数理解析研究所講究録 1252 巻 2002 年 13-19

離散捜索割当てゲーム

防衛大学校・情報工学科　宝崎隆祐 (Ryusuke Hohzaki),　飯田耕司 (Koji Iida)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 はじめに

捜索理論は，第２次大戦中における米海軍のＯＲ活動の理論的成果をまとめた B.O. Koopman[11] に始まると言われる．初期の捜索理論は潜水艦とその捕捉を意図する対潜兵力との軍事オペレーションを具体的な適用例と考えており，同じような適用をねらった研究としては，離散捜索空間上での拡散目標捜索に関する Meinardi[12] の研究や，定針定速運動をする潜水艦と垂下型音波探知機を投下する対潜水艦ヘリとの間のゲームの均衡解を導出した Danskin[2] 等がいる．また，Baston and Bostock[1] や Garnaev[4] は，ヘリの爆雷投下による潜伏潜水艦の破壊確率尺度でのゲームを１次元空間上で議論している．軍事オペレーションのみならず目標と捜索者の間で争われる一般的な捜索ゲームを１次元離散セル空間上で議論したものに Washburn[14] があり，それは目標，捜索者ともにその移動に制限はなく，同一セルの同時選択による探知発生までの総捜索距離を支払いとする多段ゲームである．潜伏する目標に対してトラベリング・コストを支払いとした研究として Kikuta[10] がある．また，両プレーヤの各時点での移動セルによる支払いの時間累積を総支払いとする１段階ゲームの研究には Eagle[3] 等がある．位置選択を捜索者の戦略とするこれらの研究に対し，捜索空間上への捜索努力配分を捜索者の戦略とみなすモデルとして捜索割当てゲームの研究がある [5]．その基本モデルは，１地点に潜伏する静止目標に対する捜索者の捜索努力配分ゲームである．支払いとして探知確率や獲得利得を考えたゲームの研究が，Nakai[13] や Iida, Hohzaki and Sato[8] らにより行われている．捜索者の一方的な最適努力配分問題が静止目標から移動目標に対する問題へと発展したように，目標を静止したものから移動するものへ拡張したゲームの研究として Iida, Hohzaki らの研究 [9, 6] があり，それらを一般化したゲームに対する汎用的数値解法を Hohzaki ら [7] が提案している．

これらの研究においては，目標は限定された数の目標パスのうちのいずれかを選択するという形での戦略を採ると仮定されている．また，目標移動の制約が設定されている場合でも，高々最大速度制約や隣接セルのみへの移動といった仮定が多い．しかし，現実的な捜索ゲームでは，目標の移動パスは任意かつ多数存在し，その運動にもエネルギー消費が伴うと考えられる．これらの現実性を考慮した捜索割当てゲームを研究対象としたのが Washburn and Hohzaki[15] である．しかしながら，彼らの問題は連続空間上でモデル化されているため，ゲームの厳密解を求めるに至らず，ゲームの値の上界や下界評価で終わっている．この論文では，彼らのモデルを離散空間上で再考し厳密解を求めるとともに，大規模問題にも適用可能な解法を提案する．

2 離散捜索割当てゲームのモデルと定式化

次のような捜索者と逃避者が参加する２人ゼロ和ゲームを考える．

(1) 捜索の地理空間はセル番号で表される離散的なセル空間 $\boldsymbol{K} = \{1, \cdots, n\}$ であり，捜索時間空間も離散時点の集合 $\boldsymbol{T} = \{1, \cdots, m\}$ である．

(2) 逃避者はこの空間上を移動する１つのパスを事前に選択することにより捜索者からの逃避を図る．離散捜索空間において考えられるパス全体を Ω で表すと，パス総数は有限個 $|\Omega| = n^m$ あり，各々のパスにはパス番号 $p = 1, \cdots, n^m$ が付与されている．パス $\omega \in \Omega$ は，時点 $t = 1, \cdots, m$ にセル $\omega(t)$ を通過する．パスは初期時点 $t = 1$ にセル群 $S_0 \subseteq \boldsymbol{K}$ のいずれかのセルから出発し，時点 t でのセル i からは次の時点でセル群 $N(i, t)$ へのみ移動できる．セル i から j への移動にはエネルギー $\mu(i, j)$ が消費され，初期の所有エネルギー e_0 を消耗し尽くした場合には，それ以降他のセルへは移動できない．

