数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 108-120

ある種の1階微分作用素により生成されるカオス的半群について

お茶の水女子大学人間文化研究科
松井 麻依 (Mai Matsui) 竹尾 富貴子 (Fukiko Takeo)
Doctoral Research Course in Human Culture,
Ochanomizu Univ.

1 導入

A.Lasota, M.C.Mackey, M.Ważewska-Czyzewska の文献 [4] や M.C.Mackey, P.Dörmer の文献 [5] では，生物学的見地から次の微分方程式が扱われている．

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c(x)\frac{\partial u}{\partial x}+g(x,u)$$

特に Lasota, Mackey の文献 [3] では $c(x)=-x, g(x,u)=\frac{1}{2}u$ のときの微分方程式に対応する, exact, continuous time, semidynamical system の構築法を紹介している．ここでは Lasota, Mackey の場合を拡張した $c(x)=\gamma x,\quad g(x,u)=h(x)u\ (\gamma\in\mathbb{R},h\in C([0,1],\mathbb{C}))$ の場合，すなわち

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\gamma x\frac{\partial u}{\partial x}+h(x)u$$

の実数の区間 I 上のある関数空間 X における初期値問題を考える．この解の表現形式を用い，X 上の有界線形作用素からなる C_0-半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を定義する．ここでの目的は, 文献 [1] の W. Desch, W. Schappacher, G. F. Webb らの結果を応用し, その半群が chaotic であるための十分条件を与えることである．ここでの chaotic の定義は半群に対しての定義であるが, 一般に知られる“topologically transitive でかつ周期点の集合が稠密である”というカオスの定義と同等である．半群に対して hypercyclic であるというのは topologically transitive と同等であることが [1] で示されている．hypercyclic の定義を拡張したものに supercyclic があるが, それに関する研究を以前この研究会で発表した [6]．半群に対する hypercyclic 性に関する論文は相当出されているが, chaotic 性を論じている文献はかなり少なく，いまのところ [1] しか見当たらない．そこでカオス的半群を解の表現形式としてもつ微分方程式の特徴を調べるため, 最終的には最初に述べた exact と chaotic の関係も調べていきたいので, 先の微分方程式に関して調べ, どのような条件が微分方程式にあればカオス的半群になるかを求めた．exact と chaotic の関係までについては現在検討中である．ここで扱う最初の場合の微分方程式は, Schappacher らの定理を用いて結果を得るために, 特殊な場合になっているが, Lasota, Mackey の場合を含むものでもある為, exact と chaotic の関係を研究する際に意味のあるものである．

2 $C(I,\mathbb{C})$ 上のカオス的半群

Banach 空間 X 上の強連続半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が *hypercyclic* であるとはある $x \in X$ が存在し，集合 $\{T_t x \mid t \geq 0\}$ が X で稠密であることである．さらに半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が *chaotic* であるとは $\{T_t\}_{t\geq 0}$ が hypercyclic でかつ周期点の集合 $X_{\mathrm{per}} = \{x \in X \mid \exists t > 0 \ s.t.\ T_t x = x\}$ が X で稠密であることである．半群が chaotic になるための十分条件として次の定理がある．

Theorem A [1]. *Let X be a separable Banach space and let A be the* 生成作用素 *of a strongly continuous semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ on X. Let U be an open subset of the point spectrum of A, which intersects the imaginary axis, and for each $\lambda \in U$ let x_λ be a nonzero eigenvector, i.e. $Ax_\lambda = \lambda x_\lambda$. For each $\phi \in X^*$ we define a function F_ϕ: $U \to \mathbb{C}$ by $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, x_\lambda \rangle$. Assume that for each $\phi \in X^*$ the function F_ϕ is analytic and that F_ϕ does not vanish identically on U unless $\phi = 0$. Then $\{T_t\}_{t\geq 0}$ is chaotic.*

この定理を次の偏微分方程式に応用する．空間を $X_1 = \{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$ とし，次の偏微分方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし $\gamma < 0, h \in C([0,1],\mathbb{C}), f \in X_1$ とする．(2.1) の古典解である $\exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)\,ds\right\}$ $f(e^{\gamma t}x)$ という表現形式を用い，X_1 上の有界線形作用素 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を次の様に定義する:

$$T_t f(x) = \exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)\,ds\right\} f(e^{\gamma t}x) \qquad \text{for} \quad f \in X_1.$$

$\gamma \neq 0$ の場合に興味があり，また $\gamma > 0$ なら $x \in (e^{-\gamma t}, 1]$ に対し $e^{\gamma t}x \notin [0,1]$ となるので $\gamma < 0$ と仮定した．$T_{t_1+t_2}f(x) = \exp\left\{\int_0^{t_1+t_2} h(e^{\gamma(t_1+t_2-s)}x)\,ds\right\} f(e^{\gamma(t_1+t_2)}x) = T_{t_1} \cdot T_{t_2} f(x)$ と $T_0 f(x) = f(x)$ がすべての $f \in X_1$ に対して成り立つので，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は半群であることがわかる．さらに半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ は X_1 上の C_0-半群になる．連続性の証明は次の定理の証明中で示す．X_1 上の C_0-半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の生成作用素 A: $D(A) \subseteq X_1 \to X_1$ は

$$Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t}$$

で与えられ，領域

$$D(A) = \left\{ f \in X_1 \,\middle|\, \lim_{t\downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t} \text{ exists.} \right\}$$

