業価値を β へ移動させる.

上述のタイプの配当政策の最適性を予想すれば, 最適値関数 $v:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は以下の条件を満たすものと**予想される**:

(E1) 区間 $[0,b)$ において, v は次の 2 階の常微分方程式を満たす:

$$([Lv](x)=)\ \ \frac{1}{2}\sigma^2v''(x)+\mu v'(x)-rv(x)=0,\quad x\in[0,b);\tag{3.2}$$

(E2) **(Value Matching Conditions)**: v の連続性から,

$$v(b)=k(b-\beta)-c+v(\beta);\tag{3.3}$$

(E3) $x=b$ において, $y=\beta$ は最適な移動先である ((2) の式 (3.3) の右辺は β について最適化されている, すなわち,

$$v(b)=k(b-\beta)-c+v(\beta)=\max_{y\in[0,b]}\{k(b-y)-c+v(y)\}, \tag{3.4}$$

したがって):

$$v'(\beta)=k; \tag{3.5}$$

(E4) **(Smooth Pasting Conditions)**: v' の連続性から,

$$v'(b)=\lim_{x\downarrow b+}v'(x)=\lim_{x\downarrow b+}\frac{d}{dx}\{k(x-\beta)-c+v(\beta)\}=k. \tag{3.6}$$

常微分方程式:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 v''(x)+\mu v'(x)-rv(x)=0, \quad x\in[0,b) \tag{3.7}$$

の一般解は

$$v(x)=a_+\mathrm{e}^{\lambda_+ x}+a_-\mathrm{e}^{\lambda_- x}, \quad x\in[0,b), \tag{3.8}$$

ただし, a_+ と a_- は決定すべき定数であり, λ_+ と λ_- は特性方程式:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2+\mu\lambda-r=0, \quad \lambda\in\mathbb{R}. \tag{3.9}$$

の符号の異なる 2 実根である:

$$\lambda_\pm=\frac{-\mu\pm\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}}{\sigma^2}. \tag{3.10}$$

企業価値が 0 のとき,

$$v(0)=0 \tag{3.11}$$

となることを要求すれば,

$$a_+ + a_- = 0 \tag{3.12}$$

となり, したがって常微分方程式 (3.7) の一般解は, 整理すれば,

$$u(x;a) := a\mathrm{e}^{-\alpha x}\left(\frac{\mathrm{e}^{\gamma x}-\mathrm{e}^{-\gamma x}}{2}\right) \tag{3.13}$$

$$= a\mathrm{e}^{-\alpha x}\sinh(\gamma x), \quad x\in[0,b), \tag{3.14}$$

ただし,

$$a:=2a_+; \quad \alpha:=\frac{\mu}{\sigma^2}; \quad \gamma:=\frac{\sqrt{\mu^2+2\sigma^2 r}}{\sigma^2} \tag{3.15}$$

とおいた. a は決定すべき正の定数である.

2 個のパラメータ β, b に加え, 2 階の常微分方程式 (3.2) の解は **1 個の未知定数** a を含むので, 合計 **3 個の定数**を決定する必要があるが, それらは式 (3.3), (3.5), (3.6) の **3 個の条件**により, (典型的には) 決定されるであろう.

定理 3.1. 仮定 (A1) のもとで, 以下の 3 条件 (E2), (E3), (E4) を満たす 3 定数 β, b $(0 < \beta < b < +\infty)$, a $(\in \mathbb{R}_{++})$ が一意的に存在する.

(E2) **(Value Matching Conditions)**:

$$u(b; a) = k(b - \beta) - c + u(\beta; a); \tag{3.16}$$

(E3)

$$u'(\beta; a) = k; \tag{3.17}$$

(E4) **(Smooth Pasting Conditions)**:

$$u'(b; a) = k. \tag{3.18}$$

□

以下では (A1) を仮定する. 定理 3.1 から, 一意的な存在が保証される 3 定数 β, b $(0 < \beta < b < +\infty)$, a $(\in \mathbb{R}_{++})$ を用いて, 最適値関数を次のように**予想する**:

$$u^*(x) := \begin{cases} u(x; a) = a\mathrm{e}^{-\alpha x}\sinh(\gamma x), & x \in [0, b); \\ k(x - \beta) - c + u(\beta; a), & x \in [b, +\infty). \end{cases} \tag{3.19}$$

仮定 3.1 (A2).

$$\mathrm{e}^{2\gamma b} > \frac{r + \mu(1 + \alpha)}{r - \mu(1 - \alpha)}. \tag{3.20}$$

□

定理 3.2. 仮定 (A1), (A2) のもとで, (3.19) で定義される関数 $u^* : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ は, 以下の QVI (C1), (C2), (C3) を満たす.