(3) 捜索者はこの捜索空間上へ捜索努力を配分することにより逃避者を探知しようと図るが，捜索は時点 τ 以降開始される．その捜索可能な時間帯を $\widehat{\boldsymbol{T}} := \{\tau, \cdots, m\} \subseteq \boldsymbol{T}$ で表す．また，捜索者の使用可能な資源総量は各時点 $t \in \widehat{\boldsymbol{T}}$ において $\Phi(t)$ である．

(4) 捜索者と逃避者は自らの戦略を捜索実施前に決定する．捜索者のある捜索努力配分と逃避者のあるパスの選択による支払いは，逃避者のパスに沿って投入された捜索努力配分の重み付き総量の指数関数で表される．この重みは，各セル i での努力配分の効果を示すパラメータ α_i により表現される．このような支払関数はランダム捜索オペレーションによる目標探知確率として得られることが知られており，捜索者はこの支払いを大きくするように，逃避者は小さくするように行動する．

問題は，捜索者をマキシマイザー，逃避者をミニマイザーとする１段階の２人ゼロ和ゲームである．時点 t，セル i の捜索空間上の点 (i, t) に投入する捜索努力配分 $\varphi(i, t)$ の集合が捜索者の純粋戦略であり，これを $\varphi = \{\varphi(i, t), i \in \boldsymbol{K}, t \in \widehat{\boldsymbol{T}}\}$ で表す．努力量の非負条件から $\varphi(i, t) \geq 0$ であり，各時点での努力量の上限制約から $\sum_{i \in \boldsymbol{K}} \varphi(i, t) \leq \Phi(t)$ を満足しなければならない．捜索努力配分に関するこの実行可能領域を Ψ で表す．一方，パス制約として，連続時点における移動制約は任意のパス ω に対し $\omega(t+1) \in N(\omega(t), t)$ と書ける．また，エネルギー制約から $\sum_{t=1}^{m-1} \mu(\omega(t), \omega(t+1)) \leq e_0$ である．これを満たすパス全体を実行可能パス群 $\widehat{\Omega}$ とする．捜索努力配分 φ と逃避パス ω による支払関数は $R(\varphi, \omega) = 1 - \exp(-\sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t))$ と表される．これが φ に対して凹関数であることに注意すれば，凸ゲームに関する理論からこのゲームの均衡解は φ に関しては純粋戦略の範囲内にあることが知られている．一方，パス ω を選択する確率を $\pi(\omega)$ とし，パス選択に関する混合戦略を $\pi = \{\pi(\omega), \omega \in \widehat{\Omega}\}$ で定義すると，捜索者の戦略 φ，逃避者の戦略 π による期待支払いは $R(\varphi, \pi) = \sum_{\omega} \pi(\omega) R(\varphi, \omega)$ となる．以上から，ゲームの値は次式で与えられる．ただし，$\pi(\omega) \geq 0$, $\omega \in \widehat{\Omega}$, $\sum_{\omega \in \widehat{\Omega}} \pi(\omega) = 1$ の条件を満たすパス選択確率 π の実行可能領域を Π としている．

$$(P_1^p) \quad \max_{\varphi} \ \min_{\pi} \ R(\varphi, \pi) \qquad s.t. \quad \varphi \in \Psi, \ \pi \in \Pi \tag{1}$$

3 パス型解法

問題 (P_1^p) は次のように変形できる．

$$\max_{\varphi \in \Psi} \ \min_{\pi \in \Pi} \ R(\varphi, \pi) = \max_{\varphi \in \Psi} \ \min_{\omega \in \widehat{\Omega}} \ R(\varphi, \omega) = \max \ \{\gamma | R(\varphi, \omega) \geq \gamma, \omega \in \widehat{\Omega}, \varphi \in \Psi\} \tag{2}$$

