数理解析研究所講究録 1255 巻 2002 年 32-45

多様体上の磁場における古典力学軌道と量子エネルギー分布

徳島大・総合科学　桑原 類史 (Ruishi KUWABARA) †
Univ. of Tokushima

はじめに

Riemann 多様体 (M, g) 上の磁場とは，M 上の閉，実 2 次微分形式 $\Theta = \frac{1}{2}\sum \Theta_{jk} dx^j \wedge dx^k$ であり，その力をうけて運動する（単位）荷電粒子の運動は方程式

$$\ddot{x}^j + \sum_{l,m} \Gamma^j_{lm} \dot{x}^l \dot{x}^m - 2\sum_{l,m} g^{jl}\Theta_{lm}\dot{x}^m = 0 \tag{0.1}$$

(Γ^j_{lm}: 計量 g から定まる Christoffel 記号) で与えられる．($\Theta \equiv 0$ の場合，測地線の方程式となり，自由運動を表す.)

対応する量子力学系は次のように考える：

もし M 上の 1 形式 $\alpha = \sum A_j dx^j$ で，$d\alpha = \Theta$ となるもの（ポテンシャル）が存在する場合には，上記古典力学系は，シンプレクティック形式 $\Omega_M = \sum d\xi_j \wedge dx^j$，Hamilton 関数 $H = \sum g^{jk}(\xi_j - A_j)(\xi_k - A_k)$ として，余接空間 T^*M 上の Hamilton 系 (T^*M, Ω_M, H) で定式化される．これより，対応関係 $\xi_j \mapsto -i\nabla_j$ (∇_j: (M,g) における共変微分) に基づき，量子系の Schrödinger 作用素として，$L^2(M)$ における作用素

$$\hat{H} = -\sum_{j,k} g^{jk}(\nabla_j - iA_j)(\nabla_k - iA_k) \tag{0.2}$$

が考えられる．

Θ が単に閉である場合は，$d\alpha = \Theta$ を満たす α は，局所的にしか存在せず，(0.2) は M 全体で意味のある作用素ではない．各局所近傍で (0.2) 式で与えられる作用素を大域的な（M 全体での）object と見なそうとすると関数空間 $L^2(M)$ ではなく，ある Hermite 直線束 $\pi_E : E \to M$ の断面 (section) に対する作用素と考えることになる．更に，この設定がうまくいくためには，$\Theta/2\pi$ が integral，すなわちその de Rham コホモロジー類が $H^2_D(M, \mathbb{Z}) (\subset H^2(M, \mathbb{R}))$ に属することが必要十分である (Chern-Weil-Kostant)．同様に，$\forall m \in \mathbb{Z}$ に対して，局所的に

$$\hat{H}_m = -\sum_{j,k} g^{jk}(\nabla_j - imA_j)(\nabla_k - imA_k) \tag{0.3}$$

†E-mail address: kuwabara@ias.tokushima-u.ac.jp

で与えられる作用素は，Hermite 直線束 $\pi_E^m : E^{\otimes m} \to M$ 上の作用素として大域的に定義される．このとき，$\hat{H}_m$ は電荷 m の粒子に対する Schrödinger 作用素と考えられる．

以上の議論を幾何学的に述べると次のようになる：Chern 類が $[m\Theta/2\pi]$ である Hermite 直線束 $E^{\otimes m}$ 上に曲率が $m\Theta$ となる接続 $\tilde{\nabla}^{(m)}$ が導入され，計量 g と $\tilde{\nabla}^{(m)}$ から，自然に，$E^{\otimes m}$ 上に "Laplacian" $\hat{H}_m$ が定義される．これが磁場の力学系 (1) に対する Schrödinger 作用素と見なされる．

註．磁場 Θ に対して，直線束 $E^{\otimes m}$ は一意的に決まるが，接続 $\tilde{\nabla}^{(m)}$ は，必ずしも一意的ではない．実際，$H^1(M,\mathbb{R}) \neq \{0\}$ のとき，曲率が $m\Theta$ となる接続の全体は（ゲージ同値なものを除いて）トーラス $H^1(M,\mathbb{R})/H_D^1(M,\mathbb{Z})$ と同一視される．

一方，古典力学系 (0.1) も，Θ が完全形式でないときは，Hamilton 系 (T^*M, Ω_M, H) として定式化できない．そこで，シンプレクティック構造を $\Omega := \Omega_M + \pi_M^*\Theta$ $(\pi_M : T^*M \to M)$ と変形し，Hamilton 関数を $H_0 = \sum g^{jk}\xi_j\xi_k$ とおいた Hamilton 系 (T^*M, Ω, H_0) を考えれば，運動方程式 (0.1) を導出することができる．

$\hat{H}_m$ は，非負，(形式的) 自己共役，楕円型作用素であり，M がコンパクトと仮定すると，そのスペクトル $\mathrm{Spec}(\hat{H}_m)$ は，非負の固有値

$$(0 \le)\ \lambda_1^{(m)} \le \lambda_2^{(m)} \le \ldots \le \lambda_k^{(m)} \le \ldots \uparrow +\infty$$

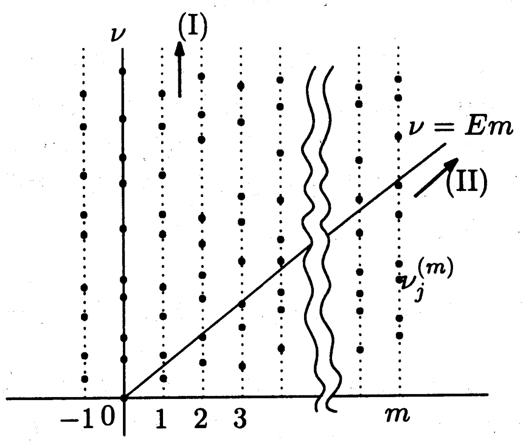
から成る．

さて，問題は，３つの構造

$$(\mathcal{C})\ \ \mathcal{H}_{\mathrm{mag}} = (T^*M, \Omega, H_0), \quad (\mathcal{G})\ \ (M, g; E^{\otimes m}, \tilde{\nabla}^{(m)}), \quad (\mathcal{Q})\ \ \mathrm{Spec}(\hat{H}_m) = \{\lambda_j^{(m)}\}_{j=1}^{\infty}$$

