数理解析研究所講究録 1254 巻 2002 年 14-22

2 階楕円型方程式系の非負値全域解について

寺本 智光 ・ 広島大学理学部

(Tomomitsu Teramoto, Hiroshima University)

次の 2 階半線形楕円型方程式系の非負値全域解について考える.

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u_1 = P_1(x) u_2^{\alpha_1}, \\ \Delta u_2 = P_2(x) u_3^{\alpha_2}, \\ \quad\vdots \\ \Delta u_m = P_m(x) u_{m+1}^{\alpha_m}, \quad u_{m+1} = u_1, \end{cases} \qquad x \in \mathbf{R}^N,$$

ここで $N \geq 2$, $m \geq 2$, $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, は定数で $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m > 1$ を満たすとする. $P_i(x) \geq 0$ は $\mathbf{R}^N$ で連続とする.

$(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が (1) の全域解とは $u_i \in C^2(\mathbf{R}^N)$, $i = 1, 2, \cdots, m$, で $\mathbf{R}^N$ で (1) を満たすときをいう. $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が非負値とは, $u_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, のときをいう.

(1) のタイプの楕円型方程式 (系) の非負値全域解の存在, 非存在, 漸近挙動等については $m = 1$ (単独) の場合が多く研究され色々な結果があるが, $m \geq 2$ の場合にはあまり研究されていない (特に非存在). $m = 2$ のとき [1, 3, 5, 6] 等で正値全域解の存在や非存在について研究されている. 本研究の目的は $m \geq 2$ のとき (1) の非負値全域解が存在するための条件又は存在しないための条件等を求めることである.

1 主結果

記号の導入:

$$A = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_m.$$

$\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, に対して Λ_i を次のように定義する:

$$\begin{aligned} \Lambda_i = {} & \lambda_i - 2 + (\lambda_{i+1} - 2)\alpha_i + (\lambda_{i+2} - 2)\alpha_i \alpha_{i+1} + \cdots \\ & + (\lambda_{i+m-2} - 2)\alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{i+m-3} + (\lambda_{i+m-1} - 2)\alpha_i \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{i+m-2}, \\ = {} & \lambda_i - 2 + \sum_{j=1}^{m-1} \left\{ (\lambda_{i+j} - 2) \prod_{k=0}^{j-1} \alpha_{i+k} \right\}, \\ \beta_i = {} & \frac{\Lambda_i}{A - 1}. \end{aligned}$$

Remark. $\lambda_{i+m} = \lambda_i$, $\alpha_{i+m} = \alpha_i$ と解釈する.

Theorem 1. $N \geq 3$, $\alpha_i \geq 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$, $A > 1$ とする. P_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, が

$$(2)\qquad \liminf_{|x| \to \infty} |x|^{\lambda_i} P_i(x) > 0$$

を満たすとする. このとき $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (1) の非負値全域解とすると

$$u_i(x) \le C_i|x|^{\beta_i} \quad \text{at} \quad \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

Theorem 2. $\alpha_i \ge 1,\ i = 1, 2, \cdots, m,\ A > 1$ とする.

(i) $N \ge 3$ とする. $P_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ が (2) を満たすとする. さらに

$$\Lambda_i \le 0 \quad \text{for some} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

を満たすとする. このとき $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (1) の非負値全域解とすると

$$(u_1, u_2, \cdots, u_m) \equiv (0, 0, \cdots, 0).$$

(ii) $N = 2$ とする. $P_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ が

$$\liminf_{|x| \to \infty} |x|^2 (\log|x|)^{\lambda_i} P_i(x) > 0$$

を満たすとする. さらに

$$\Lambda_i \le A - 1 \quad \text{for some} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

を満たすとする. このとき $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (1) の非負値全域解とすると

$$(u_1, u_2, \cdots, u_m) \equiv (0, 0, \cdots, 0).$$

Theorem 3. P_i は球対称な関数とする.