に属するすべての f に対して定義される．ここで $\{T_t\}_{t\geq 0}$ をこの偏微分方程式に対する *solution semigroup* と呼ぶことにする．この solution semigroup を Theorem A に応用し，solution semigroup が chaotic になるための十分条件を得た．

Theorem 1. X_1 を空間 $\{f \in C([0,1],\mathbb{C}) \mid f(0)=0\}$ とする．次の偏微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

ただし $\gamma < 0$, $h \in C([0,1],\mathbb{C})$, $f \in X_1$ とする．このときこの偏微分方程式に対する *solution semigroup* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ $(T_t f(x) = \exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)\,ds\right\} f(e^{\gamma t}x))$ は，X_1 上の C_0-半群になる．

さらにもし $\min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\} > 0$ を満たすならば，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は *chaotic* である．

Proof. $a = \sup_{0\leq x\leq 1}|h(x)|$ とおく．$f \in X_1$ に対し，

$$\begin{aligned} \|T_t f - f\| &= \sup_{0\leq x\leq 1} |e^{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)ds} f(e^{\gamma t}x) - f(x)| \\ &\leq |e^{at}-1| \sup_{0\leq x\leq 1}|f(e^{\gamma t}x)| + \sup_{0\leq x\leq 1}|f(e^{\gamma t}x) - f(x)| \\ &= |e^{at}-1|\|f\| + \sup_{0\leq x\leq 1}|f(e^{\gamma t}x) - f(x)| \end{aligned}$$

を得，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ の強連続性が示せた．

次に，もし $\min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\} > 0$ ならば，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は chaotic であることを示す．Theorem A のすべての仮定が成り立つことを示すため，次をチェックする:

(i) X_1 は separable Banach space

(ii) 生成作用素 A の point spectrum に含まれ，かつ虚軸と交わる開集合 U の存在

(iii) $\lambda \in U$ に対し，$f_\lambda(x) = \exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s}ds)$ とおき，各 $\phi \in X_1^*$ に対し関数 $F_\phi\colon U \to \mathbb{C}$: $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, f_\lambda \rangle$ を定義する．このとき各 $\phi \in X_1^*$ に対し，関数 F_ϕ は U 上解析的である．

(iv) U 上で $F_\phi = 0$ ならば $\phi = 0$ が成り立つ．

(i) X_1 が separable Banach space になることは Weierstrass の近似定理により明らか．

(ii) $A\colon D(A) \subseteq X_1 \to X_1$ を C_0-半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の生成作用素とする．

$$D_1 = \left\{ f \in X_1 \cap C^1((0,1],\mathbb{C}) \,\middle|\, \lim_{x\to 0} xf'(x) = 0 \right\}.$$

とおく．このとき $D_1 = D(A)$ が成り立つことを示す．$f \in D(A)$ に対し，Af は X_1 に属し，f は (0,1) 上微分可能である．standard argument により，$Af(x) = h(x)f(x) + \gamma xf'(x)$ が $x \in (0,1]$ に対して成立する．よって $\lim_{x\to 0} xf'(x) = 0$ が成り立ち，これから $D(A) \subset D_1$ が示せる．

逆に，$f \in D_1$ とすると，$hf + \gamma xf' \in X_1$ である．よって任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta_1 (1 > \delta_1 > 0)$ が存在して $|h(x)f(x) + \gamma xf'(x)| < \varepsilon$ がすべての $x \in [0,\delta_1]$ に対して成り立ち，かつ，$|x - x'| < \delta_1$ となるすべての $x, x' \in [0,1]$ に対し $|xf'(x) - x'f'(x')| < \varepsilon$ と $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成り立つ．h は連続なので，ある $\delta_2 > 0$ が存在してすべての $0 \leq s < \delta_2$

と $x \in [0,1]$ に対し $|h(e^{\gamma s}x) - h(x)| < \varepsilon$ を満たす．よって，$\delta_3 = \min\left\{\delta_2, \frac{1}{||h||_\infty}, \frac{\varepsilon}{2||h||_\infty^2}\right\}$ とすると，$0 \le t < \delta_3$ に対し

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)ds} - 1}{t} - h(x)\right| &< \left|\frac{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)ds}{t} - h(x)\right| + \frac{t}{2}||h||_\infty^2 e^{t||h||_\infty} \\ &< \varepsilon + 2t||h||_\infty^2 < 2\varepsilon\end{aligned}$$

を得る．また，$0 < t < \min\{\frac{1}{\gamma}\log(1-\delta_1), \delta_3\}$ に対し，$0 \le x - e^{\gamma t}x < \delta_1$ と $f(e^{\gamma t}x) - f(x) = \int_0^t \gamma e^{\gamma s} x f'(e^{\gamma s}x)ds$ を用い，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} - (\gamma x f'(x) + h(x)f(x))\right| \\ \le\ & \left|\frac{e^{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)ds} - 1}{t} f(e^{\gamma t}x) - h(x)f(x)\right| + \frac{1}{t}\int_0^t |\gamma e^{\gamma s} x f'(e^{\gamma s}x) - \gamma x f'(x)|ds \\ \le\ & (2||f||_\infty + ||h||_\infty + \gamma)\varepsilon,\end{aligned}$$

