数理解析研究所講究録 1253 巻 2002 年 52-59

対合をもつ可換 Banach 環上の $*$-環準同型写像の摂動

山形大学　工学部　　三浦　毅　(Takeshi Miura)

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を複素可換 Banach 環とする．特に断らない限り $\varepsilon, \delta \geq 0$ とする．写像 ϕ: $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が (ε, δ)-環準同型写像であるとは，任意の $f, g \in \mathcal{A}$ に対して

$$\|\phi(f+g) - \phi(f) - \phi(g)\|_{\mathcal{B}} \leq \varepsilon(\|f\|_{\mathcal{A}} + \|g\|_{\mathcal{A}}),$$

$$\|\phi(fg) - \phi(f)\,\phi(g)\|_{\mathcal{B}} \leq \delta\|f\|_{\mathcal{A}}\|g\|_{\mathcal{A}}.$$

をみたすことである．ここに $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}, \|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ はそれぞれ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ の Banach ノルムである．特に $(0,0)$-環準同型写像を単に環準同型写像と呼ぶ．つまり環準同型写像は和と積を保存する写像である．

$\mathbb{C}$ を複素数全体からなる可換 Banach 環とする．$\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への環準同型写像を単に $\mathbb{C}$ 上の環準同型写像と呼ぶことにする．このとき写像 $\phi(z) = 0$, $(z \in \mathbb{C})$, $\phi(z) = z$, $(z \in \mathbb{C})$, $\phi(z) = \bar{z}$, $(z \in \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$ 上の環準同型写像である．ただし $\bar{\cdot}$ は複素共役である．これらを自明な環準同型写像と呼ぶ．$\mathbb{C}$ 上の環準同型写像には非自明なものが存在することが知られている (cf. [4])．さらに $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への全射環準同型写像の全体を $G(\mathbb{C})$ とすると，その集合としての濃度 $\sharp G(\mathbb{C})$ は $2^{\mathfrak{c}}$ である (cf. [9])．ここに $\mathfrak{c}$ は連続体濃度である．したがって一般の可換 Banach 環上の環準同型写像の構造を決定することは非常に困難であるように思われる．

その一方で環準同型写像はある条件のもとでは逆に非常に単純な構造をしていることもある (cf. [1, 3, 5, 7, 8, 10])．以下 $C(K)$ によりコンパクト Hausdorff 空間 K 上の複素数

値連続関数全体からなる単位的可換 Banach 環を表す．Šemrl [8] は $C(X)$ から $C(Y)$ への (ε,δ)-環準同型写像を考察し，その系として $C(X)$ から $C(Y)$ への複素共役を保存する環準同型写像の形を決定した．ここに $\phi\colon C(X)\to C(Y)$ が複素共役を保存するとは，任意の $f\in C(X)$ に対して $\phi(\bar{f})=\overline{\phi(f)}$ となることである．

ここではより一般に，対合といわれる複素共役を一般化した構造をもつ単位的可換 Banach 環 A から複素数体 $\mathbb{C}$ への対合を保存する環準同型写像の摂動は本質的に環準同型写像であることを示す．さらに A から対称な対合をもつ可換 Banach 環への (ε,δ)-環準同型写像に関する結果については [6] を参照されたい．

定義 1 $\phi:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ を (ε,δ)-環準同型写像とする．このとき

$$\|\phi\|=\sup_{f\in\mathcal{A}\setminus\{0\}}\frac{\|\phi(f)\|_{\mathcal{B}}}{\|f\|_{\mathcal{A}}}$$

により ϕ のノルム $\|\phi\|$ を定義する．写像 ϕ が有界であるとは $\|\phi\|<\infty$ となることとする．

次の 2 つの命題はŠemrl [8] による．

命題 1 $\phi\colon\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ が有界な (ε,δ)-環準同型写像ならば，$\|\phi\|\le(1+\sqrt{1+4\delta})/2$ となる．

命題 2 $\phi\colon\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ が和を保存しない (ε,δ)-環準同型写像ならば，ϕ は有界である．

次の補題は $\mathcal{A}=C(X)$ の場合が [8, Proposition 2.2] で得られている．

補題 1 $\phi\colon\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ が非有界な (ε,δ)-環準同型写像ならば，ϕ は環準同型写像である．

