数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 49-51

モジュラ束上のマトロイドについて

伊藤尚史†

1. はじめに

有限次元線型空間のベクトルの「一次独立」という概念を抽象化したものにマトロイドがある. 本稿では, マトロイドの公理を拡張したものを提案し, 拡張された部分に含まれる自明ではない例を 1 つ挙げる.

2. マトロイド

本節では文献 [1] に従い, 従来のマトロイドの公理を挙げる. 詳細な説明等はこの文献を参照されたい. この公理の拡張が次節でなされる.

定義 1. V を有限集合とする. マトロイドとは, 3 つの条件

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{M1}) \quad 0 \leq \rho(X) \leq |X|, \\
&(\mathrm{M2}) \quad X \subseteq Y \implies \rho(X) \leq \rho(Y), \\
&(\mathrm{M3}) \quad \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \cup Y) + \rho(X \cap Y)
\end{aligned}
$$

(ただし, $X, Y \subseteq V$) を満たすランク関数 $\rho : 2^V \to \mathbf{Z}$ と, V の 2 つ組 $\mathbf{M} = (V, \rho)$ のことである.

条件 (M1), (M2), (M3) はマトロイドの公理と呼ばれる.

この 3 つの条件 (M1), (M2), (M3) を満たす 2^V 上の関数 ρ の存在は, 次の 3 つの条件 (I1), (I2), (I3) を満たす V の部分集合の族 $\mathcal{I}$ の存在と同値であることが知られている.

条件.

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I1}) \quad \phi \in \mathcal{I}, \\
&(\mathrm{I2}) \quad I \subseteq J \in \mathcal{I} \implies I \in \mathcal{I}, \\
&(\mathrm{I3}) \quad I, J \in \mathcal{I},\ |I| < |J| \implies \text{ある } v \in J \setminus I \text{ が存在して } I \cup \{v\} \in \mathcal{I}.
\end{aligned}
$$

集合 $I \in \mathcal{I}$ は**独立集合**と呼ばれ, $\mathcal{I}$ は**独立集合族**と呼ばれる.

注意: (M1), (M2), (M3) と (I1), (I2), (I3) を乗り換えるためには, 次の関係で考えればよい:

$$
\rho(X) := \max\{|I| \mid I \subseteq X,\ I \in \mathcal{I}\}, \quad (\text{後者から前者へ})
$$

$$
\mathcal{I} := \{I \subseteq V \mid \rho(I) = |I|\}. \quad (\text{前者から後者へ})
$$

---

† Hisashi Ito, 東邦大学理学部情報科学科, 274-8510 船橋市三山 2-2-1, mailto: his@kuro.is.sci.toho-u.ac.jp.

(I1), (I2), (I3) から分かるように, マトロイドは「一次独立」という概念を抽象化したものになっているのだが, 念のために, マトロイドの例を次に挙げておこう (例 1 は比較的自明であり, 例 2 はいくぶんか高級であろう).

例 1. 体 $\boldsymbol{F}$ 上の行列を $A = (a_{ij})$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ とし, V を A の列集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする. A の列ベクトルたちがどういう風に一次独立であるかを考慮したものがこの場合のマトロイド (**線型マトロイド**) になる. ランク関数 ρ は, 例えば $X = \{1, 4, 5\} \subseteq V$ に対して, A の 1, 4, 5 $(\in X)$ 列目を集めてできる行列のランク

$$\rho(X) := \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{24} & a_{25} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m4} & a_{m5} \end{pmatrix}$$

として定義すればよい.

例 2. 体 $\boldsymbol{K}$ とその拡大体 $\boldsymbol{F}$ とし, V を $\boldsymbol{F}$ の有限部分集合とする. V の要素たちがどういう風に代数的独立であるかを考慮したものがこの場合のマトロイド (**代数的マトロイド**) になる. ランク関数 ρ は, $X \subseteq V$ に対して, 拡大体 $\boldsymbol{K}(X)$ の $\boldsymbol{K}$ 上の超越次元

$$\rho(X) := \dim_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{K}(X)$$

として定義すればよい.

