数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 38-48

Approximating Solutions of Maximal Monotone Operators and m-Accretive Operators and Applications

高橋　渉 (WATARU TAKAHASHI)

東京工業大学大学院情報理工学研究科数理・計算科学専攻

1　はじめに

H を Hilbert 空間とし，g を H から $(-\infty,\infty]$ に値をとる proper で凸な下半連続関数とする．このとき，我々は

$$g(z)=\min\{g(x):x\in H\} \tag{1}$$

となる $z\in H$ を求めよ，という凸最小化問題を考えることができる．このような g に対して，H 上の集合値写像 ∂g を，$x\in H$ に対して

$$\partial g(x)=\{x^*\in H:g(y)\geqq g(x)+(x^*,y-x),\ y\in H\}$$

で定義し，これを g の劣微分と呼ぶ．H 上の集合値作用素 $A\subset H\times H$ が，$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$ に対して

$$(x_1-x_2,y_1-y_2)\geqq 0 \tag{2}$$

を満たし，かつ任意の $\lambda>0$ に対して，$R(I+\lambda A)=H$ を満たすならば，A は m-増大といわれる．ただし，$R(I+\lambda A)$ は $I+\lambda A$ の値域を表す．また，$A\subset H\times H$ が (2) を満たし，かつ (2) を満たす他の集合値作用素 $B\subset H\times H$ に対して

$$A\subset B\Rightarrow A=B$$

であるならば，A は極大単調であるといわれる．Proper で凸な下半連続関数 $g:H\to(-\infty,\infty]$ の劣微分 ∂g は m-増大でかつ極大単調になることが知られている．A を m-増大作用素とすると，任意の $\lambda>0$ に対して，A の resolvent

$$J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$$

が定義されるが，J_λ は H から H への非拡大写像となる．すなわち，$x,y\in H$ に対して

$$\|J_\lambda x-J_\lambda y\|\leqq\|x-y\|$$

となる．また，∂g に対しては $J_\lambda=(I+\lambda\partial g)^{-1}$ とすると

$$\begin{aligned}0\in\partial g(x_0)\ &\Leftrightarrow g(x_0)=\min\{g(x):x\in H\}\\ &\Leftrightarrow J_\lambda x_0=x_0\ (^\forall\lambda>0)\end{aligned}$$

が成り立つ．(1) の解を求めるよく知られた方法として，Martinet [23] によって導入された proximal point algorithm というものがある．このアルゴリズムは，resolvent J_λ に関係がある．すなわち

$$J_\lambda x = \operatorname{argmin}\left\{ f(z) + \frac{1}{2\lambda}\|z-x\|^2 : z \in H \right\}$$

である (Moreau[25] を参照せよ).

Proximal point algorithm とは，$\{\lambda_n\} \subset (0,\infty)$ とするとき，$x_1 \in H$ を初期点とし

$$x_{n+1} = J_{\lambda_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で帰納的に点列 $\{x_n\}$ を生成し，(1) の解を求める点列的構成法のことである (Rockafellar[30] を参照せよ).

一方，我々は，非拡大写像の 2 つの不動点近似法を知っている．1 つは Halpern [12] によって導入された点列的近似法で，Hilbert 空間 H 上で定義された非拡大写像 T に対して

$$x_1 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

による点列 $\{x_n\}$ で T の不動点を求める方法である．他の 1 つは Mann [22] によって導入された

$$x_1 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha)Tx_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

による点列 $\{x_n\}$ で T の不動点を求める近似法である．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ である．

ここでは，上の不動点近似法のアイデアを用いて Hilbert 空間上で定義された m-増大作用素の零点を求める点列的近似法を，resolvent による proximal point algorithm を用いて強収束と弱収束の形で研究している．強収束定理に関してはまったく新しいものであり，弱収束定理に関しては Rockafellar の定理 [30] の拡張定理である．そしてその応用として，凸関数の minimizer を求める点列的近似法を議論している．Hilbert 空間では，集合値作用素が m-増大であることと極大単調であることは同じである．しかしながら，Banach 空間ではまったく違ったものになる．そこで，第 4 節ではまず Banach 空間における m-増大作用素の零点を求める点列的近似法を議論している．そして resolvent の強収束定理と弱収束定理を，m-増大作用素の resolvent が非拡大写像となることを用いて証明している．第 5 節では極大単調作用素の零点を求める近似法を resolvent と距離射影を用いて議論している．極大単調作用素の resolvent は一般的には非拡大写像にはならない．だから極大単調作用素の零点を求めるのに第 4 節の手法は使えない．そこに第 4 節とは違った難しさがある．第 5 節では未解決問題も述べている．