について，$(\mathcal{Q})$ を軸にして，互いの関係に注目しながら考察することである．このとき，$(\mathcal{Q})$ の性質，特にその漸近的な性質に関して，次の２つの着目の仕方がある（図１参照）：

図 1: $\nu_j^{(m)} := \sqrt{\lambda_j^{(m)}}$ の分布



(I) m を固定して，$\lambda_j^{(m)}$ の $j \to +\infty$ における漸近的な分布状況を考察する．

(II) $\{\lambda_j^{(m)}; m \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{N}\}$ 全体を考え，$\nu_j^{(m)} := \sqrt{\lambda_j^{(m)}}$ について，直線 $\nu = Em$ 方向の漸近分布 $(m \to +\infty)$ を考察する.

本稿では，視点 (I) の考察から $(\mathcal{G})$ と $(\mathcal{Q})$ の関係が，また，視点 (II) から $(\mathcal{C})$ と $(\mathcal{Q})$ の関係がそれぞれ見えてくるいくつかの結果を述べる.

1　主 $U(1)$ 束上の力学系とその簡約

磁場における力学系について，別の見方（簡約化による定式化）をする.

$\pi : P \to M$ を Hermite 直線束 $\pi_E : E \to M$ に同伴する主 $U(1)$ バンドルとする. P 上には，E 上の接続 $\widetilde{\nabla}^{(1)}$ に対応する接続 $\widetilde{\nabla}$ が誘導される. M の計量 g，接続 $\widetilde{\nabla}$ および，構造群 $U(1)$ の不変計量から，**Kaluza-Klein 計量**と呼ばれる P 上の Riemann 計量 $\tilde{g}$ が定義される. このとき，$U(1)$ の作用は計量 $\tilde{g}$ に関して等長的である.

Riemann 計量 $\tilde{g}$ から，T^*P 上の測地流の系 $(T^*P, \Omega_P, \widetilde{H})$ が定まる. $U(1) = \{e^{i\theta}; 0 \leq \theta < 2\pi\}$ とおいて，$\tilde{x} = (x, \theta)$ $(x \in U \subset M,\ \theta \in [0, 2\pi))$ を P の局所座標，$(\tilde{x}, \tilde{\eta}) = (x, \theta, \eta, \tau)$ を T^*P の正準座標とすると，T^*P 上の Hamilton 関数 $\widetilde{H}$ は

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}(\tilde{x}, \tilde{\eta}) &= \sum \tilde{g}^{jk}(\tilde{x})\tilde{\eta}_j\tilde{\eta}_k \\
&= \sum g^{jk}(x)\eta_j\eta_k - 2\sum g^{jk}(x)A_k(x)\eta_j\tau + \big(|A(x)|^2 + \frac{1}{c^2}\big)\tau^2.
\end{aligned}
$$

とかける. ここで，$c := |\partial/\partial\theta|$. そして，運動方程式は

$$
\text{(1.1)} \qquad
\begin{cases}
\dot{x}^i = 2(\sum g^{ij}\eta_j - A^i\tau) \qquad (A^i := \sum g^{ij}A_j), \\
\dot{\eta}^i = -\sum \dfrac{\partial g^{jk}}{\partial x^i}\eta_j\eta_k + 2\sum \dfrac{\partial A^j}{\partial x^i}\eta_j\tau - \dfrac{\partial}{\partial x^i}(|A|^2)\tau^2, \\
\dot{\theta} = -2\sum A^j\eta_j + 2(|A|^2 + \dfrac{1}{c^2})\tau, \\
\dot{\tau} = 0 \quad \to \tau = \text{const.}(= \mu).
\end{cases}
$$

この力学系の流れは $U(1)$ の（シンプレクティック）作用と可換であるから，Marsden-Weinstein の Reduction program によって，下図のように，各 $\mu \in \mathrm{u}(1)^*$ に対して，**簡約力学系** $(P_\mu, \Omega_\mu, \widetilde{H}_\mu)$ が得られる. ここで，$J : T^*P \to \mathrm{u}(1)^* = \{i\mu d\theta; \mu \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$ は $U(1)$ のシンプレクティック作用から定まる運動量写像である. さらに，微分同相写像 $\Psi_\mu : P_\mu \to T^*M$ が P の接続 $\widetilde{\nabla}$ から自然に定義され，関係：

$$
\Omega_\mu = \Psi_\mu^*(\Omega_M + \mu\pi_M^*\Theta), \quad \widetilde{H}_\mu = \Psi_\mu^* H_0 + \frac{\mu^2}{c^2}
$$

を与えることが分かる. よって，古典力学系として，$(P_1, \Omega_1, \widetilde{H}_1)$ は magnetic flow の系 $\mathcal{H}_{\mathrm{mag}} = (T^*M, \Omega, H_0)$ に同型である. (Hamilton 関数 $\widetilde{H}_1$ と H_0 は定数だけの違いがある.)