(i) $N \ge 3$ とする. $P_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ が

$$P_i(r) \le \frac{C_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r \ge r_0 > 0 \tag{3}$$

を満たすとする, ここで $C_i > 0$ は定数,

$$\Lambda_i > 0 \quad \text{for all} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

このとき (1) の球対称な正値全域解が存在する.

(ii) $N = 2$ とする. $P_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ が

$$P_i(r) \le \frac{C_i}{r^2(\log r)^{\lambda_i}}, \quad r \ge r_0 > 1$$

を満たすとする, ここで $C_i > 0$ は定数,

$$\Lambda_i \le A - 1 \quad \text{for all} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

このとき (1) の球対称な正値全域解が存在する.

$\alpha_i,\ i=1,2,\cdots,m,$ のなかで $\alpha_i<1$ となるものがあるとき, Theorem 2 は適用できない. しかし Theorem 2 の証明をみると, 解を球対称なものに限ると $\alpha_i\geq 1$ という条件は $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m>1$ という条件でもよいことが分かる. そこで $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m>1$ のとき球対称でない解の非存在はどうなるのかという疑問が起こる. これに対して次の Liouville 型の定理を得た.

Theorem 4. $N\geq 3$ とする. $P_i,\ i=1,2,\cdots,m,$ が (2) を満たすとする. さらに

$$\Lambda_{i_0}\leq 0 \quad \text{for some} \quad i_0\in\{1,2,\cdots,m\}$$

を満たすとする. このとき $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ が

$$u_{i_0}=O(\exp|x|^\rho) \quad \text{as } |x|\to\infty \quad \text{for some } \rho>0 \tag{4}$$

を満たす (1) の非負値全域解ならば

$$(u_1,u_2,\cdots,u_m)\equiv(0,0,\cdots,0).$$

Remark. Theorems 2-4 の結果は $m=2$ のとき [3, 5] の結果と一致している.

2 証明の概略

記号の導入 : $\mathbf{R}^N$ で定義された関数 v に対してその球面平均を $\bar{v}$ と書く,

$$\bar{v}_i(r)=\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{|x|=r} v_i(x)dS,$$

ここで ω_N は単位球の表面積.

$\hat{P}_i$ を次で定義する;

$$\hat{P}_i(r)=\begin{cases}\hat{P}_i(r)=\left(\dfrac{1}{\omega_N r^{N-1}}\displaystyle\int_{|x|=r} P_i(x)^{-\frac{\alpha_i'}{\alpha_i}}dS\right)^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_i'}}, \\ \hat{P}_i(r)=\displaystyle\min_{|x|=r} P_i(x),\end{cases}$$

ここで $1/\alpha_i+1/\alpha_i'=1$.

P_i の仮定 (2) より

$$\hat{P}_i(r)\geq\frac{C_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r\geq r_0>0, \quad i=1,2,\cdots,m \tag{5}$$

を満たす定数 $C_i>0,\ r_0>0$ が存在する.

Theorem 1 の証明の概略. $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ を (1) の非自明な非負値全域解とする. このとき u_i の球面平均 $\bar{u}_i$ は次の常微分不等式系を満たす.

$$\begin{cases}(r^{N-1}\bar{u}_i'(r))'\geq r^{N-1}\hat{P}_i(r)\bar{u}_{i+1}(r)^{\alpha_i}, \quad r>0, \\ u_i'(0)=0, \quad i=1,2,\cdots,m.\end{cases} \tag{6}$$

$(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ は非自明だから $\bar{u}_i(r) > 0$, $r > r_*$, $i = 1, 2, \cdots, m$, を満たす $r_* \geq r_0$ が存在する.