2 準備

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $x^*(x)$ または (x, x^*) で表す．E における点列 $\{x_n\}$ が x に強収束することを $x_n \to x$ で表し，弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す．

E の凸性の modulus δ は，$0 \leqq \varepsilon \leqq 2$ となる ε に対して

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{ 1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \leqq 1, \|y\| \leqq 1, \|x-y\| \geqq \varepsilon \right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは，$\varepsilon > 0$ に対して，$\delta(\varepsilon) > 0$ がつねに成り立つときをいう．E の元 x に対して，E から E^* への集合値写像 J が

$$J(x) = \{x^* \in E^* : (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の duality 写像という．
$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して，極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{3}$$

を考えよう．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x, y \in U$ 対して，(3) がつねに存在するときをいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(3) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(3) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．
E が Gâteaux 微分可能なノルムをもてば，E 上の duality 写像は一価写像になる．
Banach 空間 E が Opial's condition [26] を満たすとは，$x_n \rightharpoonup x$ かつ $x \neq y$ であるならば

$$\liminf_{n \to \infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n \to \infty} \|x_n - y\|$$

となるときをいう．
E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ としよう．A が増大作用素 (accretive operator) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して，つねに $(y_1 - y_2, j) \geqq 0$ となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう．ただし，J は E の duality 写像である．$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $\lambda > 0$ に対して A の resolvent と呼ばれる J_λ と吉田近似と呼ばれる A_λ がつぎのように定義される．

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}, \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda).$$

また，すべての $\lambda > 0$ に対して $\overline{D(A)} \subset R(I + \lambda A)$ が成立するならば，A は値域条件 (range condition) を満たすといわれる．このとき，$A^{-1}0 = \{x \in D(A) :\ 0 \in Ax\}$ と A の resolvent J_r の不動点集合 $F(J_r)$ の間には $F(J_r) = A^{-1}0$ という関係がある．増大作用素 $A \subset E \times E$ が，すべての $\lambda > 0$ に対して $E = R(I + \lambda A)$ を満たすならば m-増大といわれる．m-増大作用素 A が値域条件を満たすことは定義から明らかである．また，つぎの定理 [45] は第 4 章の定理の証明で本質的となる．

定理 2.1 ($r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束性) E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r > 0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0 \in R(A)$ ならば，任意の $x \in C$ に対して $\lim_{t \to \infty} J_t x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

$A \subset E \times E^*$ とする．A が単調 (monotone) であるとは，$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対して

$$(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \geqq 0$$

がつねに成り立つときをいう．単調作用素 $A \subset E \times E^*$ が極大 (maximal) であるとは，A を真に含む単調作用素 $B \subset E \times E^*$ が存在しないときをいう．すなわち，$B \subset E \times E^*$ が単調で，かつ $A \subset B$ であるならば $A = B$ となるときをいう．つぎの定理はよく知られている [43]

定理 2.2 Eを回帰的なBanach空間とし，$J: E \to E^*$をduality写像とする．Aを単調作用素とする．このとき，Aが極大となるための必要十分条件は，すべての$r > 0$に対して

$$R(J + rA) = E^*$$

となることである．

3 Hilbert空間におけるm-増大作用素の零点近似法

最近，上村–高橋[15]はm-増大作用素の零点を求めるproximal point algorithmをつぎの形で研究し，未解決とされていた強収束定理を得た．

定理 3.1 ([15]) HをHilbert空間とし，$A \subset H \times H$をm-増大作用素とする．$x \in H$に対して，点列$\{x_n\}$を$x_1 = x$かつ

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$と$\{r_n\} \subset (0, \infty)$は

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．このとき$A^{-1}0 \neq \phi$ならば$\{x_n\}$は$Px \in A^{-1}0$に強収束する．ただし，PはHから$A^{-1}0$の上への距離射影である．

上の定理3.1をRockafellar [30]の定理と比較してみるとよい．

定理 3.2 ([15]) HをHilbert空間とし，$f: H \to (-\infty, \infty]$をproperで下半連続な凸関数とする．$x \in H$に対して，点列$\{x_n\}$を$x_1 = x$および

