数理解析研究所講究録 1254 巻 2002 年 151-154

Non-uniqueness in the Cauchy problems for semilinear heat equations with singular initial data

神戸大学工学部　内藤 雄基 (Yūki Naito)

次の半線形放物型方程式に対する Cauchy 問題について考える：

$$w_t = \Delta w + w^p \qquad \text{in } \mathbf{R}^N \times (0, \infty), \tag{1}$$

$$w(x,0) = \lambda a(x/|x|)|x|^{-2/(p-1)} \qquad \text{in } \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \tag*{(2)$_\lambda$}$$

ここで、$N \geq 2$, $p > (N+2)/N$, $a : S^{N-1} \to \mathbf{R}$, $a \in L^\infty(S^{N-1})$, $a \geq 0$, $a \not\equiv 0$ とし、$\lambda > 0$ はパラメータとする.

方程式 (1) は相似変換

$$w(x,t) \mapsto w_\mu(x,t) = \mu^{2/(p-1)} w(\mu x, \mu^2 t), \quad \mu > 0,$$

に関して不変である．この相似変換に対して不変な解、すなわち

$$w(x,t) \equiv \mu^{2/(p-1)} w(\mu x, \mu^2 t) \quad \text{for all } \mu > 0 \tag{3}$$

である解を自己相似解 (self-similar solution) と呼ぶ．$w(x,t)$ を自己相似解とし $w(x,0) = A(x)$ とおくと $w(x,0) = w_\mu(x,0)$ より

$$A(x) = \mu^{2/(p-1)} A(\mu x) \quad \text{for all } \mu > 0.$$

ここで、$\mu = 1/|x|$ とおくと $A(x) = A(x/|x|)|x|^{-2/(p-1)}$ となる．すなわち (2)$_\lambda$ は、自己相似解が満たすべき初期条件であることがわかる.

方程式 (1) については、$p \leq (N+2)/N$ の場合、$\mathbf{R}^N \times (0,\infty)$ において非負、非自明な解を持たないことが Fujita [3] により知られている．また $w(x,0) = A(x)$, $A \in L^q(\mathbf{R}^N)$ を満たす解については Weissler [8] により、$q \geq N(p-1)/2$ であれば時間局所解が唯一つ存在すること、$q = N(p-1)/2$ であり $\|A\|_{L^q(\mathbf{R}^N)}$ が十分小さければ時間大域解が唯一つ存在することが示されている．一方、Haraux-Weissler [5] は、自己相似解を用いることにより、$q < N(p-1)/2$ の場合、$p < (N+2)/(N-2)$ であれば

$$w_0(x,t) > 0 \quad \text{for } t > 0 \quad \text{and} \quad \|w_0(\cdot,t)\|_{L^q(\mathbf{R}^N)} \to 0 \quad \text{as } t \to 0$$

となる解 $w_0 \in C([0,\infty); L^q(\mathbf{R}^N))$ の存在を示した．これにより、Cauchy 問題

(4)
$$\begin{cases} w_t = \Delta w + w^p & \text{in } \mathbf{R}^N \times (0,\infty) \\ w(x,0) = 0 & \text{in } \mathbf{R}^N \end{cases}$$

の $C([0,\infty); L^q(\mathbf{R}^N))$ における非一意解が得られる．

Cauchy 問題 (1)-$(2)_\lambda$ については Kozono-Yamazaki [6], Cazenave-Weissler [1] により $\lambda > 0$ が十分小さい場合、なにがしかのノルムで十分小さい解は一意に存在することが知られている．また、Galaktionov-Vazquez [4] は、

$$w(x,0) = c_s |x|^{-2/(p-1)} \qquad \text{in } \mathbf{R}^N \setminus \{0\}, \qquad c_s = \left[\frac{2}{p-1}\left(N-2-\frac{2}{p-1}\right)\right]^{1/(p-1)},$$

を満たす解の存在、一意性について考察を行っている．ここで、$U_s(x) = c_s|x|^{2/(p-1)}$ とおくと、$U_s(x)$ は、$p > N/(N-2)$ において

$$\Delta u + u^p = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^N \setminus \{0\}$$

の特異解であることに注意する．$(2)_\lambda$ において $a \equiv 1, \lambda = c_s$ とするとき $N/(N-2) < p < p_u$ であれば、(1)-(2) は $t > 0$ において $w(\cdot,t) \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ である自己相似解が存在すること、$p \geq p_u$ であれば、解は $U_s(x) = c_s|x|^{2/(p-1)}$ に限ることが示されている．ここで、p_u は次で定義される指数である：

$$p_u = \begin{cases} \infty, & 3 \leq N \leq 10, \\ 1 + \dfrac{4}{N-4-2\sqrt{N-1}}, & N \geq 11. \end{cases}$$

さらに $(2)_\lambda$ において $a \equiv 1, 0 < \lambda \leq c_s$ とするとき $N/(N-2) < p \leq (N+2)/(N-2)$ であれば (1)-$(2)_\lambda$ は解を２つ持つであろうと予想している．

(3) において $\mu = t^{-1/2}$ を代入すると自己相似解 w は

(5)
$$w(x,t) = t^{-1/(p-1)} u(x/\sqrt{t})$$

と表されることがわかる．ここで、関数 u は次の楕円型偏微分方程式の解である：

(6)
$$\Delta u + \frac{1}{2} x \cdot \nabla u + \frac{1}{p-1} u + u^p = 0 \qquad \text{in } \mathbf{R}^N.$$