証明. 命題 2 より ϕ は和を保存する．もし $\phi({g_0}^2) \neq \phi(g_0)^2$ となる $g_0 \in \mathcal{A}$ が存在したとすると，全ての $f \in \mathcal{A}$ に対して次の不等式が成り立つことが簡単な計算により確かめられる．

$$
\begin{aligned}
|\phi(f)|\,|\phi({g_0}^2) - \phi(g_0)^2| &\leq |\phi(f)\,\phi({g_0}^2) - \phi(f{g_0}^2)| + |\phi(f{g_0}^2) - \phi(fg_0)\,\phi(g_0)| \\
&\quad + |\phi(fg_0)\,\phi(g_0) - \phi(f)\,\phi(g_0)^2| \\
&= \delta\|g_0\|_{\mathcal{A}}\big(2\|g_0\|_{\mathcal{A}} + |\phi(g_0)|\big)\,\|f\|_{\mathcal{A}}.
\end{aligned}
$$

よって ϕ は有界となり，これは矛盾である．つまり全ての $f \in \mathcal{A}$ に対して $\phi(f^2) = \phi(f)^2$ が成り立つ．このとき全ての $g, h \in \mathcal{A}$ に対して $\phi((g+h)^2) = \phi(g+h)^2$ であるから，両辺を比較して $\phi(gh) = \phi(g)\,\phi(h)$ を得る．よって ϕ は環準同型写像である． ■

定義 2 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を (ε, δ)-環準同型写像とする．このとき $K(\phi)$ を次をみたす $f \in \mathcal{A}$ 全体の集合とする：

$|\phi(f)| \leq k_f(\varepsilon, \delta)$ かつ $k_f(0,0) = 0$ をみたす連続関数 $k_f\colon [0,\varepsilon] \times [0,\delta] \to [0,\infty)$ が存在する．

補題 2 $\phi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ が (ε, δ)-環準同型写像であるとき，$K(\phi)$ は $\mathcal{A}$ のイデアルとなる．

証明. 任意の $f, g \in K(\phi)$ 及び $h \in \mathcal{A}$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\phi(f+g)| &\leq |\phi(f+g) - \phi(f) - \phi(g)| + |\phi(f)| + |\phi(g)| \\
&\leq \varepsilon(\|f\|_{\mathcal{A}} + \|g\|_{\mathcal{A}}) + k_f(\varepsilon, \delta) + k_g(\varepsilon, \delta), \\
|\phi(fh)| &\leq |\phi(fh) - \phi(f)\phi(h)| + |\phi(f)\phi(h)| \\
&\leq \delta\|f\|_{\mathcal{A}}\|h\|_{\mathcal{A}} + |\phi(h)|\,k_f(\varepsilon, \delta)
\end{aligned}
$$

となる．ここに k_f, k_g はそれぞれ $f, g \in K(\phi)$ に対応する $[0,\varepsilon] \times [0,\delta]$ 上の連続関数である．特に $\lambda f = (\lambda e) f$ であるから，$\lambda \in \mathbb{C}$ 及び $f \in K(\phi)$ に対して $\lambda f \in K(\phi)$ となる．以上より $K(\phi)$ は $\mathcal{A}$ のイデアルである． ■

関数 $\mathfrak{m}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$\mathfrak{m}(s) = (1-2s)\cos\left(\frac{3\pi s}{2}\right) - \frac{1+s}{2}\left\{1 + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi s}{2}\right)\right\}, \quad (s \in \mathbb{R}).$$

$\mathfrak{m}(0) = 1/4$ であるから $0 < s < b$ ならば $\mathfrak{m}(s) > 0$ となる $0 < b < 1/\{3(1+\pi)\}$ が存在する．そこで関数 $\mathfrak{n}\colon [0,b) \to (0,\infty)$ を次で定義する：

$$\mathfrak{n}(t) = \min\left\{\mathfrak{m}(t), \frac{3\sqrt{1-4t}-1}{4}, 1-3t(1+\pi)\right\}, \quad (t \in [0,b)).$$