を得，これは $D_1 \subset D(A)$ を示す．よって $D(A) = D_1$ である．

$\alpha = \min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\}$ とおき，

$$U = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) < \alpha\}$$

とおく．$\alpha > 0$ を仮定しているので，集合 U は虚軸に交わる．$\lambda \in U$ に対し，$f_\lambda(x) = \exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s}ds)$ は [0,1] 上連続である．$f_\lambda(x)$ が $D_1 = D(A)$ に属し，$Af_\lambda = \lambda f_\lambda$ を満たすことをチェックするのは容易である．よって U は A の point spectrum に含まれる開集合である．

(iii) $\lambda \in U$ とする．$|p|$ が十分小さい $p \neq 0$ に対し $v_{p,\lambda}(x) = \dfrac{f_{\lambda+p}(x) - f_\lambda(x)}{p}$ とおき，$x \in (0,1]$ に対して $g_\lambda(x) = \frac{\log x}{\gamma}\exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s}ds)$，$g_\lambda(0) = 0$ とする．$\lim_{x\to 0} g_\lambda(x) = 0$ であるので，$g_\lambda \in X_1$ を得る．関係式 $f_{\lambda+p}(x) - f_\lambda(x) = p\int_0^1 \frac{\log x}{\gamma}\exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s) + tp}{s}ds)dt$ を用い，$x \in (0,1]$ に対し，

$$\begin{aligned}&v_{p,\lambda}(x) - g_\lambda(x) \\ =\ & \int_0^1 \frac{\log x}{\gamma}\left\{\exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s) + tp}{s}ds) - \exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s}ds)\right\}dt \\ =\ & g_\lambda(x)\int_0^1 (x^{\frac{tp}{\gamma}} - 1)dt\end{aligned}$$

を得る．$c = \frac{\alpha - \Re(\lambda)}{2} > 0$ とおく．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta_1 > 0$ が存在し，$0 \le x < \delta_1$ に対して $|\frac{\log x}{\gamma}\exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s) + c}{s}ds)| < \varepsilon$ が成り立ち，また $\delta_2 > 0$ が存在して $\delta_1 \le x \le 1$ と $0 < |p| < \delta_2$ に対して $|x^{\frac{tp}{\gamma}} - 1| < \frac{\varepsilon}{||g_\lambda||}$ が成り立つ．

$x \in [0, \delta_1]$ と $0 < |p| < c$ に対し，

$$\begin{aligned}&|v_{p,\lambda}(x) - g_\lambda(x)| \\ \le\ & \int_0^1 \left\{\left|\frac{\log x}{\gamma}\exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s) + tp}{s}ds)\right| + \left|\frac{\log x}{\gamma}\exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s}ds)\right|\right\}dt \\ <\ & 2\varepsilon\end{aligned}$$

を得る．また，$x \in [\delta_1, 1]$ と $0 < |p| < \delta_2$ に対し，

$$|v_{p,\lambda}(x) - g_\lambda(x)| \le |g_\lambda(x)| \int_0^1 |x^{\frac{tp}{\gamma}} - 1| dt < \varepsilon$$

を得る．よって，$0 < |p| < \min\{c, \delta_2\}$ と $x \in [0,1]$ に対し，$|v_{p,\lambda}(x) - g_\lambda(x)| < 2\varepsilon$ を得る．よって $p \to 0$ のとき $|v_{p,\lambda}(x) - g_\lambda(x)|$ は [0,1] 上一様に 0 に近づき，

$$\langle \phi, g_\lambda \rangle = \lim_{p \to 0} \langle \phi, \frac{f_{\lambda+p} - f_\lambda}{p} \rangle = \frac{dF_\phi}{d\lambda}$$

を満たす．それゆえ，$F_\phi(\lambda)$ は $\lambda \in U$ に関し，解析的である．
(iv)　すべての $\lambda \in U$ に対し，$F_\phi(\lambda) = 0$ ならば，$\phi = 0$ が成り立つことを示す．ここで次を思い出しておく．$U = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) < \alpha\}$ であり，$\lambda \in U$ に対して，$f_\lambda(x) = \exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s} ds)$ である．$\lambda_0 < \alpha$ を満たす定数 λ_0 をとる．$\Re(\lambda) < \lambda_0$ に対し，

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - \lambda_0}{s} ds - \frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda_0 - h(s)}{s} ds\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - \lambda_0}{s} ds\right\} \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda_0 - h(s)}{s} ds\right\} \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成り立つ．(2.3) の 2 番目の factor を次のようにおく：

$$q(x) = \exp\left\{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda_0 - h(s)}{s} ds\right\}$$

このとき，q が $[0,1]$ 上連続で，$x > 0$ に対し，$q(x) > 0$ であることが容易にわかる．(2.3) の最初の factor は

$$\exp\left\{-\frac{\lambda - \lambda_0}{\gamma} \cdot \log(\frac{1}{x})\right\} = x^{\frac{\lambda - \lambda_0}{\gamma}}.$$

となる．$n \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ に対し，$\lambda_n = \gamma n + \lambda_0$ とおく．仮定 $\gamma < 0$ のとき $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し $\lambda_n \in U$ である．このとき $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$f_{\lambda_n}(x) = x^n q(x)$ である．仮定から，$0 = F_\phi(\lambda_n) = \langle \phi, f_{\lambda_n} \rangle = \langle \phi, x^n q \rangle$ が $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して成り立つ．Stone-Weierstrass theorem により，$\{x^n \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ の linear span は X_1 で稠密である．すべての $x \in (0,1]$ に対し，$q(x) > 0$ なので，$\{x^n q \mid n = 1, 2, 3, \cdots\}$ の linear span もまた X_1 で稠密である．よって $\phi = 0$ が成り立つ．