図 2: 力学系の簡約

$$\begin{tikzcd}
 & T^*P \arrow[dl, "\pi_P"'] \arrow[r, "J"] & \mathfrak{u}(1)^* \\
P \arrow[dd, "\pi"] & J^{-1}(\mu) \arrow[u, "i_\mu"'] \arrow[d, "\pi_\mu"] & \\
 & P_\mu(= J^{-1}(\mu)/S^1) \arrow[d, "\Psi_\mu", "\cong"'] & \\
M & T^*M \arrow[l, "\pi_M"'] &
\end{tikzcd}$$

群 $U(1)$ の P への作用に対応する微分作用素 $D_\theta = -i\partial/\partial\theta$ を考える．自己共役作用素 D_θ のスペクトルは $\mathbb{Z}$ で，固有空間分解

$$L^2(P) = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_m$$

が得られる．ここで，$\mathcal{H}_m$ は $f(p\cdot e^{i\theta}) = e^{im\theta}f(p)$ をみたす関数からなる空間である．$U(1)$ の作用が等長的であるから，Δ_P と D_θ は可換である．よって，Δ_P は $\mathcal{H}_m$ を不変にする．そこで，$D_m := \Delta_P|_{\mathcal{H}_m}$ とおく．$U(1)$ の表現 $e^{i\theta} \mapsto e^{-im\theta}$ による P の同伴直線束が $\pi_E^m : E^{\otimes m} \to M$ に他ならない．そして，同形対応 $\mathcal{H}_m \cong L^2(E^{\otimes m})$ が成り立つ．この対応で作用素 D_m は $C^\infty(E^{\otimes m})$ に作用する作用素

$$\hat{H}_m + m^2/c^2$$

に対応する．従って，D_m の固有値は $\{\lambda_j^{(m)} + m^2/c^2\}_{j=1}^\infty$ であり，Δ_P のスペクトルは，

$$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \bigcup_{j=1}^{\infty} \{\lambda_j^{(m)} + m^2/c^2\}$$

である．

具体例.

(1) 平坦トーラス上の零磁場. n 次元平坦トーラス $\mathbb{T}^n := \Gamma\backslash\mathbb{R}^n$ ($\Gamma : \mathbb{R}^n$ の格子) 上の磁場 $\Theta \equiv 0$ に対応する直線束 E は自明束で，接続形式は，ゲージ同値なものを除いて，$-i\alpha = -i\sum_j a_j dx^j$（$a_j$: 実定数）で与えられる．$\Gamma$ の双対格子を $\Gamma^* := \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \xi\cdot\gamma \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall\gamma \in \Gamma\}$ とすると，E 上の接続形式 $-i\alpha$ に対応する Schrödinger 作用素 $\hat{H}_\alpha$ のスペクトルは

$$\{\|2\pi\xi - a\|^2;\ \xi \in \Gamma^*\} \qquad (a := (a_1, \ldots, a_n))$$

であり，対応する固有関数系は，$\{s_\xi(x) := \exp(2\pi i x\cdot\xi)\}$ で与えられる．このように，零磁場に対応する接続（ベクトルポテンシャル）は一意的でなく，同じ古典力学系に対応する量子系のスペクトルが異なる様相を呈する（Aharanov-Bohm 効果）．

(2) 2次元平坦トーラス上の一様磁場. Heisenberg 群

$$H_1 := \left\{(x,y,z) := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ x,y,z \in \mathbb{R}\right\}$$

において，離散部分群

$$\Gamma := \{(x,y,z) \in H_1;\ x,y,z \in \mathbb{Z}\}$$

による剰余空間 $P = \Gamma\backslash H_1$（べき零多様体）を考える．P 上には，$S^1 = \{(0,0,z) \in H_1;\ 0 \leq z < 1\}$ が（右から）作用し，この作用による剰余空間 P/S^1 は2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ であることが分かる．このようにして，主 $U(1)$ 束 $\pi : P \to \mathbb{T}^2;\ [(x,y,z)] \mapsto [(x,y)]$ が得られる．

H_1 上の3つの左不変ベクトル場

$$e_1 := \partial/\partial x,\ \ e_2 := \partial/\partial y + x\partial/\partial z,\ \ e_3 := \partial/\partial z$$

が正規直交系となるように H_1 の左不変計量を定義する．これより，P の計量 $\tilde{g}$ が誘導される．さらに，$\mathbb{T}^2$ において，$\pi_*(e_1) = \partial/\partial x$, $\pi_*(e_2) = \partial/\partial y$ が正規直交系であるように計量を定義すると，これは $\mathbb{T}^2$ の平坦計量であり，π は Riemannian submersion となる．

P の各点 p において，e_1, e_2 で生成される水平空間 $H_p (\subset T_pP)$ は P の接続 $\tilde{\nabla}$ を定義し，その曲率は $\Theta = -2\pi dx \wedge dy$（一様磁場）となる．計量 $\tilde{g}$ は $\tilde{\nabla}$ に対応する Kaluza-Klein 計量である．このとき，Schrödinger 作用素 $\hat{H}_m\ (m \neq 0)$ のスペクトルは

$$\lambda_j^{(m)} = 2\pi|m|(2j+1) \quad (j = 0,1,2,\ldots)$$

で，$\lambda_j^{(m)}$ の重複度は $|m|$ である（[8]）．古典力学系の軌道は，容易にわかるように，全て周期的であり，それらは零ホモトピックである．さらに，力学系として Liouville の意味で完全積分可能である．

(3) 複素射影空間上の調和磁場 ([13])．$\mathbb{C}^{n+1} = \{z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)\}$ の Hermite 内積を $\langle z, z'\rangle := \sum_j z_j \bar{z}'_j$ とし，$\langle z, z'\rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}\langle z, z'\rangle$ とおく．$\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ 内の半径2の球面

$$S^{2n+1}_{[2]} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1};\ \langle z, z\rangle_{\mathbb{R}} = 4\}$$

上の各点 $z = (z_0, \ldots, z_n)$ への $U(1) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ の作用：$z \mapsto \lambda z := (\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n)$ は等長作用であり，主 $U(1)$ 束（Hopf 束）

$$\pi : S^{2n+1}_{[2]} \to \mathbb{C}P^n = S^{2n+1}_{[2]}/U(1)$$

が得られる．$S^{2n+1}_{[2]}$ の接束は，$TS^{2n+1}_{[2]} = \{(z,u) \in S^{2n+1}_{[2]} \times \mathbb{C}^{n+1};\ \langle z, u\rangle_{\mathbb{R}} = 0\}$ で与えられる．各 $z \in S^{2n+1}_{[2]}$ における接空間 $T_zS^{2n+1}_{[2]}$ の Hermite 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関する直交直和分解：

$$H_z \oplus V_z := \{(z,u);\ \langle z, u\rangle = 0\} \oplus \{(z, icz);\ c \in \mathbb{R}\}$$

