数理解析研究所講究録 1254 巻 2002 年 41-45

高階非線形常微分方程式の非振動解の零点の個数についての一注意

愛媛大・理　内藤 学 (Manabu Naito)
Faculty of Science, Ehime University

次の形の高階非線形常微分方程式を考察する:

$$(\mathrm{E}_\lambda) \qquad x^{(n)} + \lambda p(t) f(x) = 0, \quad t \geq a.$$

ここで,

(a) $n \geq 2$ は偶数,

(b) $\lambda > 0$ はパラメータ,

(c) $p(t)$ は区間 $[a, \infty)$ 上の連続関数, $p(t) > 0$ $(t \geq a)$, $a > 0$,

(d) $f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ 上の連続関数, $xf(x) > 0$ $(x \neq 0)$,

と仮定する. また, さらに, $p(t)$ は積分条件

$$(1) \qquad \int_a^\infty t^{n-1} p(t) dt < +\infty$$

を満たすと仮定する. 我々は, (E_λ) の解 $x = x(t; \lambda)$ で

$$(2) \qquad \lim_{t \to \infty} x(t; \lambda) = 1$$

となるものの零点の個数について議論したい. (E_λ) の解 $x(t; \lambda)$ で (2) を満たすものが存在するための必要十分条件は (1) が成立することであることに注意する.

方程式 (E_λ) が線形 $(f(x) = x)$ のときは次が成立する ([3]).

既知定理. $f(x) = x$ とし積分条件 (1) を仮定する. このとき, 方程式 (E_λ) は, 各 $\lambda > 0$ に対して (2) を満たす $[a, \infty)$ 上の解 $x = x(t; \lambda)$ をただ一つもち, 次のようなパラメータの列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する:

(i) $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_k < \cdots, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty;$

(ii) $\lambda \in (\lambda_{k-1}, \lambda_k),\ k = 1, 2, \cdots,$ ならば, $x(t;\lambda)$ は開区間 (a,∞) に高々 $k-1$ 個の零点をもつ;

(iii) $\lambda = \lambda_k,\ k = 1, 2, \cdots,$ ならば, $x(t;\lambda)$ は開区間 (a,∞) に丁度 $k-1$ 個の零点をもち, $x(a;\lambda) = 0$.

ここでは, $f(x) = x + |x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(0 < \gamma < 1)$ という非線形の場合は上述の既知定理と同じ結論を得ることができることを報告する. $f(x) = x + |x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(\gamma > 1)$ あるいは $f(x) = |x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(\gamma > 0, \gamma \neq 1)$ の場合も解の零点の個数について類似の結論が成立すると予想できるが, これらの場合は未解決である.

定理 1. $f(x) = x + |x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(0 < \gamma < 1)$ とし積分条件 (1) を仮定する. このとき, 上述の既知定理と同一の結論が成立する.

定理 1 の証明のためにいくつかの補題と命題を用意する. 以下, とくに言及しなければ, $f(x) = x + |x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(0 < \gamma < 1)$ とし積分条件 (1) を仮定する.

補題 1. $\Lambda > 0$ を任意の数とする. このとき, 次のような $T(\Lambda) > a$ が存在する: 各 $\lambda \in (0, \Lambda]$ に対して方程式 (E_λ) は $[T(\Lambda), \infty)$ で定義され (2) を満たす解 $x = x(t;\lambda)$ をただ一つもつ. しかも, $x(t;\lambda)$ は $(t,\lambda) \in [T(\Lambda), \infty) \times (0, \Lambda]$ の連続関数である.

補題 1 の証明の概略は次の通り: (E_λ) の解 $x = x(t;\lambda)$ で条件 (2) を満たすものは

$$x(t;\lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} p(s) f(x(s;\lambda)) ds \qquad (t\ :\ \text{十分大})$$

と書けることに注意する. 与えられた $\Lambda > 0$ に対して, $\lambda \in (0, \Lambda]$ で考える. $T = T(\Lambda) > a$ を十分大きく取り

$$(Mx)(t;\lambda) = 1 - \lambda \int_t^\infty \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} p(s) f(x(s;\lambda)) ds, \quad (t,\lambda) \in [T,\infty) \times (0,\Lambda],$$

が $[T,\infty) \times (0,\Lambda]$ 上の有界連続関数の全体からなる空間 $C_b([T,\infty) \times (0,\Lambda])$ の適当な閉部分集合上で縮小写像になるようにする. 写像 M の不動点 $x(t;\lambda)$ は (E_λ) の $[T,\infty)$ 上の解であり, 条件 (2) を満たす. 構成の仕方から $x(t;\lambda)$ が $(t,\lambda) \in [T,\infty) \times (0,\Lambda]$ の連続関数であることは自明である.

Wintner の定理 (例えば [2, p.29]) によって, 固定された $\lambda > 0$ に対する解 $x(t;\lambda)$ の大域存在性 (解としての t についての存在区間が $[a,\infty)$ であること) は明らかである.

注意. $f(x)$ が十分大きな $|x|$ に対して線形あるいは劣線形のときは大域存在性が証明できる. 優線形のとき, 例えば, $f(x) = x + |x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(\gamma > 1)$ あるいは $f(x) =$

$|x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(\gamma > 1)$ のときは, 一般には, $p(t)$ の連続性の仮定だけの下では, 大域存在性は保証されない.

命題1. 各 $\lambda > 0$ に対して, $x(t;\lambda)$ の零点は simple である.

命題1は, $x(t;\lambda)$ が

$$\lim_{t\to\infty} x^{(i)}(t;\lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \tag{3}$$

を満たすことに注意して, 線形 $(f(x) = x)$ のとき ([3]) と同様に, 背理法で証明することができる.

