数理解析研究所講究録 1254 巻 2002 年 155-159

関数積分方程式の Kneser 型定理

柳谷　晃 (Akira Yanagiya)

早稲田大学高等学院
177-0044 東京都練馬区上石神井 3-31-1
TEL03-5991-4151 FAX03-3928-4110
mail:yanagiya@mn.waseda.ac.jp
Waseda University Senior High School
3-31-1, Kamishakuzii, Nerima-ku, Tokyo, 177-0044, Japan

この論文では、主に人口問題の数理モデルに、現れる積分方程式について考察する。死亡率、出生率などのパラメーターは、通常人口の functional で表現されている。このタイプの人口モデルは、特性直線に沿って説く方法で解析することができる。このとき、得られる積分方程式は、解の functional を含むので、関数積分方程式となる。歴史的には Gurtin と MacCamy によって、このモデルが導入され、最初に研究された。二人の論文は、人口モデルの分野において、エポックメイキングとなった論文である。この論文により、一般的な仮定で人口モデルを扱うことが、可能になった。Gurtin と MacCamy の得た結果を、積分方程式の立場から、拡張した論文は、残念ながら、著者の知るところとはならなかった。この論文では、この方向で、積分方程式の新たな解の存在定理を得ることができれば、と愚考している次第である。

事実、若干の拡張に成功することができたので、その結果を以下に述べることにする。次の nonlinear age-dependent population model を考える。

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial n}{\partial a}+\frac{\partial n}{\partial t}+\mu(a,N(t))n(a,t)=0, \quad a>0, 0<t<T \\
&n(0,t)=\int_0^\infty m(a,N(t))n(a,t)da, \quad 0<t\leq T, \qquad (1)\\
&n(a,0)=\varphi(a), \quad a\geq 0.
\end{aligned}
$$

ここで、n は人口分布 N は全人口を表す。即ち

$$
N(t)=\int_0^\infty n(a,t)da, \qquad (2)
$$

である。また出生過程 B は、

$$
B(t)=n(0,t)
$$

という関係で表される。さらに人口モデルであるから$\varphi \in L^1(R_+), \mu(a,N), m(a,N)$は非負の関数となる。特に$\mu, m$は$n$が積分された形で変数として入るので、$n$のfunctionalとなっている。Gurtin,MacMamyの論文では、μ, mに対しNについての偏微分が仮定されているが、これはリプシッツ連続の仮定で十分であることがわかる。即ち次の二つの仮定により方程式(1)はただひとつの正の解$n(a,t)$を持つ。

$(H1)$ φは区分的に連続である。

$(H2)$ $\mu, m \in C(R^+ \times R^+)$であり、一様に$N$についてリプシッツ連続である。

この定理の証明は特性直線に沿って得られる、次の積分方程式を扱うことにより得られる。N, Bについての連立積分方程式は、

$$N(t) = \int_0^t K(t-a;t;N)B(a)da + \int_0^\infty L(a,t;N)\varphi(a)da,$$

$$B(t) = \int_0^t m(t-a,N(t))K(t-a,t;N)B(a)da + \int_0^\infty m(t+a,N(t))L(a,t;N)\varphi(a)da,$$

$$K(\alpha,t;N) = exp(-\int_{t-a}^t \mu(\alpha+\tau-t,N(\tau))d\tau),$$

$$L(\alpha,t;N) = exp(-\int_0^t \mu(\tau+\alpha,N(\tau))d\tau),$$

であり、この方程式に逐次近似法を適用することにより解の存在と一意性また0から∞までの存在を証明する。方程式の作り方かもわかるように、この形から解の定性的性質などを導き出すのは非常に難しいことである。最近になって方程式(1)の周期解の存在がやっとわかった程度である。これから研究しなければならない問題が沢山ある分野である。

ここでは、さらに、この形の積分方程式を若干拡張した、関数積分方程式を考えて、それについての、解の存在定理を考えてみたい。次の連立積分方程式を考える。

$$x(t) = \int_0^t k(t-s,t;x)y(s)ds + \int_0^\infty L(t,s;x)\varphi(s)ds, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \int_0^t \beta(t-s,x(t))k(t-s,t;x)y(s)ds \\ & + \int_0^\infty \beta(t+s,x(t))L(t,s;x)\varphi(s)ds \end{aligned} \tag{4}$$

この積分方程式について、GurtinとMacMamyの方法を基本にすることにより、次の定理を証明することができる。

以下の定理においては、つねに次の仮定をする。k, Lは、正の函数としておく。必ずしも正の函数でなければならないことはないのであるが、ここでは、人口論のモデルへの応用も考えて、この仮定をしておく。正という仮定

をはずしても、解の存在定理は証明される。さらに、

$$\beta \in C(R^+ \times R) \tag{5}$$

$$k(t,s;x) : cont.on[0,T] \times [0,T] \times \Sigma \tag{6}$$

$$L(t,s;x) : cont.on[0,T] \times R^+ \times \Sigma \tag{7}$$

$$|L(t,s;x) - 1| \longrightarrow 0 as T \longrightarrow 0, on 0 \le t, s \le T, x \in \Sigma \tag{8}$$

この仮定にある Σ は、

$$\Sigma = \{f | f \in C^+[0,T], \|f - \Phi\| < r, on[0,T]\}$$

であたえられる。ただし、

$$\Phi = \int_0^\infty \varphi(s)ds$$

である。上の仮定を基本仮定と呼ぶことにする。この仮定の元で、次の定理が得られる。

定理1

方程式(3)(4)について、基本仮定とともに、functional k, L にたいし、x についての、lipschitz連続を仮定する。このとき、ある正の数 T が存在して、区間 $[0,T]$ において、ただ一つの解 x が存在する。