(i) から (iv) により，Theorem A のすべての仮定が成り立つ．よって Theorem A により，$\{T_t\}_{t \ge 0}$ は chaotic である．□

空間 $Y_1 = \{f \in C([1,\infty), \mathbb{C}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ は $(\phi f)(x) = f(\frac{1}{x})$ で定義される写像 $\phi : X_1 \to Y_1$ により，空間 $X_1 = \{f \in C([0,1], \mathbb{C}) \mid f(0) = 0\}$ と関係がある．よって，X_1 における式 (2.2) を Y_1 における次の式と対応させることを考える．

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma y \frac{\partial u}{\partial y} + h(y) u. \tag{2.4}$$

(2.2) に関する X_1 上の solution semigroup を $\{T_t\}_{t\geq 0}$ とし，(2.4) の古典解から生成される Y_1 上の solution semigroup を $\{S_t\}_{t\geq 0}$ とする．このとき，次のダイアグラムを可換にする．

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{T_t} & X_1 \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\ Y_1 & \xrightarrow[S_t]{} & Y_1 \end{array}$$

よって次を得る．

Corollary.

Y_1 を空間 $\{f \in C([1,\infty),\mathbb{C}) \mid \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ とする．次の偏微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

ただし，$\gamma > 0$, $f \in Y_1$, $h \in C([1,\infty),\mathbb{C})$ とし，$\lim_{x\to\infty} h(x)$ が存在するとする．このときこの偏微分方程式に対する *solution semigroup* $\{S_t\}_{t\geq 0}$ $(S_t f(x) = e^{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)ds} f(e^{\gamma t}x))$ は，Y_1 上 C_0-半群になる．さらにもし $\inf\{\Re h(x) \mid x \in [1,\infty)\} > 0$ ならば，$\{S_t\}_{t\geq 0}$ は *chaotic* である．

3 $L^2(I)$ 上のカオス的半群

X_2 を空間 $L^2([0,1],\mathbb{C})$ とする．$L^2([0,1],\mathbb{C})$ における次の偏微分方程式を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \tag{3.1}$$

ただし，$\gamma < 0, h \in C([0,1],\mathbb{C}), f \in X_2$ とする．(3.1) の古典解の表現形式 $\exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)\,ds\right\}$ $f(e^{\gamma t}x)$ を用いて，X_2 上の有界線形作用素の族 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ を $f \in X_2$ に対して $T_t f(x) = \exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)\,ds\right\} f(e^{\gamma t}x)$ と定義することができる．このとき，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は半群となる．さらに，半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ は X_2 上の C_0-半群となる．連続性の証明は，次の定理の中で示される．Theorem A を solution semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ に応用することにより，solution semigroup が chaotic になるための十分条件を得る．

Theorem 2.

X_2 を空間 $L^2([0,1],\mathbb{C})$ とする．次の偏微分方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

ただし，$\gamma < 0$, $h \in C([0,1],\mathbb{C})$, $f \in X_2$ とする．このときこの偏微分方程式に対する *solution semigroup* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ $(T_t f(x) = \exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)\,ds\right\} f(e^{\gamma t}x))$ は X_2 上の C_0-半群になる．さらにもし，$\min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\} > \frac{\gamma}{2}$ ならば，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は *chaotic* である．

Proof. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の強連続性を調べるため，$t=0$ における $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の強連続性を調べる．

f を X_2 の元とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$||f-\xi||_{L^2} < \frac{\varepsilon}{6}.$$

を満たす $[0,1]$ 上の連続関数 ξ が存在する．ξ は連続なので，$\delta_1 > 0$ が存在し，$0 < t < \delta_1$ に対して

$$||T_t\xi - \xi||_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

を満たす．$\alpha_0 = \max_{0\leq x\leq 1}\{\Re(h(x))\} - \frac{\gamma}{2}$ とすると任意の $k \in X_2$ に対し，

$$||T_t k||_{L^2} \leq e^{\alpha_0 t}||k||_{L^2}$$

が成り立つ．$\delta = \min(\delta_1, \frac{\log 2}{\alpha_0})$ とおくと，$t \in (0,\delta)$ に対して

$$\begin{aligned}
||T_t f - f||_{L^2} &\leq ||T_t f - T_t\xi||_{L^2} + ||T_t\xi - \xi||_{L^2} + ||\xi - f||_{L^2} \\
&\leq e^{\alpha_0 t}||f-\xi||_{L^2} + ||T_t\xi - \xi||_\infty + ||f-\xi||_{L^2} \\
&< ||f-\xi||_{L^2}(1+e^{\alpha_0 t}) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{6}(1+2) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

が成立する．よって，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は C_0-半群である．

ここからは，$\min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\} > \frac{\gamma}{2}$ が成り立つと仮定したときに，Theorem A の仮定がすべて満たされることを示すため，Theorem 1 の証明のように，次の (i) – (iv) をチェックする．(i) X_1 は separable Banach space