これらの関数を用いてŠemrl は次を示した．

命題 3 $0 \le \delta < b$, $0 \le \varepsilon < \mathfrak{n}(\delta)$ かつ $0 \le \eta < 2 - 3\delta(1+\pi)$ とする．このとき (ε,δ)-環準同型写像 $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が

$$|\phi(\bar{\lambda}) - \overline{\phi(\lambda)}| \le \eta|\lambda|, \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

をみたせば，$\mathbb{C}$ 上の自明な環準同型写像 ρ が唯 1 つ存在して

$$|\phi(\lambda) - \rho(\lambda)| \le \frac{3}{2}(1+\pi)\,\delta|\lambda|, \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

となる．

命題 3 は $\mathbb{C}$ 上の複素共役を保存する (ε,δ)-環準同型写像は $\mathbb{C}$ 上の自明な環準同型写像の十分近くにあることを述べている．実はそのようなものは自明なものか，あるいは零写像の摂動しかないことが次の定理から分かる．

定理 3 $0 \le \delta < b$, $0 \le \varepsilon < \mathfrak{n}(\delta)$ かつ $0 \le \eta < 2 - 3\delta(1+\pi)$ とする．A を対合 $*$ をもつ単位的可換 *Banach* 環，M_A を A の極大イデアル空間とする．このとき (ε, δ)-環準同型写像 $\phi\colon A \to \mathbb{C}$ が

$$|\phi(f^*) - \overline{\phi(f)}| \le \eta \|f\|_A, \quad (f \in A)$$

をみたせば，$|\phi(f)| \le \{1 + 3(1+\pi)(1+\sqrt{1+4\delta})/4)\}\delta\|f\|_A$, $(f \in A)$ となるか，あるいは $\mathbb{C}$ 上の零でない自明な環準同型写像 ρ と $\varphi \in M_A$ が存在して $\phi(f) = \rho(\varphi(f))$, $(f \in A)$ となる．

証明．写像 $\phi_e\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を次で定義する．

$$\phi_e(\lambda) = \phi(\lambda e), \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

このとき ϕ_e もまた (ε, δ)-環準同型写像で

$$|\phi_e(\bar{\lambda}) - \overline{\phi_e(\lambda)}| \le \eta|\lambda|, \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{1}$$

をみたすことが分かる．

まず ϕ は有界であることを示す．実際，そうでないと仮定すると補題 1 より ϕ は環準同型写像となる．よって ϕ_e は $\mathbb{C}$ 上の零でない環準同型写像となる．さらに(1) より $|\mathrm{Im}\,\phi_e(t)| \le \eta|t|/2$ が全ての $t \in \mathbb{R}$ に対して成り立つ．このとき各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，t に収束する有理数列 $\{r_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ を選べば，ϕ_e が有理数を保存することから

$$|\mathrm{Im}\,\phi_e(t)| = |\mathrm{Im}\,\phi_e(t - r_n)| \le \frac{\eta|t - r_n|}{2} \to 0, \quad (n \to \infty)$$

となる．すなわち $\mathbb{R}$ 上 $\mathrm{Im}\,\phi_e = 0$ である．また $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への環準同型写像は零写像か恒等写像であることが知られている (cf. [4])．よって $\phi_e(t) = t$, $(t \in \mathbb{R})$ となる．$\phi_e(i) = \pm i$ で

あるから，ϕ_e は自明な環準同型写像となる．このことから ϕ は有界であることが分かるが，これは矛盾．以上より ϕ は有界であることが示された．

命題 3 により

$$|\phi(\lambda e) - \rho(\lambda)| \leq \frac{3}{2}(1+\pi)\,\delta|\lambda|, \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

なる $\mathbb{C}$ 上の自明な環準同型写像が存在する．$\rho(\lambda) = 0, (\lambda \in \mathbb{C})$ であるとき，$|\phi_e(\lambda)| \leq 3(1+\pi)\,\delta|\lambda|/2$ に注意すれば

$$\begin{aligned} |\phi(f)| &\leq |\phi(f) - \phi(e)\,\phi(f)| + |\phi(e)\,\phi(f)| \\ &\leq \delta\|e\|_A\|f\|_A + \frac{3}{2}(1+\pi)\,\delta\,\frac{1+\sqrt{1+4\delta}}{2}\,\|f\|_A \\ &= \left\{1 + \frac{3}{4}(1+\pi)(1+\sqrt{1+4\delta})\right\}\delta\|f\|_A \end{aligned}$$