定理2

方程式(3)(4)について、基本仮定をほどこすと、ある正の数 T が存在して、区間 $[0,T]$ において、解 x が存在する。

人口論のモデルにおいて、φ が初期分布であったように、この積分方程式でも、正の φ が初期函数の働きをする。よって Φ のまわりで、解を捜せばよいことになる。定理1では、縮小写像定理を使い、定理2では、Schauder-Tychonoffの不動点定理を使う。証明方法は、連立の積分方程式を一つのoperatorにまとめるところから始める。

積分方程式(4)より

$$y(t) = B(x)(t) = \int_0^t \beta(t-s, x(t))k(t-s,t;x)y(s)ds + \int_0^\infty \beta(t+s, x(t))L(t,s;x)\varphi(s)ds$$

とおけば、ある正の数 M が存在して、

$$|B(x)(t)| \le M\int_0^t |B(x)(s)|ds + M\Phi$$

と押さえられる。ここで、Gronwallの不等式を使えば、

$$|B(x)(t)| \le Me^{Mt}$$

が成立する。ここで、もう一つの積分方程式(4)を解を捜すための、operatorと考えて、

$$X(x)(t) = \int_0^t k(t-s,t;x)y(s)ds + \int_0^\infty L(t,s;x)\varphi(s)ds$$

と定義すれば、このoperatorについて、contractionまたは、Schauder-Tychonoffの定理を証明すれば良いことになる。

定理(Schauder-Tychonoff)

Eはlocally convex Hausedorff spaceとする。Eにおいて

$$x \longrightarrow f(x) : cont.mapping$$

$$f(K) \subset A \subset K$$

ここで、Aはcompactである。このとき、少なくとも一つの不動点をKの中にfはもつ。

定理1を証明するには、

$$X(x)(\cdot) : \Sigma \longrightarrow \Sigma; contractive$$

を示せば良い。そのためには、operator$X(x)(\cdot)$について、次の二つの不等式を示せば良い。

$$\|X(x)(\cdot) - \Phi\| \leq r, \|X(x) - X(x')\| \leq \kappa\|x - x'\|, 0 < \kappa < 1$$

この二つの不等式は、つぎの三本の積分を仮定により、上から評価すれば示すことができる。正の数rは、このとき同時に評価することが可能である。

$$\int_0^t |k(t-s,t;x) - k(t-s,t,;x')||B(x)(s)|ds,$$
$$\int_0^t k(t-s,t;x')|B(x)(s) - B(x')(s)|ds,$$
$$\int_0^\infty |L(t,s;x) - L(t,s;x')|\varphi(s)ds$$

定理2については、上に述べた不動点定理を証明するために、operator$X(x)(\cdot)$が、同程度連続な函数の集合への、写像であることを示さなければならないが，これは次の不等式を評価することにより可能である。

$$\begin{aligned} |X(x)(t) - X(x)(t')| \leq & \int_0^t k(t-s,s;x) - k(t'-s,t';x)||B(x)(s)|ds \\ & + \int_t^{t'} |k(t'-s,t';x)B(x)(s)|ds \\ & + \int_0^\infty |L(t,s;x) - L(t',s;x)|\varphi(s)ds \end{aligned}$$

もし、Schauder-Tychonoffタイプの存在定理から、複数の解が存在すると言う事実がわかると、その解集合の性質を調べる必要性が発生する。このときには、古典的なKneser型の定理を証明することができる。

定理($Kneser$)

方程式(3)(4)にたいし、基本仮定が成立するとする。このとき、積分方程式のていぎ域内の点Pから出る、解曲線の集合を$R(P)$,超平面$x=\xi$によるその切り口を$S_\xi(P)$とすれば、$S_\xi(P)$は連続体である。

点Pから出る解曲線の族を$F(P)$とする。この$F(P)$が連続体であることを証明し、その結果$S_\xi(P)$が連続体になることを証明する。証明は、次の4段階に分かれる。

(1)$F(P)$は、コンパクトな閉集合である。(2)一般にコンパクトな連続体の減少列$\{C_\nu\}$が与えられたとき、$C=\bigcup C_\nu$は、連続体になる。(3)ϵ近似解の集合$F(P;\epsilon)$は、連続体である。(4)$S_\epsilon(P)$は連続体である。

以上によって、定理が証明される。これは、積分方程式の一般論と同じではあるが、方程式(3)(4)に対し、近似解の集合を作らなければならない。これは、方程式によって作ることができる。

$$
\begin{aligned}
x_j(t) &= \Phi, 0 \le t \le \alpha/j, \\
y_j(t) &= \int_0^t \beta(t-s, x_j(t))k(t-s, s; x_j)y_j(s)ds \\
&= \int_0^\infty \beta(t+s, x_j(t))L(t, s; x_j)\varphi(s)ds, 0 \le t \le \alpha/j, \\
x_j(t) &= \int_0^{t-\alpha/j} k(t-\alpha/j, s; x_j)y_j(s)ds \\
&+ \int_0^\infty L(t, s; x_j)\varphi(s)ds, \alpha/j < t \le \alpha \\
y_j(t) &= \int_0^t \beta(t-s, x_j(t))k(t-s, s; x_j)y_j(s)ds \\
&= \int_0^\infty \beta(t+s, x_j(t))L(t, s; x_j)\varphi(s)ds, \\
&\alpha/j < t \le \alpha
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] M.E.Gurtin and R.C.MacCamy(1974),Non-linear age-dependent population dynamics,Archive for Rational Mechanics and Analysis 54:281-300