また、w が $(2)_\lambda$ をみたすならば (5) より

$(7)_\lambda$
$$\lim_{r\to\infty} r^{2/(p-1)} u(r\omega) = \lambda a(\omega), \qquad a.e.\ \omega \in S^{N-1}$$

であることがわかる．

ところで、$\rho(x) = e^{|x|^2/4}$ とするとき (6) は

$$\nabla \cdot (\rho \nabla u) + \rho \left(\frac{1}{p-1} u + u^p \right) = 0$$

と表される．Escobedo-Kavian [2] は、汎関数

$$I(u) = \int_{\mathbf{R}^N} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \frac{1}{2(p-1)} u^2 - \frac{1}{p+1} u^{p+1} \right) \rho dx$$

を、重み付き Sobolev 空間

$$H_\rho^1(\mathbf{R}^N) = \left\{ u \in H^1(\mathbf{R}^N) : \int_{\mathbf{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) \rho dx < \infty \right\}$$

において考えることにより、(6) が正値解 $u_0 \in H_\rho^1(\mathbf{R}^N)$ を持つことを示した．また、$u \in H_\rho^1(\mathbf{R}^N)$ である (5) の正値解は球対称解となること、そして一意であることが示されている．(N-Suzuki [7].) この u_0 に対して

$$w_0(x,t) = t^{-2/(p-1)} u_0(x/\sqrt{t})$$

とするとき、w_0 は [5] で得られた (4) の非一意解と一致する．

ここでは (6)-(7)$_\lambda$ の解 u として古典解 $u \in C^2(\mathbf{R}^N)$ を考える．

定理 1. 次を満たす $\overline{\lambda} > 0$ が存在する：

(i) $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において (6)-(7)$_\lambda$ は最小解 $\underline{u}_\lambda$ を持つ．また、各 $x \in \mathbf{R}^N$ において $\underline{u}_\lambda$ は λ に対して増加であり、$\|\underline{u}_\lambda\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = O(\lambda)$ as $\lambda \to 0$ となる；

(ii) $\lambda > \overline{\lambda}$ において (6)-(7)$_\lambda$ は解を持たない；

(iii) $p < (N+2)/(N-2)$ とし $a \equiv 1$ とするとき、(6)-(7)$_\lambda$ は $\lambda = \overline{\lambda}$ において解を持つ．

定理 2. $p < (N+2)/(N-2)$ とする．このとき、$0 < \lambda < \overline{\lambda}$ において (6)-(7)$_\lambda$ は $\overline{u}_\lambda > \underline{u}_\lambda$ を満たす解 $\overline{u}_\lambda$ を持つ．とくに、$\overline{u}_\lambda - \underline{u}_\lambda \in H_\rho^1(\mathbf{R}^N)$ であり

$$\overline{u}_\lambda(x) - \underline{u}_\lambda(x) = O(e^{-|x|^2/4}) \quad \text{as } |x| \to \infty$$

である．さらに次が成立する：

$$\overline{u}_\lambda - \underline{u}_\lambda \to u_0 \quad \text{in } H_\rho^1(\mathbf{R}^N) \cap C^1(\mathbf{R}^N) \quad \text{as } \lambda \to 0,$$

ここで、u_0 は $H_\rho^1(\mathbf{R}^N)$ における (6) の（一意）正値解である．とくに、

$$\overline{u}_\lambda \to u_0 \quad \text{in } L^\infty(\mathbf{R}^N) \cap C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N) \quad \text{as } \lambda \to 0$$

が成立する．

これらより次の系を得る：

系. Cauchy 問題 (1)-$(2)_\lambda$ に対して $p<(N+2)/(N-2)$ とするとき、次を満たす $\overline{\lambda}>0$ が存在する：

(i) $0<\lambda<\overline{\lambda}$ において (1)-$(2)_\lambda$ は $\overline{w}_\lambda(x,t)>\underline{w}_\lambda(x,t)$ を満たす解 $\overline{w}_\lambda$, $\underline{w}_\lambda$ を持つ.

(ii) $\lambda>\overline{\lambda}$ において (1)-$(2)_\lambda$ は自己相似解を持たない；

(iii) $a\equiv 1$ とするとき、(1)-$(2)_\lambda$ は $\lambda=\overline{\lambda}$ において解を持つ.

(iv) 各 $t>0$ を固定するごとに次が成立する：

$$\|\underline{w}_\lambda(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}=O(\lambda)\quad \text{as } \lambda\to 0;$$

$$\|\overline{w}_\lambda(\cdot,t)-w_0(\cdot,t)\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)}\to 0\quad \text{as } \lambda\to 0,$$

ここで、w_0 は [5] によって得られた (4) の非一意解である.

REFERENCES

[1] T. Cazenave and F. B. Weissler, Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations, *Math. Z.* **228** (1998), 83-120.

[2] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions for the heat equation, *Nonlinear Anal. TMA* **11** (1987), 1103-1133.

[3] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect.I* **13** (1966), 109-124.

[4] V. A. Galaktionov and J. L. Vazquez, Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997), 1-67.

[5] A. Haraux and F. B. Weissler, Non-uniqueness for a semilinear initial value problem, *Indiana Univ. Math. J.* **31** (1982), 167-189.

[6] H. Kozono and M. Yamazaki Semilinear heat equations and the navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data, *Comm. Partial Differential Equations* **19** (1994), 959-1014.

[7] Y. Naito and T. Suzuki, Radial symmetry of self-similar solutions for semilinear heat equations, *J. Differential Equations* **163** (2000), 407-428.

[8] F. B. Weissler, Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation, *Israel J. Math.* **38** (1981), 29-40.