を考えると，V_z はファイバーの接空間であり，H_z は主束 $S^{2n+1}_{[2]}$ 上の接続を定義することが分かり，それを $\tilde{\nabla}$ とする．また，$\pi_*|_{H_z}$ が等長写像となる様に $\mathbb{C}P^n$ の Riemann 計量 g を定

める．これは複素多様体$\mathbb{C}P^n$上のFubini-Study計量と呼ばれる正則断面曲率が1のKähler計量であり，gに対応する基本2次形式が接続$\tilde{\nabla}$の曲率形式Θになっている．更に，Θは$(\mathbb{C}P^n, g)$上の調和2次形式であり，$[\Theta/2\pi]$は$H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$の生成元になっている．以上の設定のもとで，Schrödinger作用素$\hat{H}_m$ $(m \in \mathbb{Z})$のスペクトルは

$$\lambda_j^{(m)} = \Big(j + \frac{|m|}{2}\Big)\Big(j + \frac{|m|}{2} + n\Big) - \frac{m^2}{4} \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる．古典力学系の軌道は，全て周期的であり，例えば$\mathbb{C}P^1 = S^2$上の軌道は小円を描く．また，完全積分可能であることも分かる．

2 漸近分布(I) ― スペクトルとホロノミー ―

2.1 Heltonの定理とその一般化

$\nu_j^{(m)} := \sqrt{\lambda_j^{(m)}}$とおき，集合$\{\nu_j^{(m)} - \nu_k^{(m)}; j, k \in \mathbb{N}\}$の集積点の全体を$\Sigma^{(m)}$とおく．$\Sigma^{(m)}$は$\mathbb{R}$の閉部分集合である．$m = 0$の場合について，Helton[9]，Guillemin[5]は次を示した．

定理 (Helton-Guillemin)． $\Sigma^{(0)} = \mathbb{R}$，またはある正数$T$が存在して，$\Sigma^{(0)} = \{2n\pi/T;\ n \in \mathbb{Z}\}$である．更に，$\Sigma^{(0)} = \{2n\pi/T;\ n \in \mathbb{Z}\}$となる為の必要十分条件は，測地流$\phi_t$の軌道が全て周期的で，それらの共通最小周期$(< \infty)$が$T$であることである．

この定理の経緯を少し詳しく述べると，まず，Helton[9]が示したことは，

『 $\Sigma^{(0)} \neq \mathbb{R} \Longrightarrow$ 測地流ϕ_tの軌道は全て周期的 』

である．測地流ϕ_tの軌道がすべて周期的とすると，Wadsley[22]の結果によれば，全ての周期軌道の共通周期$T(< \infty)$が存在し，かつほとんど全ての軌道の基本周期がTである．この様な(M, g)はP_T**-多様体**と呼ばれている（[1]）．そして，Guillemin[5]（[4]）は，ϕ_tの軌道が全て周期Tの周期軌道であるとき，$\exp(-i\sqrt{\Delta_M}t)$をFourier積分作用素の理論によって解析して，スペクトル$\{\nu_j^{(0)}; j \in \mathbb{N}\}$は，$\forall\varepsilon > 0$に対して，有限個の固有値を除いて，集合

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Big[\frac{2\pi}{T}(k + \frac{\beta}{4}) - \varepsilon, \frac{2\pi}{T}(k + \frac{\beta}{4}) + \varepsilon\Big]$$

(β : 周期軌道のMaslov指数(一定の整数値))に含まれることを示した．以上をまとめて，上の定理が得られる．

註. P_T-多様体の典型的な例は，ランク1のコンパクト対称空間（球面，射影空間）である．

さて，$m \neq 0$に対して，$\Sigma^{(m)}$の構造について何が言えるだろうか？

Heltonの議論をP上の作用素$\sqrt{\Delta_P}$とその固有値$\tilde{\nu}_j^{(m)} := (\lambda_j^{(m)} + |m|/c^2)^{1/2}$に適用することによって，以下の結果が得られる.（詳細は，[17], [18]を参照されたい.）

『ある $m \in \mathbb{Z}$ に対して$\Sigma^{(m)} \neq \mathbb{R} \Longrightarrow$ 測地流 ϕ_t の軌道は全て周期的』

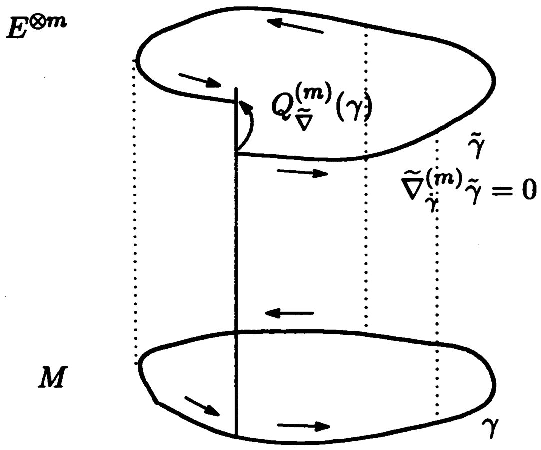
すなわち，

『(M,g) が P_T-多様体でない $\Longrightarrow$ $\Sigma^{(m)} = \mathbb{R}\ (\forall m \in \mathbb{Z})$』