(ii) 虚軸に交わる生成作用素 A の point spectrum に含まれる開集合 U の存在

(iii) $\lambda \in U$ に対し，$f_\lambda(x) = \exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s}ds)$ とおき，各 $\phi \in X_1^*$ に対し，関数 $F_\phi : U \to \mathbb{C}$ を $F_\phi(\lambda) = \langle \phi, f_\lambda\rangle$ により定義する．このとき，各 $\phi \in X_1^*$ に対して，関数 F_ϕ は U 上解析的である．

(iv) U 上 $F_\phi = 0$ ならば，$\phi = 0$ が成り立つ．

(i) は容易に示せる．

(ii) A: $D(A) \subseteq X_1 \to X_1$ を C_0-半群 $\{T_t\}_{t\geq 0}$ の生成作用素とする．

$$D_2 = \{f \in X_2 \mid xf \text{ は絶対連続かつ } (xf)' \in X_2\}.$$

とおく．ここで，$f \in D_2$ が成り立つことと，$f \in X_2$ かつ xf が Sobolev space $H^1(0,1)$ に属することが同値であることを思い出しておく．$f \in D(A)$ に対し，$\lim_{t\downarrow 0}\frac{T_t f - f}{t} = g$ が成

り立つ $g \in X_2$ が存在する．f は [0,1] 上可積分なので，$l, m \in [0,1]$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\int_l^m \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} dx &= \int_l^m \frac{e^{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)ds} f(e^{\gamma t}x) - f(x)}{t} dx \\
&= \int_{le^{\gamma t}}^{me^{\gamma t}} \frac{e^{\int_0^t h(e^{-\gamma s}x)ds - \gamma t}}{t} f(x)dx - \int_l^m \frac{f(x)}{t} dx \\
&= \frac{1}{l - le^{\gamma t}} \int_{le^{\gamma t}}^{l} \frac{l(1-e^{\gamma t})}{t} e^{\int_0^t h(e^{-\gamma s}x)ds - \gamma t} f(x)dx \\
&\quad + \int_l^m \frac{e^{\int_0^t h(e^{-\gamma s}x)ds - \gamma t} - 1}{t} f(x)dx \\
&\quad - \frac{1}{m - me^{\gamma t}} \int_{me^{\gamma t}}^{m} \frac{m(1-e^{\gamma t})}{t} e^{\int_0^t h(e^{-\gamma s}x)ds - \gamma t} f(x)dx
\end{aligned}
$$

は，ほとんどすべての l, m に対し，$t \downarrow 0$ のとき

$$
-l\gamma f(l) + \int_l^m (h(x) - \gamma) f(x)dx + m\gamma f(m)
$$

に収束する ([7], Theorem 9-8 VI])．しかし，左辺は $\int_l^m g(x)dx$ に収束する．測度が 0 の集合上に f を再定義することにより，

$$
mf(m) = \int_l^m \frac{1}{\gamma}\{g(x) - (h(x) - \gamma)f(x)\}dx + lf(l),
$$

を得，これから $xf(x)$ がほとんどすべての点で導関数に $\frac{1}{\gamma}\{g(x) - (h(x) - \gamma)f(x)\}$ をもつ絶対連続関数であり，よって $(xf)'$ は X_2 に属することがわかる．ゆえに $D(A) \subset D_2$ が示せた．

逆に，$f \in D_2$ に対し，

$$
\begin{aligned}
\frac{T_t f(x) - f(x)}{t} &- (\gamma x f'(x) + h(x)f(x)) \\
&= \left(\frac{e^{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)ds} - 1}{t} - h(x) \right) f(e^{\gamma t}x) \qquad (3.2) \\
&+ h(x)(f(e^{\gamma t}x) - f(x)) + \left\{ \frac{f(e^{\gamma t}x) - f(x)}{t} - \gamma x f'(x) \right\}.
\end{aligned}
$$

を得る．(3.2) の各項が $t \to 0$ のとき，0 に収束することを示す．(3.2) の最初の項が，$t \to 0$ のとき 0 に収束することは，Theorem 1 における証明と同様に示せる．各 $\varepsilon > 0$ と各 $t(t_0 > t \geq 0)$（ただし，ある $t_0 > 0$ を固定）に対し，

$$
\int_0^{\delta_1} |f(e^{\gamma t}x) - f(x)|^2 dx < \varepsilon.
$$

を満たす $\delta_1 > 0$ が存在する．xf は絶対連続なので，f は $[\delta_1, 1]$ 上で絶対連続であり，$\|h(x)(f(e^{\gamma t}x) - f(x))\|$ は $t \to 0$ のとき 0 に収束する．

$\eta(x) = \gamma x f'(x)$ とおく．このとき $f \in D_2$ ならば $\eta \in X_2$ である．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\|\xi - \eta\| < \varepsilon$ を満たす $\xi \in C([0,1], \mathbb{C})$ が存在し，さらに $\delta > 0$ が存在して，任意の

$0 \le s \le t < \delta$ と $0 \le x \le 1$ に対して $\|\xi(e^{\gamma s}x) - \xi(e^{\gamma t}x)\| < \varepsilon$ を満たす．また，$0 \le s < \delta$ に対し，

$$\|\eta(e^{\gamma s}x) - \xi(e^{\gamma s}x)\|^2 = \int_0^1 (\eta(e^{\gamma s}x) - \xi(e^{\gamma s}x))^2 dx$$
$$= \int_0^{e^{\gamma s}} (\eta(y) - \xi(y))^2 e^{-\gamma s} dy \le e^{-\gamma\delta}\|\eta - \xi\|^2.$$

