数理解析研究所講究録 1254 巻 2002 年 190-192

Existence of solutions of two point boundary value problems with concave and convex nonlinearities

八戸工業高等専門学校・電気工学科
田中 敏 (Satoshi Tanaka)
Department of Electrical Engineering
Hachinohe National College of Technology

本講演は内藤雄基氏 (神戸大・工) との共同研究によるものである.
2階常微分方程式

(E) $$u'' + \lambda a(x) f(u) = 0, \quad 0 \le x \le 1,$$

を考える. ここで, $\lambda > 0$ はパラメータ, $a \in C^1[0,1]$, $a(x) > 0$ for $0 \le x \le 1$, $f \in C(-\infty, \infty)$, $f(s) > 0$ for $s > 0$, f は $(0, \infty)$ 上局所 Lipschitz 連続, $f(-s) = -f(s)$ for $s > 0$, ある $s_0 > 0$ に対して, 区間 $(0, s_0]$ 上 $f(s)$ は非減少, かつ, $f(s)/s$ は非増加であるとする. さらに,

(C) $$\lim_{s \to \infty} \frac{f(s)}{s} = \infty, \qquad \lim_{s \to +0} \frac{f(s)}{s} = \infty$$

を仮定する.
上段を満たす f の典型例の一つとして

$$f(s) = |s|^{q-1} v + |s|^{p-1} v, \quad 0 < q < 1 < p$$

がある.
境界条件

(B) $$u(0) = u(1) = 0$$

を考える. 境界値問題 (E)–(B) に対して, 次の定理１, ２を得る.

定理１. 次の (i)–(iii) を満たす $\lambda_0 > 0$ が存在する:

(i) $0 < \lambda < \lambda_0$ のとき (E)–(B) はすくなくとも２つの正値解をもつ,
(ii) $\lambda = \lambda_0$ のとき (E)–(B) はすくなくとも１つの正値解をもつ,
(iii) $\lambda > \lambda_0$ のとき (E)–(B) は正値解をもたない.

定理２. λ_0 を定理１のものとする. 以下を満たす $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する:

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots, \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = \infty,$$

かつ, 各 $k \in \{1, 2, \ldots\}$ に対して, 次の (i), (ii) が成立する:

(i) $\lambda \in (0, \lambda_k)$ のとき, (E)–(B) の解 u で $u'(0) > 0$ かつ $(0,1)$ 内にちょうど k 個の零点をもつものが, すくなくとも２つ存在する,
(ii) $\lambda = \lambda_k$ のとき, (E)–(B) の解 u で $u'(0) > 0$ かつ $(0,1)$ 内にちょうど k 個の零点をもつものが, すくなくとも１つ存在する.

$\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$ であるから, 定理 2 よりすべての $\lambda>0$ に対して (E)–(B) は無限に多くの解をもつことを注意しておく.

Ambrosetti-Brezis-Cerami [1] は境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u+\lambda(|u|^{q-1}u+|u|^{p-1}u)=0, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \qquad 0<q<1<p$$

に対して, 定理 1 と同様の結果や定理 2 のように無限に多くの解をもつような結果を得ている. ここで $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ は有界である.

また, Ouyang-Shi [3] は境界値問題

$$\text{(P1)} \qquad \begin{cases} \Delta u+\lambda f(u)=0, & x\in B^N, \\ u=0, & x\in\partial B^N, \end{cases}$$

に対して, $f(s)=s^q+s^p$ $(0<p<1<q)$ の場合を含むようなある条件のもとで, 次の (i)–(iii) を満たす $\Lambda>0$ が存在することを示した:

(i) $0<\lambda<\Lambda$ のとき (P1) はちょうど 2 つの正値解をもつ,
(ii) $\lambda=\Lambda$ のとき (P1) はちょうど 1 つの正値解をもつ,
(iii) $\lambda>\Lambda$ のとき (P1) は解をもたない.

ここで, $N\geq 3$, $B^N=\{x\in\mathbf{R}^N:|x|\leq 1\}$ である.

我々の問題 (E)–(B) は [1] や [3] の問題の $N=1$ の場合である. また, 我々の問題 (E)–(B) は非自励系であることが, [1] や [3] の問題に比べれば一般的である.