(6) を $[R, r]$, $R > r_*$ で 2 回積分する, (5) より

$$\begin{aligned}\bar{u}_i(r) \geq \;& \bar{u}_i(R) + \int_R^r s\left[1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]\hat{P}_i(s)\bar{u}_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds \\ \geq \;& \bar{u}_i(R) + \frac{C_i}{3^{N-2}}\int_R^r s^{-\lambda_i}(r-s)\bar{u}_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds \\ \geq \;& \hat{C}_i R^{-\lambda_i}\int_R^r (r-s)\bar{u}_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds, \quad R \leq r \leq 3R.\end{aligned}$$

ここで $\hat{C}_i > 0$ は R, r に無関係な定数. 以後 R, r に無関係な正定数を C と書くことにする.

$$f_i(r) = CR^{-\lambda_i}\int_R^r (r-s)\bar{u}_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds, \quad R \leq r \leq 3R$$

とおく. このとき f_i は次を満たす.

(7)
$$f_i(r) \geq CR^{-\lambda_i}\bar{u}_{i+1}(R)^{\alpha_i}(r-R)^2, \quad R \leq r \leq 3R,$$
$$f_i(R) = f_i'(R) = 0, \quad f_i'(r) \geq 0, \quad R \leq r \leq 3R,$$

(8)
$$f_i''(r) \geq CR^{-\lambda_i}f_{i+1}(r)^{\alpha_i}, \quad R \leq r \leq 3R.$$

(8) の両辺に f_{i+1}' をかけて $[R, r]$ で積分する（2 回）.

$$f_{i+1}'(r)^2 f_i(r) \geq CR^{-\lambda_i}f_{i+1}(r)^{\alpha_i+2}, \quad R \leq r \leq 3R,$$

(8) より

$$f_{i+1}'(r)^{2\alpha_{i-1}}f_{i-1}''(r) \geq CR^{-\lambda_i\alpha_{i-1}-\lambda_{i-1}}f_{i+1}(r)^{(\alpha_i+2)\alpha_{i-1}}, \quad R \leq r \leq 3R.$$

を得る. 同じことを繰り返して

(9)
$$f_{i+1}'(r)^{K_i}f_{i+1}''(r) \geq CR^{-L_i}f_{i+1}(r)^{M_i}, \quad R \leq r \leq 3R,$$

を得る, ここで

$$K_i = 2\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m-1}\alpha_{i-k},$$

$$L_i = \sum_{j=1}^{m-1}\left\{\lambda_{i-(j-1)}\prod_{k=j}^{m-1}\alpha_{i-k}\right\} + \lambda_{i-(m-1)},$$

$$M_i = \prod_{k=0}^{m-1}\alpha_{i-k} + 2\sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j}^{m-1}\alpha_{i-k} = A + K_i.$$

(9) の両辺に f_{i+1}' をかけて $[R, r]$ で積分する,

$$f_{i+1}'(r)f_{i+1}(r)^{-\delta_i-1} \geq CR^{-\frac{L_i}{K_i+2}}, \quad R \leq r \leq 3R,$$

ここで $\delta_i = (A-1)/(K_i+2) > 1$. この不等式を $[2R, 3R]$ で積分して

$$f_{i+1}(2R)^{-\delta_i} \geq CR^{-\frac{L_i}{K_i+2}+1}.$$

(7) より

$$\bar{u}_{i+2}(R) \leq CR^{\beta_{i+2}}$$

を得る. u_i は sub-harmonic だから

$$\begin{aligned} u_i(x) \leq & \frac{1}{|B_{|x|/2}(x)|}\int_{B_{|x|/2}(x)} u_i(y)dy \\ \leq & \frac{C}{|x|^N}\int_{|x|/2}^{3|x|/2} r^{N-1}\bar{u}_i(r)dr \\ \leq & C|x|^{\beta_i} \quad \text{at} \quad \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \end{aligned}$$

ここで $B_\rho(x) = \{y \in \mathbf{R}^N; |y-x| \leq \rho\}$.（証明終）

Theorem 2 の証明の概略. (i) のみ証明する. (ii) は [3]($m = 2$ の場合),[4] を参照. $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を非自明な非負値全域解とする. Theorem 1 より u_i の球面平均 $\bar{u}_i$ は