が成り立つ．よって，$0 \le s \le t < \delta$ に対し $\|\eta(e^{\gamma s}x) - \eta(e^{\gamma t}x)\|^2 \le (2 + e^{-\frac{\gamma\delta}{2}})\varepsilon$ が成り立ち，これから写像 $s \in [0,\infty) \mapsto \eta(e^{\gamma s}\cdot) \in L^2$ は連続であることがわかる．ゆえに X_2-valued Riemann integral $\int_0^t \eta(e^{\gamma s}x)ds$ が存在する．式

$$\frac{f(e^{\gamma t}x) - f(x)}{t} - \gamma x f'(x) = \frac{1}{t}\int_0^t \gamma e^{\gamma s} x f'(e^{\gamma s}x)ds - \eta(x)$$

が成り立つので，$0 < t < \delta$ に対し (3.2) の 3 番目の項のノルムは次のように書き換えられる:

$$\left\|\frac{f(e^{\gamma t}x) - f(x)}{t} - \gamma x f'(x)\right\| = \left\|\frac{1}{t}\int_0^t \eta(e^{\gamma s}x)ds - \eta(x)\right\|$$
$$\le \frac{1}{t}\int_0^t \|\eta(e^{\gamma s}x) - \eta(x)\|ds < (2 + e^{-\frac{\gamma\delta}{2}})\varepsilon$$

ただし，$\int_0^t \eta(e^{\gamma s}x)ds$ は X_2-valued Riemann integral である．

これから，$t \to 0$ のとき $\|\frac{f(e^{\gamma t}x)-f(x)}{t} - \gamma x f'(x)\|$ は 0 に収束することがわかる．よって f は $D(A)$ に属する．ゆえに $D(A) = D_2$ である．

$\alpha = \min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\}$ とおき，

$$U = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re(\lambda) < \alpha - \frac{\gamma}{2}\right\}$$

とする．仮定 $\alpha > \frac{\gamma}{2}$ により U は虚軸と交わる．$\lambda \in U$ に対し，$f_\lambda(x) = \exp(-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda - h(s)}{s}ds)$ は $D_2 = D(A)$ に属し，$Af_\lambda = \lambda f_\lambda$ すなわち f_λ は A の固有ベクトルであることが容易にわかる．よって U は A の point spectrum に含まれる開集合である．

(iii) $\phi \in X_2^* = X_2$ に対し，

$$F_\phi(\lambda) = \langle \phi, f_\lambda \rangle_{L^2} = \int_0^1 \phi(x) f_\lambda(x) dx. \tag{3.3}$$

である．$\lambda \in U$ に対し，$\dfrac{\partial f_\lambda(x)}{\partial \lambda}$ が存在することを示す．各 $x \in (0,1)$ において，$\lambda \in U$ に関して $f_\lambda(x)$ は微分可能であり，ある $0 < \theta < 1$ で，

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\nu}\{f_{\lambda+\nu}(x) - f_\lambda(x)\}\right| &= \left|\frac{1}{\nu}\left\{e^{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda+\nu-h(s)}{s}ds} - e^{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda-h(s)}{s}ds}\right\}\right| \\
&= \left|e^{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\lambda-h(s)}{s}ds}\frac{1}{\nu}\left\{e^{-\frac{1}{\gamma}\int_x^1 \frac{\nu}{s}ds} - 1\right\}\right| \\
&\le x^{\frac{\Re(\lambda)-\alpha}{\gamma}} \cdot \frac{\log x}{\gamma} x^{\frac{\theta\nu}{\gamma}},
\end{aligned}$$

である．$\frac{\Re(\lambda)-\alpha}{\gamma} > -\frac{1}{2}$ なので，$\frac{\Re(\lambda)-\alpha}{\gamma} + \frac{\nu_0}{\gamma} > -\frac{1}{2}$ を満たす十分小さい数 $\nu_0 > 0$ を選ぶことができる．さらに，$\frac{\Re(\lambda)-\alpha}{\gamma} + \frac{\nu_0}{\gamma} - b > -\frac{1}{2}$ を満たす $b > 0$ をとることができる．$x^b \log x \in C((0,1],\mathbb{C})$ と $\lim_{x\to 0} x^b \log x = 0$ により，$||x^b \log x||_\infty \leq M$ を満たす $M > 0$ が存在する．$\beta = \frac{\Re(\lambda)-\alpha}{\gamma} + \frac{\nu_0}{\gamma} - b$ とおく．このとき，$|\frac{1}{\nu}\{f_{\lambda+\nu}(x) - f_\lambda(x)\}| \leq \frac{M}{|\gamma|}x^\beta$ であり，$\beta > -\frac{1}{2}$ により関数 $\frac{M}{|\gamma|}x^\beta$ は $L^2([0,1],\mathbb{C})$ に属する．$\psi(x) = |\phi(x)|\frac{Mx^\beta}{|\gamma|}$ とおくことにより，$\psi \in L^1([0,1],\mathbb{C})$ を得，任意の ν $(0 < |\nu| \leq \nu_0)$ と $x \in [0,1]$ に対し，

$$\left|\phi(x)\frac{1}{\nu}\{f_{\lambda+\nu}(x) - f_\lambda(x)\}\right| \leq \psi(x)$$