がいえる．

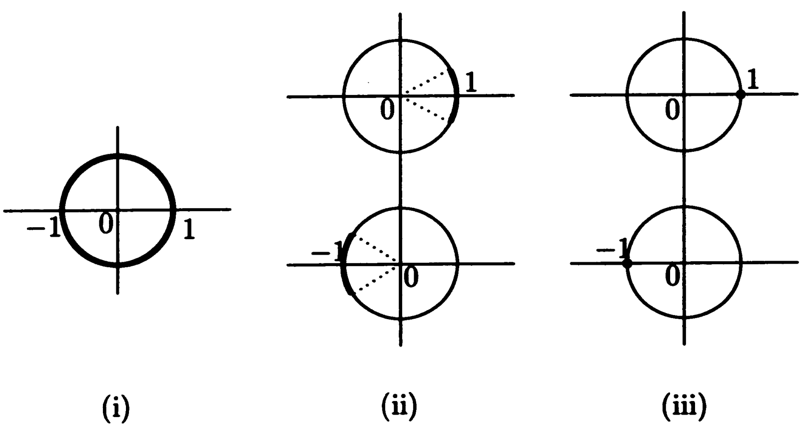
次に，(M,g) **が** P_T**-多様体であるとする**．(M,g) 上の長さ T の閉測地線の全体を Γ とし，$\gamma \in \Gamma$ に沿う $\tilde{\nabla}^{(m)}$ のホロノミー(holonomy)を $Q_{\tilde{\nabla}}^{(m)}(\gamma)$ で表す（[12] 参照）．$Q_{\tilde{\nabla}}^{(m)}(\gamma) \in U(1)$ で，$Q_{\tilde{\nabla}}^{(m)}(\gamma) = (Q_{\tilde{\nabla}}^{(1)}(\gamma))^m$ が成り立つ．

図 3: ホロノミー



集合 $\Sigma_{\tilde{\nabla}}^{(m)} := \{Q_{\tilde{\nabla}}^{(m)}(\gamma); \gamma \in \Gamma\}$ を考える．写像 $Q_{\tilde{\nabla}}^{(m)} : \Gamma \to U(1)$ の連続性に注意すると，$\Sigma_{\tilde{\nabla}}^{(m)}$ の形は以下のような場合が起こり得る．

図 4: 集合 $\Sigma_{\tilde{\nabla}}^{(m)}$ のタイプ



定理 2.1 集合 $\Sigma^{(1)}_{\tilde{\nabla}}$ が $\alpha \in [0,1]$ によって $\{e^{it}; -\pi\alpha \le t \le \pi\alpha\}$ または $\{e^{it}; \pi - \pi\alpha \le t \le \pi + \pi\alpha\}$ と表されているとすると，このとき，

$$\Sigma^{(m)} \supset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{T}(n - m\alpha), \frac{2\pi}{T}(n + m\alpha)\right].$$

上の図において，$|m|$ が大きくなると，場合 (ii) から (i) に移行する．よって，次が言える．

系 2.2 もし $\Sigma^{(2)}_{\tilde{\nabla}} \neq \{1\}$ ならば，ある $m_0 > 0$ が存在して，$|m| \ge m_0$ なる $\forall m$ に対して，$\Sigma^{(m)} = \mathbb{R}$ が成り立つ．

2.2 漸近分布とホロノミー

$E^{\otimes m}$ 上の 1 次擬微分作用素 $\sqrt{\hat{H}_m}$ に対応するユニタリ作用素 $R(t) := \exp(-it\sqrt{\hat{H}_m})$ ($t \in \mathbb{R}$) の解析を Fourier 積分作用素の理論 ([10], [11]) に従って解析する．

(M, g) が P_T-多様体であるとすると，シンボル計算によって，まず次が言える（[14]）．

命題 2.3 (M, g) が P_T-多様体とする．このとき，$R(T)$ は 0 次擬微分作用素で，その主シンボルは

$$e^{-\pi i\beta/2} Q^{(m)}_{\tilde{\nabla}}(\gamma(x, \xi))$$

である．ただし，$\gamma(x, \xi)$ は初期値 $(x, \xi) \in T^*M \backslash 0$ で定まる閉測地線を表す．また，β は測地流の周期軌道の *Maslov* 指数である．

いま，$\mu_k := \frac{2\pi}{T}(k + \frac{\beta}{4})$ ($k \in \mathbb{N}$) とおく．上の命題から，次がわかる．

定理 2.4 (Clustering Theorem) (M, g) を P_T-多様体とし，$\Sigma^{(m)}_{\tilde{\nabla}} = \{1\}$ (*resp.* $\Sigma^{(m)}_{\tilde{\nabla}} = \{-1\}$) が成り立つとする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\sqrt{\hat{H}_m}$ の固有値は（有限個をのぞいて）

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} [\mu_k - \varepsilon, \mu_k + \varepsilon]$$

$$\left(resp. \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\mu_k + \frac{\pi}{T} - \varepsilon, \mu_k + \frac{\pi}{T} + \varepsilon\right]\right)$$

に含まれる．

この定理と定理 2.1 より，$\Sigma^{(m)}$ について，次が言える．

系 2.5 任意の $m \in \mathbb{Z}$ に対して，$\Sigma^{(m)} = \{2n\pi/T\}$ となる為の必要十分条件は，(M,g) が P_T-多様体で，$\Sigma^{(2)}_{\tilde{\nabla}} = \{1\}$ が成り立つことである．

ここで，主束 P に対して，次の仮定をおく．

仮定．P 上の接続 $\tilde{\nabla}_0$ で，ホロノミー関数 $Q_{\tilde{\nabla}_0} : \Gamma \to U(1)$ が定数関数 ($\equiv 1$ または $\equiv -1$) となるものが存在する．

この仮定より，各直線束 $E^{\otimes m}$ 上の自己共役楕円型 1 次擬微分作用素 $P_0^{(m)}$ で次を満たすものが存在する：

(i) $P_0^{(m)}$ の主シンボルは，$\sqrt{H}$ である．

(ii) $P_0^{(m)}$ のスペクトルが，有限個の固有値を除いて，$\{\mu_k;\ k \geq k_0\}$ である．

このような $P_0^{(m)}$ によって，

$$\sqrt{\hat{H}_m} = P_0^{(m)} + Q^{(m)} \quad (Q^{(m)} : \text{有界作用素})$$

と表される．

さて，$\sqrt{\hat{H}_m}$ の固有値 $\nu_j^{(m)}$ に対して，

$$\hat{\nu}_j^{(m)} := \exp\left\{ -2\pi i \left(\frac{T}{2\pi}\nu_j^{(m)} - \frac{\beta}{4} \right) \right\}$$