(10)
$$\bar{u}_i(r) \leq Cr^{\beta_i} \quad \text{at} \quad \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

を満たす, ここで $C > 0$ は定数. もし $\Lambda_{i_0} < 0$ となる $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$ があれば, β_i の定義より $\beta_{i_0} < 0$ となるから

$$\lim_{r\to\infty} \bar{u}_{i_0}(r) = 0.$$

一方 $\bar{u}_{i_0}$ は増加だから

$$\bar{u}_{i_0}(r) > \bar{u}_{i_0}(r_*) > 0, \quad r > r_* + 1.$$

これは矛盾. 従って $\Lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, m$, の場合を考える. Λ_i の仮定より $\Lambda_{i_0} = 0$ となる $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$ がある. 一般性を失うことなく $i_0 = m$ としてよい.

$\Lambda_m = 0$ とする. このとき Λ_i の定義より λ_i は

$$\lambda_{m-1} \leq 2,$$

$$\lambda_i \leq \sum_{j=1}^{m-i-1}\left\{(2-\lambda_{i+j})\prod_{k=0}^{j-1}\alpha_{i+k}\right\} + 2, \quad i = 1, 2, \cdots, m-2,$$

を満たす. さらに次のこともわかる,

$$\Lambda_i > 0 \quad \text{のとき} \quad \lambda_i < \sum_{j=1}^{m-i-1}\left\{(2-\lambda_{i+j})\prod_{k=0}^{j-1}\alpha_{i+k}\right\} + 2,$$

$$\Lambda_i = 0 \quad \text{のとき} \quad \lambda_i = \sum_{j=1}^{m-i-1}\left\{(2-\lambda_{i+j})\prod_{k=0}^{j-1}\alpha_{i+k}\right\} + 2.$$

(6) を $[r_*, r]$ で 2 回積分する,

$$\text{(11)}\quad \bar{u}_i(r) \geq \bar{u}_i(r_*) + \frac{1}{N-2}\int_{r_*}^{r} s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]\hat{P}_i(s)\bar{u}_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds, \quad i=1,2,\cdots,m.$$

$r > 2r_*$ とする. $(11)_{m-1}$ と (5) より

$$\text{(12)}\qquad \begin{aligned} \bar{u}_{m-1}(r) &\geq \bar{u}_{m-1}(r_*) + \frac{\bar{u}_m(r_*)^{\alpha_{m-1}}}{N-2}\int_{r_*}^{r} s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right]\hat{P}_{m-1}(s)ds \\ &\geq C\int_{r_*}^{r/2} s^{1-\lambda_{m-1}}ds. \end{aligned}$$

もし $\Lambda_{m-1}=0$ ならば $\lambda_{m-1}=2$ となるから (12) より

$$\bar{u}_{m-1}(r) \geq C\log r, \quad r \geq r_1 > 2r_*.$$

一方 $\beta_{m-1}=0$ だから (10) より $\bar{u}_{m-1}$ は有界となるから矛盾.

$\Lambda_{m-1}<0$ とする. このとき $\lambda_{m-1}<2$ だから (12) より

$$\bar{u}_{m-1}(r) \geq Cr^{2-\lambda_{m-1}}, \quad r \geq r_1 > 2r_*.$$

$(11)_{m-2}$ と (5) より

$$\bar{u}_{m-2}(r) \geq C\int_{r_1}^{r} s^{1-\lambda_{m-2}+(2-\lambda_{m-1})\alpha_{m-2}}ds, \quad r \geq r_1.$$

もし $\Lambda_{m-2}=0$ ならば

$$1-\lambda_{m-2}+(2-\lambda_{m-1})\alpha_{m-2}=-1$$

となるから

$$\bar{u}_{m-2}(r) \geq C\log r, \quad r \geq r_2 > r_1.$$

一方 $\beta_{m-2}=0$ だから (10) より u_{m-2} は有界となり矛盾. 同様にして

$$\Lambda_l = 0,\ l = m-2, m-1, \cdots, 2, 1,$$

$$\Lambda_i > 0, \quad i = l+1, l+2\cdots, m-1$$

のとき $\beta_l = 0$ だから (10) より u_l は有界. 一方

$$\bar{u}_l(r) \geq C\log r \quad \text{at} \quad \infty$$

となるから矛盾. (証明終)