を得る．よって Lebesgue's dominated convergence theorem を式 (3.3) に応用することができる．よって F_ϕ は解析的である．
(iv) Theorem 1 の証明の (iv) と同様にして，すべての $\lambda \in U$ に対し $F_\phi(\lambda) = 0$ ならば，$\phi = 0$ であることを示せる．

(i) から (iv) により，もし，$\min\{\Re(h(x)) \mid x \in [0,1]\} > \frac{\gamma}{2}$ ならば，Theorem A のすべての仮定が満たされる．よって $\{T_t\}_{t\geq 0}$ は Theorem A により chaotic である．

□

Theorem 1 の系と同様にして次の系を得る．

Corollary. Y_2 を空間 $L^2([1,\infty),\mathbb{C})$ とする．次の偏微分方程式の初期値問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \gamma x \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

ただし，$\gamma > 0$, $f \in Y_2$, $h \in C([1,\infty),\mathbb{C})$ であり，$\lim_{x\to\infty} h(x)$ が存在するとする．このとき，この偏微分方程式の *solution semigroup* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ $(T_t f(x) = \exp\left\{\int_0^t h(e^{\gamma(t-s)}x)\,ds\right\} f(e^{\gamma t}x))$ は Y_2 上 C_0-半群となる．

さらにもし，$\inf\{\Re(h(x)) \mid x \in [1,\infty)\} > \frac{\gamma}{2}$ ならば，$\{T_t\}_{t\geq 0}$ は *chaotic* である．

4 admissible weighted function spaces 上の chaotic translation semigroups に関する $C_0(I,\mathbb{C})$ 上のカオス的半群

I を区間 $[0,\infty)$ とし，$\widetilde{X} = \{f \in C_0(I,\mathbb{C}) | \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ にたいし次の偏微分方程式を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x)u \\ u(0,x) = f(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

ただし，h は I 上の有界連続関数で $f \in \widetilde{X}$ とする．

(4.1) の古典解の表現形式 $e^{\int_x^{x+t} h(s)ds} f(x+t)$ を用いて，$\widetilde{X}$ 上の有界線形作用素 $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ を次のように定義する:

$$\widetilde{T}_t f(x) = e^{\int_x^{x+t} h(s)ds} f(x+t) \qquad \text{for} \quad f \in \widetilde{X}.$$

[1] により，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ を偏微分方程式 (4.1) に対する $\widetilde{X}$ 上の *the solution semigroup* とよぶ.

もし λ が C_0-半群 $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ の生成作用素 A の固有値ならば，固有関数 f_λ の形は，$f_\lambda(x) = \text{const.} \times e^{\lambda x - \int_0^x h(s)ds}$ であるので，虚軸と交わる A の point spectrum に含まれる開集合が存在するのは不可能であるように思える．よって，Theorem A を適用する方法で $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ が chaotic であることを示すのは不可能である．ゆえに admissible weight function ρ によって定義された空間 $C_{0,\rho}(I,\mathbb{C})$ を導入する.

I 上の *admissible weight function* とは，可測関数 $\rho : I \to \mathbb{R}$ で，次をみたす:

(i) すべての $x \in I$ に対し，$\rho(x) > 0$;

(ii) すべての $x \in I$ と $t > 0$ に対し，$\rho(x) \leq Me^{\omega t}\rho(t+x)$ を満たす定数 $M \geq 1$ と $\omega \in \mathbb{R}$ が存在する.

$I = [0,\infty)$ 上の admissible weight function ρ に対し，次の関数空間を考える:

$$C_{0,\rho}(I,\mathbb{C}) = \left\{ f : I \to \mathbb{C} \mid f \text{ continuous}, \ \lim_{x\to\infty} \rho(x)f(x) = 0 \right\}$$

$(\|f\|_\rho = \sup_{x\in I} |f(x)|\rho(x))$

X を admissible weight function ρ により定義される空間 $C_{0,\rho}(I,\mathbb{C})$ とする．$t \geq 0$ に対し，$T_t \in \mathfrak{L}(X)$ を $f \in X$ に対し

$$T_t f(x) = f(x+t)$$

と定義する．$\{T_t\}_{t\geq 0}$ を X 上の *translation semigroup* と呼ぶ.

$\rho(x) = e^{-\int_0^x h(s)ds}$ とおく．h は有界関数なので $h(x) \leq \omega x \in I$ を任意の $x \in I$ に対して満たす定数 $\omega > 0$ が存在する．よって

$$\int_x^{x+t} h(s)ds \leq \omega t$$

が成り立つ．この不等式を書き換えると，

$$e^{-\int_0^x h(s)ds} \leq e^{\omega t} \cdot e^{-\int_0^{x+t} h(s)ds}$$

を得る．よって h の連続性により ρ は連続で，$\rho(x) \leq e^{\omega t}\rho(x+t)$ が成り立つので，ρ は admissible weight function である.