解 $x(t;\lambda)$ の大域区間 $[a,\infty)$ での一意性を示すために上述の命題1と次の補題2を必要とする. (十分先の区間 $[T_\lambda,\infty)$, $T_\lambda > a$, での一意性は補題1からわかる.)

補題2. $\lambda > 0, b \geq a$ を固定し, 初期値問題

$$\begin{cases} x^{(n)} + \lambda p(t) f(x) = 0 \\ x(b) = \xi_0,\ x'(b) = \xi_1, \cdots,\ x^{(n-1)}(b) = \xi_{n-1} \end{cases}$$

を考える. このとき, 少なくとも一つの ξ_i が 0 でなければ, この初期値問題の解は局所的に一意に定まる.

補題2の証明の概略は次の通り: $f(x) = x + |x|^\gamma \mathrm{sgn}\, x$ $(0 < \gamma < 1)$ が $(-\infty, 0)$ および $(0,\infty)$ で局所リプシッツ条件を満たすことを利用する. 仮に, $x_1(t)$ も $x_2(t)$ もともにこの初期値問題の解とする. $\xi_l \neq 0$ $(i = l)$, $\xi_i = 0$ $(i = 0, 1, \cdots, l-1)$ となる l を取れば, $t = b$ の近傍で

$$x_i(t) = \frac{\xi_l}{l!}(t-b)^l + \cdots + \frac{\xi_{n-1}}{(n-1)!}(t-b)^{n-1} - \lambda \int_b^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} p(s) f(x_i(s)) ds \qquad (i = 1, 2)$$

が成立する. 関数 $y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ を

$$y_i(t) = \begin{cases} \dfrac{x_i(t)}{(t-b)^l} & (t \neq b) \\ \dfrac{\xi_l}{l!} & (t = b) \end{cases}$$

と定めて, $|y_1(t) - y_2(t)|$ についてのグロンウォールの不等式に持ち込んで, $|y_1(t) - y_2(t)| \equiv 0$ ($t = b$ の近傍) を証明する.

補題1, 補題2, 命題1を使えば, 容易に, 解 $x(t;\lambda)$ の大域区間 $[a,\infty)$ での一意性を示すことができる. さらに, 大域区間での一意性と補題1および常微分方程式に対す

る基礎定理を使えば, $x(t;\lambda)$ の $(t,\lambda)\in[a,\infty)\times(0,\infty)$ についての連続性を示すことができる. すなわち, 次の命題 2 得る.

命題 2. 任意の $\lambda>0$ に対して, 方程式 (E_λ) の $[a,\infty)$ 上の解 $x(t;\lambda)$ で (2) を満たすものがただ一つ存在する. しかも, $x(t;\lambda)$ は $(t,\lambda)\in[a,\infty)\times(0,\infty)$ の連続関数である.

命題 3. 有界閉区間 $[\alpha,\beta]\subseteq[a,\infty)$ を固定する. このとき, 十分大きなすべての $\lambda>0$ に対して, $x(t;\lambda)$ は $[\alpha,\beta]$ に零点をもつ.

命題 3 の証明は線形の場合 (Elias [1]) の証明と同様である. ここで, $f(x)=x+|x|^\gamma\mathrm{sgn}\,x$ $(0<\gamma<1)$ であることが用いられる. ($f(x)=x+|x|^\gamma\mathrm{sgn}\,x$ $(\gamma>1)$ あるいは $f(x)=|x|^\gamma\mathrm{sgn}\,x$ $(\gamma>0,\gamma\neq1)$ の場合は証明できない.)

補題 3. 十分小さなすべての $\lambda>0$ に対して, $x(t;\lambda)$ は $[a,\infty)$ に零点をもたない.

補題 3 は $x(t;\lambda)$ の構成の仕方（補題 1 の証明）をみれば容易にわかる.

以上の準備の下で, 定理 1 が証明できる.

（定理 1 の証明の概略） $k=1,2,\cdots$ に対して

$$\Lambda_k^+=\{\lambda\in(0,\infty)\ :\ \text{解}\,x(t;\lambda)\,\text{は開区間}\,(a,\infty)\,\text{に}\,k\,\text{個以上の零点をもつ}\}$$

とおく. Λ_k^+ は空でない下に有界な集合である. このとき

$$\lambda_k=\inf\Lambda_k^+,\quad k=1,2,\cdots,$$

が求めるものとなっている.

$x(t;\lambda)$ が (3) を満たすことに注意すれば直ちに次の系を得る.

系 1. 特異境界値問題

$$\begin{cases} x^{(n)}+\lambda p(t)\big(x+|x|^\gamma\mathrm{sgn}\,x\big)=0, & t\geq a,\\ x(a)=0, \quad \lim\limits_{t\to\infty}x^{(i)}(t)=0 & (i=1,2,\cdots,n-1)\end{cases}\tag{4}$$

を考える. ここで, $0<\gamma<1$ である. もし (1) が成立していれば, 次のようなパラメータの列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ が存在する: $0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k<\cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k=\infty$, $\lambda=\lambda_k$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき, 問題 (4) は, 開区間 (a,∞) に丁度 $k-1$ 個の零点があるような非自明解 $x=x(t;\lambda_k)$ をもつ.

References

[1] U. Elias, Eigenvalue problems for the equation $Ly + \lambda p(x)y = 0$, J. Differential Equations, **29**(1978), 28–57.

[2] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, Inc., 1964.

[3] M. Naito, On the number of zeros of nonoscillatory solutions to higher-order linear ordinary differential equations, Monatsh. Math., to appear.