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$J_{r_n} x_n = \operatorname{argmin} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 : z \in H \right\}$$

で定義する．ただし$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$と$\{r_n\} \subset (0, \infty)$は

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \quad \lim_{n \to \infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．もし$(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ならば$\{x_n\}$は$x$に一番近い$f$のminimizerに強収束する．さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n (f(x) - f(v)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n} \|J_{r_n} x_n - v\| \|J_{r_n} x_n - x_n\|$$

が成り立つ．

つぎの定理はMannタイプのproximal point algorithmと関係するものである．

定理 3.3 ([15]) H を Hilbert 空間とし，$A \subset H \times H$ を m-増大作用素とする．$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ を

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすとする．このとき，$x_1 = x \in H$ に対して点列 $\{x_n\}$ を

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する．もし $A^{-1}0 \neq \emptyset$ ならば $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元に弱収束する．

つぎは，Mann タイプの proximal point algorithm である．

定理 3.4 ([15]) H を Hilbert 空間とし，$f : H \to (-\infty, \infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．このとき，$x \in H$ に対して，点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$
$$J_{r_n} x_n = \operatorname{argmin} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 : z \in H \right\}$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\alpha_n \in [0,k] \ (0 < k < 1), \quad \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．もし $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ ならば $\{x_n\}$ は f の minimizer に弱収束する．さらに

$$f(x_{n+1}) - f(v) \leqq \alpha_n (f(x_n) - f(v)) + \frac{1-\alpha_n}{r_n} \|J_{r_n} x_n - v\| \|J_{r_n} x_n - x_n\|$$

が成り立つ．

4 Banach 空間での m-増大作用素の零点近似法

Hilbert 空間では，$A \subset H \times H$ が m-増大作用素であることと極大単調作用素であることは同値であるが，Banach 空間では異なる．そこで，まず $A \subset E \times E$ が m-増大作用素である場合に定理 3.1 と定理 3.3 を Banach 空間に拡張することを試みてみよう．

定理 4.1 ([14]) E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで $Px = u$ とおくと，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．

定理 4.1 を用いると，つぎの m-増大作用素の零点を求める強収束定理が得られる．

定理 4.2 E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする．また，$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすものとする．このとき $A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで $Px = u$ とおくと，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．

定理 4.3 ([14]) E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 z に弱収束する．

定理 4.3 を用いると，つぎの m-増大作用素の零点を求める弱収束定理が得られる．

定理 4.4 E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を m-増大作用素とする．また，$x_1 = x \in C$ とし

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする．ただし $\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \quad \liminf_{n\to\infty} r_n > 0$$

を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \phi$ であるならば，点列 $\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 z に弱収

5 Banach空間での極大単調作用素の零点近似法

Eを回帰的かつ狭義凸なBanach空間とし，E^*をそのdual空間とする．また$A \subset E \times E^*$を極大単調作用素とする．このとき，定理2.2より任意の$x \in E$と$r > 0$に対して

$$J(x_r - x) + rAx_r \ni 0 \tag{4}$$

は少なくとも一つの解$x_r \in D(A)$をもつ．また，Eが狭義凸なので，(4)の解は一意である．そこで，$x \in E$と$r > 0$に対して，AのresolventJ_rと吉田近似A_rを

$$x_r = J_r x, \quad A_r x = \frac{1}{r} J(x - x_r)$$

で定義する．Solodov-Svaiter[34]の結果に動機づけられて，大沢-高橋[27]につぎの定理を証明した．

定理 5.1 ([27]) EをGâteaux微分可能なノルムをもつ一様凸なBanach空間とし，$A \subset E \times E^*$を$A^{-1}0 \neq \phi$となる極大単調作用素とする．また，Eの点列$\{x_n\}$を

$$\begin{aligned}
&x_1 = x \in E,\\
&y_n = J_{r_n} x_n,\\
&C_n = \{z \in E : (y_n - z, J(x_n - y_n)) \geqq 0\},\\
&D_n = \{z \in E : (x_n - z, J(x_1 - x_n)) \geqq 0\},\\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

で定義する．このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ならば，$\{x_n\}$は$A^{-1}0$の点$P_{A^{-1}0}(x_1)$に強収束する．