3. 拡張版のマトロイドの公理

有限集合 V のベキ集合 2^V は, 集合の演算 $\cap, \cup$ に関して, 束をなしている. この束は分配束であり, 各 $X \in 2^V$ の「高さ」を,

$$\phi = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_h = X$$

となるような列の長さ h の最大値として, 自然に定めることができる (ただし, $X = \phi$ のときは列の長さの最大値は 0 であるとする). 特に, 2^V は集合束であるので, X の高さは $|X|$ に等しい.

この事実に着目すると, Jordan-Hölder 性のおかげで「高さ」を自然に定めることのできる束 (モジュラ束) の上に, 前節で述べたマトロイドの公理を拡張することができる.

定義 2. $\mathcal{L}$ をモジュラ束とする. (**拡張版の**) マトロイドとは, 3 つの条件

$$\begin{array}{ll} \text{(M1')} & 0 \leq \rho(X) \leq \mathrm{ht}(X), \\ \text{(M2')} & X \preceq Y \implies \rho(X) \leq \rho(Y), \\ \text{(M3')} & \rho(X) + \rho(Y) \geq \rho(X \vee Y) + \rho(X \wedge Y) \end{array}$$

(ただし, $X, Y \in \mathcal{L}$) を満たすランク関数 $\rho : \mathcal{L} \to \boldsymbol{Z}$ と, $\mathcal{L}$ の 2 つ組 $\mathbf{M} = (\mathcal{L}, \rho)$ のことである.

上の定義で, ht と書いたのはモジュラ束の高さ関数であり, 例えば $\mathrm{ht}(X)$ は X の組成列の長さを表す.

この定義が公理の条件 (M1), (M2), (M3) の拡張になっていることは明らかであろう. ただし, もはや土台となる集合 V があるわけではなく, 2^V に相当する $\mathcal{L}$ から出発してしまったので, 一

般には (I1), (I2), (I3) のように土台の集合の要素の言葉で条件を言い替えることは不可能である.

さて, モジュラ束 $\mathcal{L}$ 上のマトロイド $\mathbf{M} = (L, \rho)$ の定義をしただけでは抽象的ナンセンスとの誹りを受けるに違いない. そこで, 次に例を挙げる. この例は, 従来の意味では決してマトロイドではないが, 本稿で提案した意味ではマトロイドである.

例 3. 環 R 上の, 長さ有限の R 加群を M とし, M の部分加群の全体を $\mathcal{L}$ とする. M の部分加群たちがどういう風に直和に書けるかを考慮したものがこの場合のマトロイド (**加群的マトロイド**と呼ぼう) である. ランク関数 ρ は, M の部分加群 X に対して,

$$\rho(X) := \max\{k \mid \bigoplus_{i=1}^{k} X_i \subseteq X,\ (X_i \text{ は } 0 \text{ でない部分加群})\}$$

として定義する (ただし, $\oplus$ は直和を表し, $X = 0$ のときは $\rho(X) = 0$ とする).

「独立集合」に相当するものが $\rho(X) = \mathrm{ht}(X)$ を満たす X であるということを考慮すれば, この例の場合には「独立集合」とは半単純部分加群に他ならないと分かる.

実は, 上の例で使ったランク関数 ρ は, 本稿ではじめて出てきたものではない. Goldie が非可換 Noether 環を分類しようとして提案した Goldie 次元と言われるものと同じである [2]. しかし, その際には Goldie 次元の「マトロイド性」は注目されなかったようである.

簡単な例で, 本稿を終えよう. 次は, 例 3 のもう少し具体的な例になっている.

例 4. 体 F 上の 2 次元線型空間を M とし, M の線型部分空間の全体を $\mathcal{L}$ とする. ランク関数 ρ は, $X \in \mathcal{L}$ に対し

$$\rho(X) = \dim_F X$$

として定義すればよい.

$\rho(X)$ の値は 0, 1, 2 のいずれかであり, たいへんに簡単な例である. しかし, 体 F が大きさ 2 の有限体でない限りは $\mathcal{L}$ は分配的ではないモジュラ束になっており, 従来の意味ではマトロイドとはとうてい関係あるとは思えないものであろう.

参考文献

[1] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis* (Algorithms and combinatorics; 20), Springer-Verlag: Berlin Heidelberg New York, 2000. ISBN 3-540-66024-0.

[2] K. R. Goodearl and R. B. Warfield Jr., *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press: New York, 1989.