が全ての $f \in A$ に対して成り立つ．このとき $K(\phi) = A$ である．$\rho(\lambda) = \bar{\lambda}, (\lambda \in \mathbb{C})$ または $\rho(\lambda) = \lambda, (\lambda \in \mathbb{C})$ であるとき，$\rho(\rho(\lambda)) = \lambda$ なので

$$\begin{aligned} |\phi\big(f - \rho\big(\phi(f)\big)e\big)| &\leq |\phi\big(f - \rho\big(\phi(f)\big)e\big) + \phi\big(\rho\big(\phi(f)\big)e\big) - \phi(f)| \\ &\quad + |\phi\big(\rho\big(\phi(f)\big)e\big) - \phi(f)| \\ &\leq \left\{(2+\sqrt{1+4\delta}\,)\,\varepsilon + \frac{3}{4}(1+\pi)(1+\sqrt{1+4\delta}\,)\,\delta\right\}\|f\|_A. \end{aligned}$$

が成り立つ．よって $f - \rho(\phi(f))e \in K(\phi), (f \in A)$ となる．このとき $K(\phi)$ は A の極大イデアルであることが次のようにして分かる．I を A のイデアルで，$K(\phi) \subsetneq I$ とする．$g_0 \in I \setminus K(\phi)$ に対して

$$e = \frac{1}{\rho(\phi(g_0))}\{\rho(\phi(g_0))e - g_0\} + \frac{1}{\rho(\phi(g_0))}g_0 \in I$$

であるから，$I = A$となる．よって$K(\phi)$はAの極大イデアルである．したがって，ある$\varphi \in M_A$に対して$\ker\varphi = K(\phi)$が成り立つ．$f - \rho(\phi(f))e \in K(\phi)$, $(f \in A)$であるから$\varphi(f) = \rho(\phi(f))$となるが，$\rho(\rho(\lambda)) = \lambda$, $(\lambda \in \mathbb{C})$であるから$\phi(f) = \rho(\varphi(f))$, $(f \in A)$を得る． ∎

定理 3においてϕのノルムはδのみに依存するから，特に$\delta = 0$の場合を考えると次の系を得る．

系 4 $0 \leq \varepsilon < 1/4$かつ$0 \leq \eta < 2$とする．Aを対合$*$をもつ単位的可換*Banach*環，M_AをAの極大イデアル空間とする．このとき$(\varepsilon, 0)$-環準同型写像ϕ: $A \to \mathbb{C}$が

$$|\phi(f^*) - \overline{\phi(f)}| \leq \eta\|f\|_A, \quad (f \in A)$$

をみたせば，ϕは零写像か$\bar{\phi} \in M_A$または$\phi \in M_A$のいずれかとなる．

参考文献

[1] B. H. Arnold, *Rings of operators on vector spaces*, Ann. of Math., **45** (1944), 24-49.

[2] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Prentice-Hall, N. J. 1969

[3] I. Kaplansky, *Ring isomorphisms of Banach algebras*, Canad. J. Math. **6** (1954), 374-381.

[4] H. Kestelman, *Automorphisms of the field of complex numbers*, Proc. London Math. Soc. (2) **53** (1951), 1-12.

[5] T. Miura, *Star ring homomorphisms between commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), 2005-2010.

[6] T. Miura, *Perturbations of $*$-ring homomorphisms on involutive commutative Banach algebras*, preprint.

[7] L. Molnár, *The range of a ring homomorphism from a commutative C^*-algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 1789-1794.

[8] P. Šemrl, *Non linear perturbations of homomorphisms on $C(X)$*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50** (1999), 87-109.

[9] T. Soundararajan, *On the automorphisms of the complex number field*, Math. Mag. **40** (1967), 213.

[10] S.-E. Takahasi and O. Hatori, *A structure of ring homomorphisms on commutative Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2283-2288.