(C1)

$$u^*(x) \geq [Mu^*](x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{3.21}$$

(C2)

$$[Lu^*](x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+; \tag{3.22}$$

(C3) **(相補性条件)**

$$[Lu^*](x) = 0, \quad \forall x \in [0, b); \tag{3.23}$$

$$u^*(x) = [Mu^*](x), \quad \forall x \in [b, +\infty). \tag{3.24}$$

したがって, 関数 u^* によって規定される以下の QVI–制御 δ^* は最適な配当政策であり, u^* は最適値関数 v に一致する:

(D1)

$$\begin{aligned} \tau_i &= \inf\left\{t > \tau_{i-1} : u^*(X^{x,\delta^*}(t-)) = [Mu^*](X^{x,\delta^*}(t-))\right\} \\ &= \inf\left\{t > \tau_{i-1} : X^{x,\delta^*}(t-) \in [b, +\infty)\right\}, \quad i \in \mathbb{Z}_{++}; \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\Delta X_i = \underset{\Delta x \in [0, X^{x,\delta^*}(\tau_i-)]}{\arg\max} \left\{ k\Delta x - c + u^*(X^{x,\delta^*}(\tau_i-) - \Delta x) \right\},$$
$$= X^{x,\delta^*}(\tau_i-) - \beta, \quad i \in \mathbb{Z}_{++}. \tag{3.26}$$

□

最適配当政策は以下の通り: ある企業価値の閾値の組

$$(\beta, b) \quad (0 < \beta < b < +\infty) \tag{3.27}$$

があって, 企業価値が b に達したとき, 株主に $b - \beta$ の配当を支払う.

参考文献

[1] Asmussen, S. and M. Taskar, 1997. "Controlled Diffusion Models for Optimal Dividend Pay–Out," *Insurance: Mathematics and Economics*, 20, pp. 1–15.

[2] Bensoussan, J. L. and J. L. Lions, 1984. *Impulse Control and Quasi–Variational Inequalities*, Gauthier–Villars, Paris.

[3] Brekke, K. A., and B. Øksendal, 1998. "A Verification Theorem for Combined Stochastic Control and Impulse Control," in Decreasefond, L. et al. (eds.): *Stochastic Analysis and Related Topics*, 6, Bikhäuse, Basel., pp. 211–220.

[4] Cadenillas, A., 2000. "Consumption–Investment Problem with Transaction Costs: Survey and Open Problems," *Mathematical Methods of Operations Research*, 51, pp. 43–68.

[5] Davis, M. H. A. and A. Norman, 1990. "Portfolio Selection with Transaction Costs," *Mathematics of Operations Research*, 15, pp. 676–713.

[6] Eastham, J. F. and K. J. Hastings, 1988. "Optimal Impulse Control of Portfolios," *Mathematics of Operations Research*, 13, pp. 657–673.

[7] Harrison, J. M., 1985. *Brownian Motion and Stochastic Flow Systems*, John Wiley & Sons, New York.

[8] Jeanblanc–Picqué, M. and A. N. Shiryaev, 1995. "Optimization of the Flow of Dividends," *Russian Mathematical Surveys*, 50, pp. 257–277.

[9] Korn, R., 1999. "Some Applications of Impulse Control in Mathematical Finance," *Mathematical Methods of Operations Research*, 50, pp. 493–518.

[10] Øksendal, B., 1999. " Stochastic Control Problems where Small Intervention Costs Have Big Effects," *Applied Mathematics and Optimization*, 40, pp. 355–375.

[11] Randner, R. and L. Shepp, 1996. "Risk vs. Profit Potential: A model for Corporate Strategy," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 20, pp. 1373–1393.

[12] Ross, S. M., 1995. *Stochastic Processes*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York.