ここで $\eta = \ln(1/(1-\gamma))$ とおけば，$R(\varphi,\omega) = 1 - \exp(-\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)) \geq \gamma$ は $\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t) \geq \eta$ と同値であるから，式 (2) による変形は，次のような線形計画問題による定式化を示唆している．これを解くことにより，ゲームの値 η^* と最適な捜索努力配分 φ^* が得られる．

$$(P_2^p) \quad \max_{\{\eta,\varphi(i,t)\}} \eta \qquad s.t. \quad \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t) \geq \eta,\ \omega \in \widehat{\Omega},\ \varphi \in \Psi$$

以上から，以後の議論では支払関数を $R(\varphi,\omega) = \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)$ と再定義しよう．このとき期待支払い $R(\varphi,\pi)$ は次のようにも変形できる．

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\widehat{\Omega}} \pi(\omega)R(\varphi,\omega) &= \sum_{\omega}\pi(\omega)\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t) = \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\sum_{\omega}\pi(\omega)\delta_{i\omega(t)}\alpha_i\varphi(i,t)\\ &= \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\left(\sum_{\omega\in\widehat{\Omega}_{it}}\pi(\omega)\right)\alpha_i\varphi(i,t)\end{aligned}$$

ただし，δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり，$\widehat{\Omega}_{it}$ は時点 t でセル i を通る実行可能パスの集合 $\widehat{\Omega}_{it} := \{\omega \in \widehat{\Omega} | \omega(t) = i\}$ である．したがって，

$$\max_{\varphi\in\Psi} R(\varphi,\pi) = \max_{\varphi\in\Psi}\sum_t\sum_i\left(\sum_{\omega\in\widehat{\Omega}_{it}}\pi(\omega)\right)\alpha_i\varphi(i,t) = \sum_t \Phi(t)\max_i\left(\alpha_i\sum_{\omega\in\widehat{\Omega}_{it}}\pi(\omega)\right)$$

と変形できる．これから，ゲームの値は $\min_\pi \max_\varphi R(\varphi,\pi)$ による次の線形計画問題 D_2^p によっても与えられ，これを解くことにより逃避者の最適パス選択確率 π^* が得られる．

$$\begin{aligned}(D_2^p) \quad &\min_{\{\nu(t),\pi(\omega)\}} \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\Phi(t)\nu(t)\\ &s.t. \quad \alpha_i\sum_{\omega\in\widehat{\Omega}_{it}}\pi(\omega) \leq \nu(t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}},\ \ \sum_{\omega\in\widehat{\Omega}}\pi(\omega) = 1,\ \ \pi(\omega)\geq 0,\ \omega\in\widehat{\Omega}\end{aligned}$$

ところで，一般の行列ゲームでも見られるように，問題 (P_2^p) と (D_2^p) はお互いに双対問題となっている．以上の定式化 (P_2^p)，(D_2^p) では実行可能パス $\widehat{\Omega}$ を陽に羅列しているが，そのパス総数が最悪の場合には n^m となることを考えれば，離散空間が少しでも大きくなると現実的な時間内での解法は絶望的だと思われる．

4　確率遷移型解法

ここでは，逃避者の戦略としてその存在確率を取り入れることにより，前節で現れた組合せ的爆発を和らげる工夫をしよう．Eagle ら [3] は，捜索者，逃避者双方がパス移動を行う場合のモデルについて同様な工夫を施している．捜索者の戦略を前節と同様 φ で表す．問題を簡単にするため，エネルギー消費関数 $\mu(\cdot)$ 及び初期エネルギー e_0 は非負整数値をとるものとし，考えられるエネルギー状態全体を $\boldsymbol{E} = \{0,\cdots,e_0\}$ で表す．逃避者の戦略を表現するため，時刻 t にセル i にいて残存エネルギー e を保有する状態に逃避者がいる確率を $q(i,t,e)$ で表す．また，状態 (i,t,e) にあって，次の時点 $t+1$ でセル j に移動する確率を $v(i,j,t,e)$ とする．変数 $h(t)$ を時点 t 以降の最適捜索努力配分による期

待支払いの最大値と定義しよう．状態 (i,t,e) から次の時点 $t+1$ で移動可能なセル群は $N(i,t,e)=\{j\in N(i,t)|\mu(i,j)\le e\}$，状態 (i,t,e) へ移動可能な前の時点 $t-1$ でのセル群は $N^*(i,t,e)=\{j\in \boldsymbol{K}|i\in N(j,t-1,e+\mu(j,i))\}$ である．もちろん，$N(i,t,e), e_0<e$, 等が空集合であることは自明である．