ρ の定義により，等式 $-\dfrac{\rho'(x)}{\rho(x)} = h(x)$ が成立．よって偏微分方程式 (4.1) は次のように書き換えられる:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\rho'(x)}{\rho(x)} u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$

ρ は continuous admissible weight function である．よって

$$u(t,x) = \widetilde{T}_t f(x) = \frac{\rho(x)}{\rho(x+t)} f(x+t) \in C_0(I, \mathbb{C}). \tag{4.2}$$

を得る．$f \in X$ と $x \in I$ に対し，作用素 $\varphi : X \to \widetilde{X}$ を

$$\varphi(f)(x) = \rho(x) f(x)$$

と定義する．

次のダイアグラムを可換にするのを調べるのは容易である：
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T_t} & X \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi \\ \widetilde{X} & \xrightarrow[\widetilde{T}_t]{} & \widetilde{X} \end{array}.$$

すべての $x \in I$ に対し，$\rho(x) > 0$ なので，φ は isometric isomorphism である．よって次を得る．

Proposition 3. X を空間 $C_{0,\rho}(I, \mathbb{C})$ （ ρ は *continuous admissible weight function* ）とし，$\{T_t\}_{t \geq 0}$ を X 上の *translation semigroup* とする．$\widetilde{X}$ を空間 $C_0(I, \mathbb{C})$ とし，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t \geq 0}$ を(4.2) により定義された半群 とする．このとき次を示すことができる．

(1) $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が X 上 *hypercyclic* であることと，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t \geq 0}$ が $\widetilde{X}$ 上 *hypercyclic* であることは同値
(2) $\{T_t\}_{t \geq 0}$ が X 上 *chaotic* であることと，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t \geq 0}$ が $\widetilde{X}$ 上 *chaotic* であることは同値

次の Theorem 4 を証明するために次の結果を用いる．

Theorem B ([8]). ρ を *admissible weight function* とし，X を $C_{0,\rho}(I, \mathbb{C})$ とする．ただし $I = [0, \infty)$．このとき次は同値:

(i) X 上の *translation semigroup* $\{T_t\}_{t \geq 0}$ は *chaotic;*

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $l > 0$ に対し，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\rho(l + nP) < \varepsilon$ となる $P > 0$ が存在する．

Theorem 4. $\widetilde{X} = C_0(I, \mathbb{C})$ （ただし $I = [0, \infty)$）とする．次の偏微分方程式を考える:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + h(x) u \\ u(0, x) = f(x) \quad \textit{with some} \quad f \in \widetilde{X}, \end{cases}$$

ただし h は I 上の有界連続関数とする．

このとき *solution semigroup* $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t \geq 0}$ は $\widetilde{X}$ 上 C_0-半群となる．さらにもし，$h(x)$ が $\int_0^\infty h(s) ds = \infty$ を満たすならば，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t \geq 0}$ は *chaotic* である．

Proof. $\widetilde{T}_t f(x) = \dfrac{\rho(x)}{\rho(x+t)} f(x+t)$ により，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ が半群であることがわかる．$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ の強連続性を示すため，$t=0$ での強連続性を示せば十分である．$\rho(x) = e^{-\int_0^x h(s)ds}$ とおく．h は有界関数であるので，任意の $x \in I$ に対し $h(x) \leq \omega$ を満たす定数 $\omega > 0$ が存在する．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$|f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3e^{\omega}}$ を $x > R$ に対して満たす $R > 0$ が存在する．このとき，$0 \leq t < 1$ と $x > R$ に対して $|u(t,x)| = |\dfrac{\rho(x)}{\rho(x+t)} f(x+t)| \leq e^{\omega t}|f(x+t)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$ が成り立つ．$u(t,x)$ は $[0,1]\times[0,R]$ 上一様連続なので，$\delta(1>\delta>0)$ が存在して，$0 \leq t < \delta$ と $x > 0$ に対して $|u(t,x) - u(0,x)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ を満たす．よって $0 \leq t < \delta$ に対し

$$||\widetilde{T}_t f - f|| \leq \sup_{x\in[0,R]} |u(t,x) - u(0,x)| + \sup_{x\in[R,\infty)} |u(t,x) - u(0,x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

が成立する．よって $\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ は C_0-半群である．

次に，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ は $C_0(I,\mathbb{C})$ 上 chaotic であることを示す．仮定 $\int_0^\infty h(s)ds = \infty$ により，$\lim_{x\to\infty} \rho(x) = 0$ を得る．Theorem B により，translation semigroup $\{T_t\}_{t\geq 0}$ は $C_{0,\rho}(I,\mathbb{C})$ 上 chaotic である．ただし $T_t f(x) = f(x+t)$ である．Proposition 3 により，$\left\{\widetilde{T}_t\right\}_{t\geq 0}$ は $C_0(I,\mathbb{C})$ 上 chaotic である．□

参考文献

[1] W. Desch, W. Schappacher and G. F. Webb, *Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators,* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **17** (1997), 793-819.

[2] K. J. Engel and R. Nagel, One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations (Graduate Texts in Math. **194**), Springer, 1999.

[3] A. Lasota and M. C. Mackey, Chaos, Fractals, and Noise, Stochastic Aspect of Dynamics (Applied Math. Sci. **97**), Springer, 1994.

[4] A. Lasota, M. C. Mackey and M. Ważewska-Czyzewska, *Minimizing therapeutically induced anemia,* J. Math. Biology **13** (1981), 149-158.

[5] M. C. Mackey and P. Dörmer, *Continuous maturation of proliferating erythoid precursers,* Cell Tissue Kinet **15** (1982), 381-392.

[6] M. Matsui and F. Takeo, *Supercyclic Translation Semigroups of Linear Operators,* RIMS Koukyuroku **1186** (2001), 49-56.

[7] A. E. Taylor, General Theory of Functions and Integration, Blaisdell Pub. Co. 1965.

[8] M. Yamada and F. Takeo, *Chaotic semigroups of linear operators,* RIMS Koukyuroku **1100** (1999), 8-18.