と変換すると，$\hat{\nu}_j^{(m)}$ は複素平面の単位円 $U(1)$ 上の点である．また，区間 $I_k := [\mu_k, \mu_{k+1})$ はこの変換で $U(1)$ に移る．I_k 上の固有値 $\{\nu_j^{(m)}\}$ の $k \to \infty$ における漸近分布について，次が成り立つ．(証明のアイデアと計算の本質的部分は Hörmander [10] に依っている．)

定理 2.6 ([14]) S^1 上の連続関数 ρ に対して，

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1}{N_k} \sum_{\nu_j^{(m)} \in I_k} \rho(\hat{\nu}_j^{(m)}) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(U^*M)} \int_{U^*M} \rho(Q^{(m)}_{\tilde{\nabla}}(\gamma(x,\xi)))dm(x,\xi)$$

が成り立つ．ここで，N_k は I_k に含まれる固有値 $\{\nu_j^{(m)}\}$ の個数，U^*M は単位余接束，dm は T^*M の *Liouville* 測度から定まる U^*M 上の測度である．

次に，接続の 1 −パラメータ族 $\tilde{\nabla}_t := \tilde{\nabla}_0 + t(\tilde{\nabla} - \tilde{\nabla}_0)$ を考えると，対応する固有値 $\nu_j^{(m)}(t)$ は t について解析的に変化する．このことと $Q^{(m)}$ が有界作用素であることから次が得られる．

定理 2.7 (Band theorem) 任意の $b \in (0, T/\pi)$ および任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して，P 上の接続 $\tilde{\nabla}$ で次を満たすものが存在する：
(i) ホロノミー関数 $Q_{\tilde{\nabla}}$ は定数関数でない．
(ii) $|m| \leq N$ を満たす任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して，$\sqrt{\hat{H}_m}$ のスペクトルが，有限個の固有値を除いて，

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\mu_k - b, \mu_k + b] \quad \text{または} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\mu_k + \frac{T}{\pi} - b, \mu_k + \frac{T}{\pi} + b\right]$$

に含まれる．

この定理から，$\Sigma^{(m)}$ $(m \neq 0)$ は $\Sigma^{(0)}$ と異なる構造を持ち得ることが分かる．すなわち，

系 2.8 P_T-多様体上の直線束 $E^{\otimes m}$ 上の接続で，

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2\pi(n-\alpha)/T, 2\pi(n+\alpha)/T] \subset \Sigma^{(m)} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2\pi(n-\beta)/T, 2\pi(n+\beta)/T]$$

$(0 < \alpha \leq \beta < 1/2)$ を満たすものが存在する．

註．定理 2.7, 2.8, 系 2.9 の証明のために，上の仮定は必要であったが，本質的かどうかは分からない．P_T-多様体の典型的な例であるランク 1 のコンパクト対称空間 G/K 上の任意の直線束上には調和 2 次形式 $(\in H^2_D(G/K, \boldsymbol{Z}))$ から定まる接続 $\tilde{\nabla}_0$ がとれる．このとき，$Q_{\tilde{\nabla}_0}$ は定数関数であることが分かり（$\tilde{\nabla}$ の G 不変性），仮定は満たされている．

3 漸近分布 (II) — 半古典論的考察 —

3.1 量子化条件

完全積分可能な力学系において，Bohr-Sommerfeld の量子化条件は半古典論で重要な意味を持っている．磁場における力学系 $\mathcal{H}_{\mathrm{mag}}$ に対する量子化条件を定式化し，対応する“量子エネルギー分布”$\{\lambda_j^{(m)}\}$ または $\{\nu_j^{(m)}\}$ との関係を考える（[15], [16] 参照）．

磁場における力学系の量子化条件．Λ を (T^*M, Ω) の Lagrange 部分多様体とする．図 2 における記号を使って，

$$\Lambda_P := (\Psi_1 \circ \pi_1)^{-1}(\Lambda) \subset J^{-1}(1) \subset T^*P$$

とおくと，Λ_P は (T^*P, Ω_P) の Lagrange 部分多様体である．

T^*P の標準的シンプレクティック形式 Ω_P は T^*P 上の正準 1 次形式 ω_P によって，$\Omega_P = d\omega_P$ とかける．また，Lagrange 部分多様体 Λ_P に対して，Maslov class と呼ばれる $m_{\Lambda_P} \in H^1(\Lambda_P, \boldsymbol{Z})$ が定義される．さて，Lagarange 部分多様体 $\Lambda \subset (T^*M, \Omega)$ について，次の条件を考える：

(Q) $\qquad \Lambda_P$上の任意の閉曲線 c に対して，$\displaystyle \frac{1}{2\pi}\int_c \omega_P - \frac{1}{4} m_{\Lambda_P}(c) \in \boldsymbol{Z}.$

これを**磁場における Maslov 量子化条件**と呼ぶことにする ([24]).

註. 磁場 Θ が完全形式 $\Theta = d\theta$ であるとき，T^*M 上の 1 次微分形式 $\omega := \omega_M + \pi_M^*\theta$ によって，$\Omega = d\omega$ と表せる．このとき，Λ に対する量子化条件 (Q) は次と同値である：

$$(\mathrm{Q}_M)\qquad \Lambda\text{上の任意の閉曲線}\, c\,\text{に対して，}\ \frac{1}{2\pi}\int_c \omega - \frac{1}{4}m_\Lambda(c) \in \boldsymbol{Z}.$$