さて，$h(t)$ に関しては以下の漸化式が成り立つ．

$$\begin{aligned} h(t) &= \max_{\varphi}\left\{\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\alpha_i\varphi(i,t)\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)+h(t+1)\right\} \\ &= \Phi(t)\max_i\left(\alpha_i\sum_e q(i,t,e)\right)+h(t+1) \end{aligned} \tag{3}$$

したがって，任意の $i\in\boldsymbol{K}$ に対しては $h(t)\ge\Phi(t)\alpha_i\sum_e q(i,t,e)+h(t+1)$ が成り立つ．時点 τ 以降の捜索による最大期待支払い $h(\tau)$ を最小にすることが逃避者の意図であるから，このゲームは次の線形計画問題を解けばよい．これにより逃避者の存在と移動に関する最適解 q^*, v^* が得られる．

$$(P_1^e)\quad \min\ h(\tau) \tag{4}$$

$$s.t.\quad h(t)\ge\Phi(t)\alpha_i\sum_e q(i,t,e)+h(t+1),\ i\in\boldsymbol{K},\ t=\tau,\cdots,m-1 \tag{5}$$

$$h(m)\ge\Phi(m)\alpha_i\sum_e q(i,m,e),\ i\in\boldsymbol{K} \tag{6}$$

$$q(i,t,e)=\sum_{j\in N(i,t,e)}v(i,j,t,e),\ i\in\boldsymbol{K},\ t=1,\cdots,m-1,\ e\in\boldsymbol{E} \tag{7}$$

$$q(i,t,e)=\sum_{j\in N^*(i,t,e)}v(j,i,t-1,e+\mu(j,i)),\ i\in\boldsymbol{K},\ t=2,\cdots,m,\ e\in\boldsymbol{E} \tag{8}$$

$$\sum_{i\in S_0}q(i,1,e_0)=1 \tag{9}$$

$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}}\sum_{e\in\boldsymbol{E}}q(i,t,e)=1,\ t\in\boldsymbol{T} \tag{10}$$

$$v(i,j,t,e)\ge 0,\ i,j\in\boldsymbol{K},\ t=1,\cdots,m-1,\ e\in\boldsymbol{E} \tag{11}$$

条件 (5), (6) は漸化式 (3) から，条件 (7), (8) は逃避者の存在確率遷移の保存則から，(9) は逃避者の初期存在に関する条件から，それぞれ導かれる．この定式化ではエネルギーを離散化しているものの，必要とされるメモリーサイズは，パス型解法では最悪 $O(n^m)$ であったのに比べ，$O(n^2\times m\times e_0)$ でよい．また，多少の変形が必要であるものの，最適捜索努力配分 φ^* はこの問題の双対問題により導出できる．

5 拡張モデル

問題 (P_1^e) による定式化は，２節で述べた基本仮定以外のモデルに対しても簡単な変更を加えるだけで適用可能となる柔軟性をもつ．ここでは，基本モデルと若干異なるモデルへの拡張を試みる．

(1) エネルギー制約のないモデル

この場合，問題 (P_1^e) からエネルギー状態を表すインデックス e を削除するだけでよい．ゲームの最適戦略は，逃避者は移動可能な最大存在圏内で等確率で一様分布し，捜索者もその圏中に一様に捜索資源を配分することとなる．

(2) 逃避者にシェルターのあるモデル

逃避者には安全に逃げ込めるシェルターがセル群 $\widetilde{\boldsymbol{K}} \subset \boldsymbol{K}$ に設置されており，そこでは捜索者による探知を免れることができると仮定する．この場合の均衡解の導出は，問題 (P_1^e) の条件 (5),(6) 式を

$$h(t) \geq \Phi(t)\alpha_i \sum_e q(i,t,e) + h(t+1),\ i \in \boldsymbol{K}/\widetilde{\boldsymbol{K}},\ t = \tau, \cdots, m-1 \tag{12}$$

$$h(m) \geq \Phi(m)\alpha_i \sum_e q(i,m,e),\ i \in \boldsymbol{K}/\widetilde{\boldsymbol{K}} \tag{13}$$