ちなみに, 自励系の場合 $(a(x)\equiv 1)$ で, $N=1$, $f(s)=s^q+s^p$ $(0<p<1<q)$ のときは Sánchez-Ubilla [4] によって, 次の (i)–(iii) を満たす $\Lambda>0$ が存在することが示されている:

(i) $0<\lambda<\Lambda$ のとき (E)–(B) はちょうど 2 つの正値解をもつ,
(ii) $\lambda=\Lambda$ のとき (E)–(B) はちょうど 1 つの正値解をもつ,
(iii) $\lambda>\Lambda$ のとき (E)–(B) は解をもたない.

しかしながら, Sánchez-Ubilla [4] の手法を我々の非自励系である問題に適用することはできない.

初期条件

$$\text{(I)} \qquad u(0)=0, \quad u'(0)=\mu$$

を考える. 内藤学-内藤雄基 [2] の方法をもちいれば, 初期値問題 (E)–(I) の解 $u(x;\lambda,\mu)$ は $[0,1]$ 内に存在して一意であることが証明できる. また, f は奇関数なので $u(x;\lambda,\mu)=-u(x;\lambda,-\mu)$ であるから, $\mu>0$ の場合を考えれば十分である. λ を 0 から ∞ まで動かしたとき, また, μ を 0 から ∞ まで動かしたとき $u(t;\lambda,\mu)$ の零点の個数がどのように変化するかを考察することによって, 定理 1, 2 を証明する. 以下, その証明について大雑把に述べる.

関数 $b(x)$ を

$$b(x)\equiv\lambda a(x)\frac{f(u(x;\lambda,\mu))}{u(x;\lambda,\mu)}$$

とおけば, 方程式 (E) は線形の方程式

$$u''(x;\lambda,\mu)+b(x)u(x;\lambda,\mu)=0$$

とみなすことができる. Sturm の比較定理より, $b(x)>0$ が十分小さいときは $u(x;\lambda,\mu)$ は零点をもたないし, $b(x)>0$ が十分大きいときは $u(x;\lambda,\mu)$ の零点の個数は多いことがわかる.

従って, $b(x)$ の形から, λ を 0 から ∞ まで変化させると, $u(x;\lambda,\mu)$ の零点は増えていくことが期待される.

また, $\mu\to+0$ または $\mu\to\infty$ とすると $u(x;\lambda,\mu)$ の零点は増えていく. それは次の関数

$$E[u](x)=\frac{[u'(x)]^2}{2}+\lambda a(x)F(u(x))$$

を利用することでわかる. ここで,

$$F(v)=\int_0^v f(s)ds\geq 0,\quad v\in\mathrm{R}$$

である. なお, $F(v)=F(|v|)>0$ for $v\in(-\infty,\infty)\backslash\{0\}$, $F(0)=0$, かつ $F(v)$ は $(0,\infty)$ 上狭義単調増加であることを注意しておく.

関数 $E[u]$ に対して

$$\frac{\mu^2}{2}A_*\leq E[u(\,\cdot\,;\lambda,\mu)](x)\leq\frac{\mu^2}{2}A^*,\quad 0\leq x\leq 1$$

が成り立つ. ここで

$$A_*=\exp\left(-\int_0^1\frac{[a'(s)]_-}{a(s)}ds\right),\quad A^*=\exp\left(\int_0^1\frac{[a'(s)]_+}{a(s)}ds\right)$$

である. これより, $\mu\to 0$ のとき $|u(x;\lambda,\mu)|\to 0$, また $\mu\to\infty$ のとき $\max\{|u(x;\lambda,\mu)|,|u'(x;\lambda,\mu)|\}\to 0$ である. 従って, 条件 (C) より $\mu\to 0$ のとき $b(x)\to\infty$, また $\mu\to\infty$ のとき $[0,1]$ 内のある区間で $b(x)\to\infty$ であることがわかるので, $\mu>0$ を十分小さくするかあるいは十分大きくすると $u(x;\lambda,\mu)$ の零点の個数は増えていく.

これらの議論を組み合わせることにより, 定理1, 2を証明することができる.

REFERENCES

[1] A. Ambrosetti, H Brezis and G. Cerami, Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), 519–543.

[2] M. Naito and Y. Naito, Solutions with prescribed numbers of zeros for nonlinear second order differential equations, *Funkcial. Ekvac.* **37** (1994), 505–520.

[3] T. Ouyang and J. Shi, Exact multiplicity of positive solutions for a class of semilinear problem, II, *J. Differential Equations* **158** (1999), 94–151.

[4] J. Sánchez and P. Ubilla, One-dimensional elliptic equation with concave and convex nonlinearities, *Electron. J. Diff. Eqns.* **2000** (2000), 1–9.