以上の定式化の下で次の結果が得られる．これは Weinstein [23] ([21, Ch.XII, §4] も参照せよ）の磁場版である．

定理 3.1 ([15]) Λ を (T^*M, Ω) のコンパクト *Lagrange* 部分多様体とし，以下が満たされるとする：
(i) Λ 上で，$H_0 \equiv E$.
(ii) T^*M 上の *magnetic flow* ϕ_t が Λ を不変にし，かつ $\phi_t|_\Lambda$ で不変な Λ 上の零にならない半密度が存在する．
(iii) Λ は *Maslov* 量子化条件 (Q) を満たす．
このとき，$L_{dk+1}(k = 0, 1, 2, \dots)$ の固有値の列 $\{\lambda_{j_k}^{(dk+1)}\}_{k=0}^\infty$ が存在して次を満たす：

$$(3.1)\quad |\lambda_{j_k}^{(dk+1)} - (dk+1)^2 E| < \mathrm{Const.},\quad \text{i.e.}\quad |\nu_{j_k}^{(dk+1)} - (dk+1)\sqrt{E}| < \mathrm{Const.}/(dk+1).$$

ここで，d は 1,2,4 のうち，任意の閉曲線 c に対して $dm_{\Lambda_P}(c) \equiv 0\,(mod 4)$ を満たす最小値である．

(0.3) 式で与えられる Schrödinger 作用素 $\hat{H}_m$ に対して，

$$D := -\sum_{j,k} g^{jk}\Big(\frac{1}{m}\nabla_j - iA_j\Big)\Big(\frac{1}{m}\nabla_k - iA_k\Big)$$

を考え，$1/m$ を Planck 定数と思うと，D は古典系 (T^*M, Ω, H_0) に対する（Planck 定数付）Schrödinger 作用素と考えられる．そして，$m \to \infty$ が $\hbar \to 0$ を意味し，この状況の議論が**半古典論的考察**に当たる，と考えることができる．

固有値問題：$D\psi = E\psi$ は，$\hat{H}_m\psi = Em^2\psi$ に対応することに注意する．そこで，$m_k = dk + 1 = 1/\hbar$ とおくと，$\lambda(\hbar) := \lambda_{j_k}^{(m_k)}/m_k^2$ は D の固有値と考えられ，(3.1) 式は

$$|\lambda(\hbar) - E| < Rm_k^{-2} = R\hbar^2 \quad (R:\ \text{定数})$$

を意味する．従って，定理の意味は，拡大解釈すれば，次のようなことになる：『E が半古典エネルギー（すなわち，量子化条件を満たす Lagrange 部分多様体があって，その上で $H_0 \equiv E$ となる）であれば，E は対応する量子力学エネルギーの（$\hbar^2$ のオーダーの）近似値を与える.』

註. $\mathcal{H}_{\mathrm{mag}} = (T^*M, \Omega, H_0)$ が完全積分可能とすると，このとき，独立で可換な n 個の第一積分 $f_1 = H_0, f_2, \dots, f_n$ に対して，

$$\Lambda_C := \{p \in T^*M; f_i(p) = C_i\ (0 \le i \le n)\}$$

は Lagrange 部分多様体で，定理の条件 (i),(ii) は自動的に満たされる．

例 (２次元平坦トーラス上の一様磁場)．先に述べたように，これは完全積分可能系である．量子化条件を満たす Lagrange 部分多様体のエネルギー準位として

$$E_n = 2\pi(2n+1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

がとれる．また，各 Lagrange 部分多様体について，$d = 2$ である．そして，スペクトルと E_n について

$$\lambda_{j_k}^{(2k+1)} = (2k+1)^2 E_n \quad (j_k = (2n+1)k + n)$$

が成り立っている．

3.2 古典周期軌道とスペクトル

$\{\tilde{\nu}_j^{(m)} := (\lambda_j^{(m)} + |m|^2/c^2)^{1/2};\ m \in \boldsymbol{Z}, j \in \boldsymbol{N}\}$ は $\sqrt{\Delta_P}$ のスペクトルである．ただし，c は P のファイバー方向の計量，$c = |\partial/\partial\theta|$ であった．V. Guillemin と A.Uribe は [6], [7] で，$\boldsymbol{R}$ 上の周期 2π の周期超関数

$$\Upsilon_c(s) := \sum_{m\in\boldsymbol{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(\tilde{\nu}_j^{(m)} - m\widetilde{E}) e^{ims} \tag{3.2}$$

の特異性 (singularity) を考察した．ただし，φ は $\boldsymbol{R}$ 上の急減少関数である．ここで，スペクトル $\{\tilde{\nu}_j^{(m)}\}$ と (T^*M, Ω, H_0) の周期軌道の情報がどの様に結びつくか，彼らの理論に従って考察してみる．

$T^*P\backslash 0$ 上の関数 $\tilde{h} := \sqrt{\widetilde{H}}$ ($\sqrt{\Delta_P}$ の主シンボル) から定まる Hamilton 流の軌道は，パラメータの違いを除いて，方程式 (1.1) の解で与えられる．この流れを部分多様体 W : $\tilde{h} \equiv \widetilde{E}$, $\tau \equiv 1$ に制限したものを $\tilde{\phi}_t$ とすると，$\tilde{\phi}_t$ は $U(1)$ 作用と可換であり，$B(\widetilde{E}) := W/U(1)$ 上の流れ $\phi_t := \tilde{\phi}_t/U(1)$ が定まり，磁場 Θ の下での magnetic flow の系 (T^*M, Ω, H_0) の軌道で，$H_0 \equiv E := \widetilde{E}^2 - 1/c^2$ を満たすものに（パラメータの違いを除いて）等しい．$\sqrt{\Delta_P}$ と可換な P 上の作用素 $-i\partial/\partial\theta$ の主シンボルから定まる Hamilton 流で W 上の軌道を $\tilde{\psi}_t(\bar{x}_0, \bar{\eta}_0) = (x_0, \theta_0 e^{it}, \eta_0, 1)$ とする．このとき，

定理 3.2 $\Upsilon_c(s)$ の特異台 *(singular support)* は集合

$$\mathcal{T} := \{t_1\widetilde{E} + t_2;\ \exists(\bar{x}, \bar{\eta}) \in W \ \ s.t.\ \ \tilde{\psi}_{t_2} \circ \tilde{\phi}_{t_1}(\bar{x}, \bar{\eta}) = (\bar{x}, \bar{\eta})\} \tag{3.3}$$