と変更するだけでよい．

(3) エネルギーの中途補給があるモデル

これは，逃避者が時刻 t_f にセル群 K_f にある補給所に立ち寄り，エネルギー e_f の補給を実施するモデルである．この場合は，問題 (P_1^e) に以下の修正を施せばよい．まず，エネルギー状態は $\boldsymbol{E} = \{0, \cdots, e_0 + e_f\}$ に拡張される．エネルギー状態 e で補給所に到達した逃避者のエネルギー状態は $e + e_f$ となり，補給所 i で補給を受けてエネルギー e となった逃避者の存在確率を $Q(i,e)$ とすれば，$Q(i, e+e_f) = q(i,e)$ が成り立つ．時点 t_f 以降の逃避者の移動確率 $v(i,j,t,e)$ はこの $Q(i,e)$ から派生することになる．以上を考慮すれば，エネルギー補給が可能な場合のゲームの解は次の問題を解けばよい．

$$\begin{aligned}
&(P^f)\quad \min\ h(\tau)\\
&s.t.\quad h(t) \geq \Phi(t)\alpha_i \sum_e q(i,t,e) + h(t+1),\ i \in \boldsymbol{K},\ t = \tau, \cdots, m-1\\
&\qquad h(m) \geq \Phi(m)\alpha_i \sum_e q(i,m,e),\ i \in \boldsymbol{K}\\
&\qquad q(i,t,e) = \sum_{j \in N(i,t,e)} v(i,j,t,e),\ i \in \boldsymbol{K},\ t = 1, \cdots, t_f - 1, t_f + 1, \cdots, m-1,\ e \in \boldsymbol{E}\\
&\qquad q(i,t,e) = \sum_{j \in N^*(i,t,e)} v(j,i,t-1,e+\mu(j,i)),\ i \in \boldsymbol{K},\ t = 2, \cdots, m,\ e \in \boldsymbol{E}\\
&\qquad Q(i, e+e_f) = q(i, t_f, e),\ i \in K_f,\ e = 0, \cdots, e_0\\
&\qquad Q(i,e) = \sum_{j \in N(i,t,e)} v(i,j,t_f,e),\ i \in K_f, e \in \boldsymbol{E}\\
&\qquad \sum_{i \in S_0} q(i,1,e_0) = 1\\
&\qquad \sum_{i \in K_f} \sum_{e \in \boldsymbol{E}} q(i,t_f,e) = 1\\
&\qquad v(i,j,t,e) \geq 0,\ i,j \in \boldsymbol{K},\ t = 1, \cdots, m-1,\ e \in \boldsymbol{E}
\end{aligned}$$

パラメータが $n = 12, m = 12, \tau = 2, \alpha_i = 1, \Phi(t) = 1, \mu(i,j) = (i-j)^2$ と設定されている以下の数値例を解こう．逃避者は初期エネルギー $e_0 = 8$ を持ってセル 1 から逃避を開始する（$S_o = \{1\}$）．１度の移動で３つ隣のセルまで移動可能である．２つのセル $K_f = \{1, 6\}$ に補給所が設置されており，そこで $e_f = 4$ のエネルギー補給を受ける．ここで $t_f = 4,5,6,7,8$ と変化させて問題 (P^f) を解いたところ，それぞれのゲームの値は $2.868, 2.069, 2.059, 2.135, 2.210$ となった．したがって，逃避者にとっては $t_f = 6$ が最も適当な補給所訪問時期であると言える．$t_f = 6$ について，逃避者の最適存在確率の推移を示したのが表 1 である．紙数の関係上他の t_f についての存在確率は提示できないが，訪問時期が $t_f = 4$ と早い場合には，セル 6 の補給所に立ち寄る時間的余裕がなく，早い時点