Theorem 3 の証明の概略. (i) のみ証明する. (ii) は [3]($m=2$ の場合),[4] を参照. 一般性を失うことなく (3) で $r_0=1$ としてよい. $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ を (1) の球対称な正値全域解とすると u_i, $i=1,2,\cdots,m$, は次の常微分方程式系を満たす

$$\text{(13)}\qquad \begin{cases} r^{1-N}(r^{N-1}u_i')' = P_i(r)u_{i+1}^{\alpha_i}, & r>0, \\ u_i'(0)=0, & i=1,2,\cdots,m. \end{cases}$$

(13) を 2 回積分して, (13) と同値な次の積分方程式系を得る;

$$u_i(r) = a_i + \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] P_i(s)u_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds, \quad i=1,2,\cdots,m, \tag{14}$$

ここで $a_i = u_i(0)$. 従って (14) の正値解の存在を示せばよい.

a_i, $i = 1,2,\cdots,m$, を次が成り立つようにとる.

$$\begin{cases} \dfrac{(2a_{i+1})^{\alpha_i}}{N-2}\displaystyle\int_0^1 sP_i(s)ds \le \dfrac{a_i}{2} \\ \dfrac{C_i(2a_{i+1})^{\alpha_i}}{(N-2)(2-\lambda_i+\alpha_i\beta_{i+1})} \le \dfrac{a_i}{2} \end{cases}$$

$A > 1$ だからこのような $a_i > 0$ をとることは可能である. 集合 X と写像 $\mathcal{F} : X \to (C[0,\infty))^m$ を次のように定義する,

$$X = \{(u_1,u_2,\cdots,u_m) \in (C[0,\infty))^m; a_i \le u_i(r) \le F_i(r), \quad r \ge 0\},$$

$$\mathcal{F}(u_1,u_2,\cdots,u_m) = (\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_m),$$

ここで

$$F_i(r) = \begin{cases} 2a_i & \text{for} \quad 0 \le r \le 1, \\ 2a_i r^{\beta_i} & \text{for} \quad r \ge 1, \end{cases}$$

$$\tilde{u}_i(r) = a_i + \frac{1}{N-2}\int_0^r s\left[1-\left(\frac{s}{r}\right)^{N-2}\right] P_i(s)u_{i+1}(s)^{\alpha_i}ds, \quad i=1,2,\cdots,m.$$

容易に

(i) $\mathcal{F}(X) \subset X$,

(ii) $\mathcal{F}$ は連続,

(iii) $\mathcal{F}(X)$ は $(C[0,\infty))^m$ で相対コンパクト

が示されるから Schauder-Tychonoff の不動点定理より X の中に $\mathcal{F}$ の不動点が存在する:

$$\exists(u_1,u_2,\cdots,u_m) \in X \ ; \ (u_1,u_2\cdots,u_m) = \mathcal{F}(u_1,u_2,\cdots,u_m).$$

この不動点が (14) の解になる. 従って (1) の正値全域解となる.(証明終)

Theorem 4 の証明の概略. 一般性を失うことなく $i_0 = 1$ としてよい. $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ を (4) を満たす (1) の非自明な非負値全域解とする. このとき u_i の球面平均 $\bar{u}_i$ は

$$\begin{cases} \bar{u}_i'(r) \ge C_i r P_{i*}(r)\bar{u}_{i+1}(br)^{\alpha_i}, & r > 0, \\ \bar{u}'(0) = 0, \quad i=1,2,\cdots,m, \end{cases} \tag{15}$$