に含まれる．

(3.3) における t_1 は流れ ϕ_t の周期軌道 $\tilde{\gamma}$ の周期である．すなわち，$\phi_{t_1}(x, \eta) = (x, \eta) \in B(\widetilde{E}) \cong X_E$ が成り立ち，更に，$\tilde{\phi}_{t_1}(\bar{x}, \bar{\eta}) = (\bar{x}, \bar{\eta}) \cdot e^{it_2}$ の関係がある．$\tilde{\gamma}$ に対応する magnetic flow の M 上の周期軌道 γ の周期を T_γ とすると，関係：$t_1 = 2\widetilde{E}T_\gamma$, $e^{it_2} = Q_{\widetilde{\nabla}}(\gamma) e^{-2iT_\gamma/c^2}$ ($Q_{\widetilde{\nabla}}(\gamma)$ は γ に沿うホロノミー) が成り立つ（方程式 (1.1) に注目）．以上の関係式より，magnetic flow $\mathcal{H}_{\mathrm{mag}} = (T^*M, \Omega, H_0)$ の X_E 上の周期軌道の全体を Γ_E とすると，次が得ら

系 3.3 $\{e^{is};\ s \in \mathrm{sing\,supp}\Upsilon_c(s)\} \subset \{Q_{\tilde{\nabla}}(\gamma)e^{2iET_\gamma};\ \gamma \in \Gamma_E\}$.

註. 系 3.3 は Laplace-Betrami 作用素に対する Chazarain [2] や Colin de Verdierè [3] の理論（それらは Poisson の和公式の拡張）の磁場版と見なせる．系 3.3 における右辺の集合は，c に依らないことを注意しておく．

おわりに － Questions －

本稿の話題に関して，思いつく問題を挙げておく．

1．磁場 Θ に対応する Schrödinger 作用素 $\hat{H}_m$ のスペクトルが Θ のみによって決まるのはどのような場合か？

－ もちろん $H^1(M,\mathbb{R}) = \{0\}$ のときは，Θ を曲率とする接続は一意的であるから $\hat{H}_m$ のスペクトルも一意的に決まる．しかし，$H^1(M,g) \neq \{0\}$ のときでも，古典系（Θ のみで決まる）がなんらかの性質を持つ場合には，スペクトルが Θ のみで決まる場合があるのではないか．

2．磁場の力学系 $\mathcal{H}_{\mathrm{mag}}$ において，エネルギー曲面 $H_0 \equiv E$ 上の軌道が全て周期的であるとき，スペクトル $\{\lambda_j^{(m)}\}$ はどのような特徴を持つか？

－ Helton の定理の本来の意味での磁場版．これについての一つの試みと部分的な結果が楯辰哉氏 [19], [20] によってなされている．

参考文献

[1] A. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer, Berlin, 1978.

[2] J. Chazarain, Formule de Poisson pour les riemanniennes, Invent. Math. **24**(1974), 65-82.

[3] Y. Colin de Verdierè, Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I II, Compositio Math. **27**(1973), 83-106, 159-184.

[4] J.J. Duistermaat and V.W. Guillemin, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics, Invent. Math. **29**(1975), 39-79.

[5] V. Guillemin, Lectures on spectral theory of elliptic operators, Duke Math. J., **44**(1977), 485-517.

[6] V. Guillemin and A. Uribe, Circular symmetry and the trace formula, Invent. Math., **96**(1989), 385-423.

[7] V. Guillemin and A. Uribe, Reduction and the trace formula, J. Diff. Geom., **32**(1991), 315-347.

[8] C. Gordon and E. Wilson, The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds, MIchigan Math. J., **33**(1986), 253-271.

[9] W. Helton, An operator algebra approach to partial differential equations; Propagation of singularities and spectral theory, Indiana Univ. Math. J., **26**(1977), 997-1018.

[10] L. Hörmander, The spectral function of an elliptic operator, Acta Math. **121**(1968), 193-218.

[11] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV*, Springer-Verlag, 1985.

[12] 小林昭七，接続の微分幾何とゲージ理論，裳華房, 1989.

[13] R. Kuwabara, Spectrum of the Schrödinger operator on a line bundle over complex projective spaces, Tôhoku Math. J., **40**(1988), 199-211.

[14] R. Kuwabara, Spectrum of the Laplacian on vector bundles over $C_{2\pi}$-manifolds, J. Diff. Geometry, **27**(1988), 241-258.

[15] R. Kuwabara, On Maslov's quantization condition for mechanics in a magnetic field, J. Math. Tokushima Univ., **33**(1999), 33-54.

[16] 桑原類史, 力学系の古典軌道と量子エネルギー分布, 数理解析研究所講究録 **1119**(1999), 26-34.

[17] R. Kuwabara, Difference spectrum of the Schrödinger operator in a magnetic field, Math. Z., **233**(2000), 579-599.

[18] 桑原類史, 磁場における Schrödinger 作用素のスペクトル幾何学 ー多様体上の幾何学的構造および力学的構造の視点からー, 数学, **54**(2002), 37-57.

[19] T. Tate, Asymptotic behavior of eigenfunctions and eigenvalues for ergodic and periodic systems, Thesis, Tohoku Math. Pub. No.12(1999)

[20] 楯辰哉, Helton の定理の半古典的類似, 数理解析研究所講究録 **1070**(1998), 106-122.

[21] F. Treves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Vol.2, Plenum Press, New York,1980.

[22] A.W. Wadsley, Geodesic foliations by circles, J. Differential Geom., **10**(1975), 541-549.

[23] A. Weinstein, On Maslov's quantization condition, *Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations*, Springer Lect. Notes in Math. **459**(1974), 341-372.

[24] A. Yoshioka, The quasi-classical calculation of eigenvalues for the Bochner-Laplacian on a line bundle, in "*Geomery of Manifolds*"(1989), 39-56.