この定理を用いると，Banach空間上の凸関数fのminimizerを求めるつぎの強収束定理を証明することができる．

定理5.2 EをGâteaux微分可能なノルムをもつ一様なBanach空間とし，$f : E \to (-\infty, \infty]$を$(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$となるproperで凸な下半連続関数とする．また，Eの点列$\{x_n\}$をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned}
&x_1 = x \in E,\\
&y_n = \operatorname{argmin}\left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 : \ z \in E \right\},\\
&C_n = \{z \in E : (y_n - z, J(x_n - y_n)) \geqq 0\},\\
&D_n = \{z \in E : (x_n - z, J(x_1 - x_n)) \geqq 0\},\\
&x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ならば，$\{x_n\}$は$x_1$に一番近い$(\partial f)^{-1}0$の点に強収束する．

一方，上村-高橋[17]は，Hilbert空間におけるSolodov-Svaiter[34]の結果をつぎのような形でBanach空間に拡張した．

定理 5.3 ([17]) E および E^* を一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} &x_1 = x \in E, \\ &0 = v_n + \frac{1}{r_n}(Jy_n - Jx_n), \ v_n \in Ay_n, \\ &C_n = \{z \in E : (y_n - z, v_n) \geqq 0\}, \\ &D_n = \{z \in E : (x_n - z, Jx_0 - Jx_n) \geqq 0\}, \\ &x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ ならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点に強収束する．

この定理を用いると，Banach 空間上の凸関数 f の minimizer を求める強収束定理はつぎのようになる．

定理 5.4 E および E^* を一様凸な Banach 空間とし，$f : E \to (-\infty, \infty]$ を $(\partial f)^{-1}0 \neq \phi$ となる proper で凸な下半連続関数とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ をつぎのように定義する．

$$\begin{aligned} &x_1 = x \in E, \\ &y_n = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z\|^2 - \frac{1}{r_n}(z, Jx_n) : \ z \in E\right\}, \\ &C_n = \{z \in E : (y_n - z, Jx_n - Jy_n) \geqq 0\}, \\ &D_n = \{z \in E : (x_n - z, Jx_0 - Jx_n) \geqq 0\}, \\ &x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n}(x_1) \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

このとき，$\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ ならば，$\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の点に強収束する．

定理 5.2 と定理 5.4 において

$$\begin{aligned} &y_n = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z - x_n\|^2 : \ z \in E\right\}, \\ &y_n = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r_n}\|z\|^2 - \frac{1}{r_n}(z, Jx_n) : \ z \in E\right\} \end{aligned}$$

は，劣微分に関する計算公式 [40] を用いると

$$\begin{aligned} &0 \in \partial f(y_n) + \frac{1}{r_n}J(y_n - x_n), \\ &0 \in \partial f(y_n) + \frac{1}{r_n}J(y_n) - \frac{1}{r_n}Jx_n \end{aligned}$$

となる．E が Hilbert 空間の場合においては duality 写像 J が $Jx = x$ であるので上の 2 つの式は同じことになる．

この節の最後に，Banach 空間における極大作用素の零点を求める未解決の問題を 2 つあ

問題1 E および E^* を一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in E,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \ \lim_{n\to\infty} r_n = \infty$$

を満たすとする．このとき，$\{x_n\}$ は $P_{A^{-1}0}(x_1)$ に強収束するだろうか．

問題2 E および E^* を一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を $A^{-1}0 \neq \phi$ となる極大単調作用素とする．また，E の点列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = x \in E,$$
$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義する．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1, \ \liminf_{n=1} r_n > 0$$

を満たすとする．このとき，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の点に弱収束するだろうか．

REFERENCES

1. S. Atsushiba, A. T. Lau and W. Takahashi, Nonlinear strong ergodic theorems for commutative nonexpansive semigroups on strictly convex Banach spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **1** (2000), 213-231.
2. S. Atsushiba, N. Shioji and W. Takahashi, Approximating common fixed points by the Mann iteration process in Banach spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **1** (2000), 351-361.
3. S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, *Indian J. Math.*, **41** (1999), 435-453.
4. S. Atsushiba and W. Takahashi, A nonlinear strong ergodic theorem for nonexpansive mappings with compact domains, *Math. Japonica*, **52** (2000), 183-195.
5. S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorem for one-parameter nonexpansive semigroups with compact domains, to appear.
6. J. B. Baillon, Un théorème de type ergodic pour les contraction non linéaires dans un espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **280** (1975), 1511-1514.
7. H. Brèzis, *Opérateurs maximaux monotones*, Mathematics Studies No.5, North-Holland, Amsterdam, 1973.
8. R. E. Bruck, A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces, *Israel J. Math.*, **32** (1979), 107-116.
9. G. Crombez, Image recovery by convex combinations of projections, *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (1991), 413-419.
10. C. M. Dafermos and M. Slemrod, Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups, *J. Funct.* Anal., **13** (1973), 97-106.

