数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 121-123



# Wirtinger 型不等式に関する一考察

山形大・工　高橋眞映 (Sin-Ei Takahasi)
山形大・工　三浦　毅 (Takeshi Miura)

楕円型微分方程式に関連する Wirtinger 型不等式、微分幾何に関連があると言われる Beesack の不等式を統一的に論ずることが我々の目的である。この発想は我々が最初という訳ではなく、調べてみると、近年 Florkiewicz と Wojteczek (Demonstratio Math., 32(1999), 495-502) によっても、これらの不等式の統一的な議論がなされている。しかしながら、我々の方法は彼らとは、全く異なったものである。

はじめにこの二つの不等式を掲げよう：

Wirtinger's inequality :

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \le \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'(t)^2 dt \ \text{ if } \ f(0) = f(1) = 0,$$

$$\int_0^1 f(t)^2 dt \le \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 f'(t)^2 dt \ \text{ if } \ f(0) = 0$$

Beesack's inequality :

$$\int_0^1 f(t)^2 t^4 dt \le \frac{4}{25}\int_0^1 f'(t)^2 t^6 dt \ \text{ if } \ f(0) = f(1) = 0$$

注： Beesack の不等式が微分幾何に関連があるというのは [ 不等式への招待：大関信雄・大関清太、近代科学社、p. 145 ] を参照せよ。

先ず $H$ を実 Hilbert 空間とし、関数 $\varphi, \psi$ を以下の性質をもつものとする。

(1) $\varphi \in C^1((0, 1], \boldsymbol{R})$ such that $\lim_{t\downarrow 0} t\varphi(t)$ and $\lim_{t\downarrow 0} t^2\varphi'(t)$ exist.

(2) $\psi \in C^1([0, 1], \boldsymbol{R})$.

このとき次の定理が成り立つ。

**定理．** 関数 $x, y \in C^1([0, 1], H)$ は $x(0) = y(0) = 0$ and $\varphi(1)\psi(1) < x(1), y(1) > = 0$ を満たすとする。このとき次式が成り立つ。

$$\left|\int_0^1 (\varphi\psi)'(t) < x(t), y(t) > dt\right| \le \frac{1}{2}\left[\int_0^1 \varphi^2(t)(\| x(t)\|^2 + \| y(t)\|^2)dt + \int_0^1 \psi^2(t)(\| x'(t)\|^2 + \| y'(t)\|^2)dt\right]$$

ただし、上式の等号が成立する必要十分条件は $(0, 1]$ 上で $\varphi x + \psi y' = \psi x' + \varphi y = 0$ または $-\varphi x + \psi y' = \psi x' - \varphi y = 0$ のどちらかが成り立つことである。

**略証。** Put

$$q(t) = \| \varphi(t)x(t) + \psi(t)y'(t)\|^2 + \| \psi(t)x'(t) + \varphi(t)y(t)\|^2 \quad (0 < t \le 1).$$

Then we see from (1) and (2) that the integrals $\int_0^1 q(t)dt$ and $\int_0^1 \varphi^2(t)(\| x(t)\|^2 + \| y(t)\|^2)dt$ exist and so

$$2\int_0^1 \varphi(t)\psi(t) < x(t), y(t) >' dt = \int_0^1 q(t)dt - \int_0^1 \varphi^2(t)(|x(t)|^2 + |y(t)|^2)dt$$
$$- \int_0^1 \psi^2(t)(|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2)dt$$

holds. Note also that

$$\int_0^1 \varphi(t)\psi(t) < x(t), y(t) >' dt = - \int_0^1 (\varphi\psi)'(t) < x(t), y(t) > dt$$

holds. Therefore by the above two equalities, we have

$$2\int_0^1 (\varphi\psi)'(t) < x(t), y(t) > dt \leq \int_0^1 \varphi^2(t)(|x(t)|^2 + |y(t)|^2)dt + \int_0^1 \psi^2(t)(|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2)dt.$$

The equality is attained if and only if $\int_0^1 q(t)dt = 0$, that is

$$\varphi(t)x(t) + \psi(t)y'(t) = \psi(t)x'(t) + \varphi(t)y(t) = 0$$

for all $t \in (0, 1]$. Replacing $\varphi$ by $-\varphi$ in the above argument, we can obtain the desired result. 証終

定理で特に $x = y$ として、次の系を得る。

系１． 関数 $x \in C^1([0, 1], H)$ が $x(0) = \varphi(1)\psi(1)x(1) = 0$ を満たせば、次式が成り立つ。

$$\int_0^1 ((\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t))|x(t)|^2 dt \leq \int_0^1 \psi^2(t)|x'(t)|^2 dt.$$

上式の等号が成立する必要十分条件は $\varphi(t)x(t) + \psi(t)x'(t) = 0$ $(0 < t \leq 1)$ である。

注意 1. $0 < \alpha < \pi$, $\varphi_\alpha(t) = \cot \alpha t$ $(0 < t \leq 1)$, $\psi_\alpha(t) = -\frac{1}{\alpha}$ $(0 < t \leq 1)$ とすると、$\varphi_\alpha, \psi_\alpha$ は条件 (1), (2) を満たし、$(\varphi_\alpha\psi_\alpha)'(t) - \varphi_\alpha{}^2(t) = 1$ $(0 < t \leq 1)$ が成り立つ。従って系 1 から Hilebert space case に対する Wirtinger's inequality :

(3) $$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 |x'(t)|^2 dt \quad (x \in C^1([0, 1], H) \text{ with } x(0) = x(1) = 0)$$