を満たす, ここで $C_i > 0$ は定数, $0 < b < 1$ は

$$b^{-2m} < A^{1/\rho},$$

$$P_{i*}(r) = \min_{|x|\le r} P_i(x).$$

この (15) を導くために次の補題を用いる．

Lemma [2, p.244] $D \subset \mathbf{R}^N$ は領域. $u \in C^2(D)$ は

$$u \geq 0, \quad \Delta u \geq 0 \quad \text{in} \quad D.$$

を満たすとする．このとき $\sigma > 0$, $x_0 \in D$, $B_{2r}(x_0) \subset D$ を満たす $r > 0$ に対して，

$$\left(\max_{B_r(x_0)} u \right)^\sigma \leq \frac{C}{r^N} \int_{B_{2r}(x_0)} u^\sigma dx$$

が成り立つ，ここで $C = C(N, \sigma) > 0$ は定数．

P_i の仮定 (2) より

$$P_{i*}(r) \geq \frac{C_i}{r^{\lambda_i}}, \quad r \geq r_0 \tag{16}$$

を満たす定数 $C_i > 0, r_0 > 0$ が存在する．$(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ は非自明だから $\bar{u}_i(r) > 0$, $r > r_*$, $i = 1, 2, \cdots, m$, を満たす $r_* \geq r_0$ が存在する．

Step 1：次のことを示す．

$$\lim_{r \to \infty} \bar{u}_1(r) = \infty, \tag{17}$$

$$\bar{u}_1(lr) \geq L \bar{u}_1(r)^A \quad \text{near} \quad +\infty, \tag{18}$$

ここで $l = b^{-2m}, L > 0$ は定数．

$r \geq r_*/b$ とする．(15) を $[br, r]$ で積分する，(16) と $\bar{u}_i$ の単調性より

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(r) \geq &\ C \int_{br}^{r} s P_{i*} \bar{u}_{i+1}(bs)^{\alpha_i} ds \\ \geq &\ C r^{2-\lambda_i} \bar{u}_{i+1}(b^2 r)^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

が示せる，ここで $C > 0$ は定数．この不等式と $\Lambda_1 \leq 0$ より (17) と (18) を示すことができる．

Step 2：$\tilde{r}$ を十分大きく

$$L^{\frac{1}{A-1}} \bar{u}_1(\tilde{r}) \geq e,$$

$$\bar{u}_1(lr) \geq L \bar{u}_1(r)^A, \quad r \geq \tilde{r},$$

が成り立つようにとる．$r \geq l\tilde{r}$ とする．このとき $\bar{u}_1$ は

$$\bar{u}_1(r) \geq L^{-\frac{1}{A-1}} \exp\left\{ A^{-\frac{\log \tilde{r}}{\log l} - 1} r^{\frac{\log A}{\log l}} \right\} \tag{19}$$

を満たす．b の選びかたより

$$\frac{\log A}{\log l} = \frac{\log A}{\log(b^{-2m})} > \rho.$$

一方 u_1 は

$$u_1(x) = O(\exp|x|^\rho) \quad \text{as} \quad |x| \to \infty$$

を満たすから

$$\bar{u}_1(r) = O(\exp r^\rho) \quad \text{as} \quad r \to \infty.$$

これは (19) に矛盾する. (証明終)

参考文献

[1] K. Deng, Nonexistence of entire solutions of a coupled elliptic systems, Funkcial. Ekvac., 39(1996), 541-551.

[2] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order, Second Edition, Springer, New York, 1998.

[3] T. Teramoto, Existence and nonexistence of positive entire solutions of second order semilinear elliptic systems, Funkcial. Ekvac., 42(1999), 241-260.

[4] T. Teramoto, On nonnegative entire solutions of second order semilinear elliptic systems, preprint.

[5] T. Teramoto and H. Usami, A Liouville type theorem for semilinear elliptic systems, to appear in Pacific J. Math.

[6] C. Yarur, Nonexistence of positive singular solutions for a class of semilinear elliptic systems, Electron. J. Diff. Eq., 1996, No.08(1996), 1-22.