11. J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Mathematics 485, Springer, Berlin, 1975.

12. B. Halpern, Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 957-961.

13. N. Hirano, K. Kido and W. Takahashi, Nonexpansive retractions and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, *Nonlinear Analysis*, **12** (1988), 1269-1281.

14. S.Kamimura and W.Takahashi, Iterative schemes for approximating solutions of accretive operators in Banach spaces, *Scientiae Mathematicae*, **3** (2000), 107-115.

15. S. Kamimura and W. Takahashi, Approximating solutions of maximal monotone operator inclusions in Hilbert spaces, *J. Approximation Theory*, **106** (2000), 226-240.

16. S. Kamimura and W. Takahashi, Weak and strong convergence of solutions to accretive operator inclusions and applications, *Set-Valued Analysis*, **8** (2000), 361-374.

17. S. Kamimura and W. Takahashi, Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space, to appear.

18. S. Kitahara and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Analysis*, **2** (1993), 333-342.

19. A. T. Lau, K. Nishiura and W. Takahashi, Nonlinear ergodic theorems for semigroups of nonexpansive mappings and left ideals, *Nonlinear Analysis*, **26** (1996), 1411-1427.

20. A. T. Lau, N. Shioji and W. Takahashi, Existence of nonexpansive retractions for amenable semigroups of nonexpansive mappings and nonlinear ergodic theorems in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **161** (1999), 62-75.

21. A. T. Lau and W. Takahashi, Weak convergence and non-linear ergodic theorems for reversible semigroups of nonexpansive mappings, *Pacific J. Math.*, **126** (1987), 277-294.

22. W. R. Mann, Mean value methods in iteration, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 506-510.

23. B. Martinet, Regularisation, d'inèquations variationelles par approximations succesives, *Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle*, (1970), 154-159.

24. T. Mitchell, Topological semigroups and fixed points, *Illinois J. Math.*, **14** (1970), 630-641.

25. J. J. Moreau, Proximité et dualité dans un espace Hilbertien, *Bull. Soc. Math., France*, **93** (1965), 273-299.

26. Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 591-597.

27. S. Ohsawa and W. Takahashi, Strong convergence theorems for resolvents of maximal monotone operators in Banach spaces, to appear.

28. S. Reich, Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **67** (1979), 274-276.

29. S. Reich, Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **75** (1980), 287-292.

30. R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, *SIAM J. Control Optim.*, **14** (1976), 877-898.

31. T. Shimizu and W. Takahashi, Strong convergence to common fixed points of families of nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **211** (1997), 71-83.

32. N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings in Banach spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125** (1997), 3641-3645.

33. N. Shioji and W. Takahashi, Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive semigroups in Banach spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, **1** (2000), 73-87.

34. M. V. Solodov and B. F. Svaiter, Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space, *Math. Program.*, **87** (2000), 189-202.

35. W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **81** (1981), 253-256.

36. W. Takahashi, A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **97** (1986), 55-58.

37. W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese)* , Kindaikagakusha, Tokyo, 1988.

38. W. Takahashi, Fixed point theorem and nonlinear ergodic theorem for nonexpansive semigroups without convexity, *Can. J. Math.*, **44** (1992), 880-887.

39. W. Takahashi, Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications, *Nonlinear Analysis*, **30** (1997), 1283-1293.

40. W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points (Japanese)*, Yokohama Publishers, Yokohama , 2000.

41. W. Takahashi and G. E. Kim, Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces, *Math. Japonica*, **48** (1998), 1-9.

42. W. Takahashi and K. Shimoji, Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, *Mathematical and Computer Modelling*, **32** (2000), 1463-1471.

43. W. Takahashi and T. Tamura, Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces, *J. Approximation Theory*, **91** (1997), 386-397.

44. W. Takahashi and T. Tamura, Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings, *J. Convex Analysis*, **5** (1998), 45-56.

45. W. Takahashi and Y. Ueda, On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators, *J. Math. Anal. Appl.*, **104** (1984), 546-553.

46. R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Arch. Math.*, **58** (1992), 486-491.