$t=2,3$ で存在分布を一様に拡散させた後に再びセル 1 の補給所に舞い戻らざるを得なくなり，以後急速に存在圏の拡大を図るもののその意図は十分には達成されない．$t_f=8$ の場合には，存在圏の拡張が時点 $t_f=8$ までなされるものの補給所のあるセル 6 以遠への拡張が抑制され，存在圏の以後の拡張には十分な時間的余裕がない．それらに比べ $t_f=6$ の場合には，存在圏の自然な拡大の途中で補給所への訪問が可能な形となっていることが表 1 から読みとれる．

表 1．$t_f=6$ の場合の最適捜索努力配分

セル \ 時点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.091	0.091	0.091
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0.1	0.091	0.091	0.091
9	0	0	0	0	0	0	0	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
8	0	0	0	0	0	0	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
7	0	0	0	0	0	0	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
6	0	0	0	0	0.167	0.5	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
5	0	0	0	0.2	0.167	0	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
4	0	0	0.25	0.2	0.167	0	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
3	0	0.333	0.25	0.2	0.167	0	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
2	0	0.333	0.25	0.2	0.167	0	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091
1	1	0.333	0.25	0.2	0.167	0.5	0.125	0.111	0.1	0.091	0.091	0.091

6 おわりに

本研究では，敵対するプレーヤとして捜索者と逃避者が参加する離散捜索割当てゲームを２人ゼロ和ゲームとして議論した．逃避者は捜索者に対する回避運動を企図するが移動によりエネルギーが消費され，エネルギーが残存している間しか移動はできない．捜索者は逃避者を探知するために手持ちの捜索資源を捜索空間に投入する．支払関数は逃避者の探知確率である．ここでは逃避者の移動を２つの方法でモデル化している．１つは直接的に移動パスを羅列する方法であり，いま１つは存在の遷移確率で表すやり方である．どちらのモデルによっても，問題は線形計画問題により定式化され容易に解くことができる．前者のモデル化は逃避者の移動に関する直感的な説明を我々に与えてくれるが，時点数に関しベキ乗で増加するパス総数を明示的に取り扱うため現実的な数値解法への障害となる．後者のモデルは動的計画法を利用しており，期待支払いの観点から問題を理解するよい方法であり，またモデルの変更に伴って定式化に制約条件の追加や削除が容易である等の柔軟性をもつ．しかし，エネルギーを離散化された状態で扱っているため問題の拡張にやや難点があり，その解決が今後の研究に待たれる．

参考文献

[1] V.J. Baston and F.A. Bostock, A One-Dimensional Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics*, **36**, pp.479–490, 1989.

[2] J.M. Danskin, A Helicopter versus Submarine Search Game, *Operations Research*, **16**, pp.509-517, 1968.

[3] J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative Search-Evasion Games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.

[4] A.Y. Garnaev, A Remark on a Helicopter-Submarine Game, *Naval Research Logistics*, **40**, pp.745-753, 1993.

[5] A.Y. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, Tokyo, 2000.

[6] R. Hohzaki and K. Iida, A Search Game with Reward Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **41**(3), pp.294–320, 1998.

[7] R. Hohzaki and K. Iida, A Solution for a Two-Person Zero-Sum Game with a Concave Payoff Function, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, World Science Publishing Co., London, pp.157–166, 1999.

[8] K. Iida, R. Hohzaki and K. Sato, Hide-and-Search Game with the Risk Criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37**, pp.287–296, 1994.

[9] K. Iida, R. Hohzaki and S. Furui, A Search Game for a Mobile Target with the Conditionally Deterministic Motion Defined by Paths, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**(4), pp.501–511, 1996.

[10] K. Kikuta, A Search Game with Traveling Cost, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **34**(4), pp.365–382, 1991.

[11] B.O. Koopman, *Search and Screening*, Pergamon, pp.221-227, 1980.

[12] J.J. Meinardi, A Sequentially Compounded Search Game, *Theory of Games: Techniquea and Applications*, The English Universities Press, London, pp.285–299, 1964.

[13] T. Nakai, Search Models wiht Continuous Effort under Various Criteria, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **31**, pp.335–351, 1988.

[14] A.R. Washburn, Search-Evasion Game in a Fixed Region, *Operations Research*, **28**, pp.1290-1298, 1980.

[15] A.R. Washburn and R. Hohzaki, The Diesel Submarine Flaming Datum Problem, *Military Operations Research*, to appear.