が成り立つ。更に、$\varphi_\alpha(1) = 0$ if $\alpha = \frac{\pi}{2}$ であるから、

(4) $$\int_0^1 |x(t)|^2 dt \leq \frac{4}{\pi^2}\int_0^1 |x'(t)|^2 dt \quad (x \in C^1([0, 1], H) \text{ with } x(0) = 0)$$

が成り立つ。しかしながら後で分かるように (4) は任意の実 Banach 空間で成り立つ事が分かる。

注意 2． $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\lambda \geq -1$ with $\lambda \neq -\frac{1}{2}$, $\varphi(t) = \alpha t^\lambda$ $(0 < t \leq 1)$, $\psi(t) = t^{\lambda+1}$ $(0 \leq t \leq 1)$ とすると、$\varphi, \psi$ は条件 (1), (2) を満たし、$(\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t) = (\alpha(2\lambda + 1) - \alpha^2)t^{2\lambda}$ $(0 < t \leq 1)$ が成り立つ。更に、$\max_{\alpha \in \boldsymbol{R}} (\alpha(2\lambda + 1) - \alpha^2) = (2\lambda + 1)^2 / 4$ であるから、系 1 より、

(5) $$\int_0^1 |x(t)|^2 t^{2\lambda} dt \leq \frac{4}{(2\lambda + 1)^2}\int_0^1 |x'(t)|^2 t^{2(\lambda+1)} dt \quad (x \in C^1([0, 1], H) \text{ with } x(0) = x(1) = 0)$$

が成り立つ。 (5) において、$\lambda = 2$ and $H = \boldsymbol{R}$ とすると、Beesack's inequality を得る。

系２．$E$ を実 Banach 空間、$x \in C^1([0,1], E)$ with $x(0) = 0$ とする。更に、$\varphi(1)\psi(1) = 0$ and $\varphi^2(t) < (\varphi\psi)'(t)$ $(0 < t < 1)$ を仮定する。このとき、

$$\int_0^1 ((\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t))\| x(t) \|^2 dt \le \int_0^1 \psi^2(t)\| x'(t) \|^2 dt$$

が成り立つ。上式の等号が成立する必要十分条件は
$\varphi(t)\| x(t) \| + \psi(t)\| x'(t) \| = 0$ $(0 < t < 1)$ and $\frac{d}{dt}\| x(t) \| = \| x'(t) \|$ $(0 < t < 1)$ である。

略証。Set $f(t) = \int_0^t \| x'(\tau) \| d\tau$ $(0 \le t \le 1)$. Then $f'(t) = \| x'(t) \|$ $(0 \le t \le 1)$ and $f(0) = 0$. Then Corollary 1 implies that

$$\int_0^1 ((\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t))f(t)^2 dt \le \int_0^1 \psi^2(t)f'(t)^2 dt = \int_0^1 \psi^2(t)\| x'(t) \|^2 dt.$$

Note that $x(t) = \int_0^t x'(\tau)d\tau$ $(0 \le t \le 1)$ and then $\| x(t) \| \le \int_0^t \| x'(\tau) \| d\tau = f(t)$ $(0 \le t \le 1)$. Therefore $\left[(\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t)\right]\| x(t) \|^2 \le \left[(\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t)\right]f(t)^2$ $(0 \le t \le 1)$ by phypothesis and hence we obtain the desired inequality. 証終

注意３．注意１と系２から、(4) 式は任意の実 Banach 空間で成立することが分かる。

問題１．(３) 式は任意の実 Banach 空間で成立するか？

注意４．$\alpha \in \boldsymbol{R}$, $-1 \le \lambda < -\frac{1}{2}$, $\varphi(t) = \frac{2\lambda + 1}{2} t^\lambda$ $(0 < t \le 1)$, $\psi(t) = (1 - t)t^{\lambda+1}$ $(0 \le t \le 1)$ とするとき、$\varphi, \psi$ は条件 (1), (2) を満たし、更に $(\varphi\psi)'(t) - \varphi^2(t) \ge (2\lambda + 1)^2 t^{2\lambda} / 4 > 0$ $(0 < t < 1)$ 且つ $\psi(1) = 0$ が成り立つ。従って、$E$ を任意の実 Banach 空間とするとき、系２から、

$$\int_0^1 \| x(t) \|^2 t^{2\lambda} dt \le \frac{4}{(2\lambda + 1)^2} \int_0^1 \| x'(t) \|^2 t^{2(\lambda+1)} dt \quad (x \in C^1([0,1], E) \text{ with } x(0) = 0)$$

が成り立つ。

問題２．$\lambda < -\frac{1}{2}$ のとき、任意の実 Banach 空間に対して、(5) 式はどうなるか考察せよ。

更に境界条件を変更した次の結果が系２から導かれる。

系３．$\lambda \in C^1([0,1], \boldsymbol{R})$ は $\lambda'(t) < 0$ $(0 < t < 1)$, $\lambda(0) = 1, \lambda(1) = 0$ を満たすとする。$E$ を実 Banach 空間、$x \in C^1([0,1], E)$ は $x(1) = 0$ を満たすとする。更に $\varphi(1)\psi(1) = 0$ かつ $\varphi^2(t) < (\varphi\psi)'(t)$ $(0 < t < 1)$ を仮定する。このとき、

$$\int_0^1 \frac{\varphi\psi)'(\lambda^{-1}(t)) - \varphi^2(\lambda^{-1}(t))}{-\lambda'(\lambda^{-1}(t))}\| x(t) \|^2 dt \le \int_0^1 -\lambda'(\lambda^{-1}(t))\,\psi^2(\lambda^{-1}(t))\| x'(t) \|^2 dt$$

が成り立つ。