数理解析研究所講究録 1255 巻 2002 年 98-102

Inverse scattering problem for the nonlinear Schrödinger equations with cubic convolution nonlinearity

都立大 D3 渡辺 道之 (Michiyuki Watanabe)
Tokyo Metropolitan Univ.

1 Introduction.

ここでは $(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$、$n\geq 3$ において次の非線型 Schrödinger 方程式に対する散乱の逆問題を考える。

$$i\frac{\partial u}{\partial t}=-\Delta u+V_0(x)u+F(u) \tag{1}$$

$$F(u)=V_1(x)(|x|^{-\sigma}*|u|^2)u \tag{2}$$

ここで、$u=u(t,x)$ は複素数値関数、Δ は $\mathbf{R}^n$ の Laplacian、$*$ は convolution である。以下 $H_0=-\Delta$、$H=H_0+V_0$ と書くことにする。非線型 Schrödinger 方程式に対する散乱の逆問題については'74 に Strauss [2] が(1) で $V_0\equiv 0$、power type nonlinearity $F(u)=V_1(x)|u|^{p-1}u$ の場合で、散乱作用素から $V_1(x)$ が一意に定まることを示している。その後'97 以降 Weder [4] によってポテンシャル $V_0(x)$ のはいった power type nonlinearity に対して散乱作用素から $V_0(x)$、$V_1(x)$ がそれぞれ求まることを示した。これらの結果では、p が適当な条件のもとで与えられているということを注意しておく。ここでの最初の目標は非線型項が(2) の場合で Weder が得た結果と同様の結果、つまり散乱作用素から $V_0(x)$、$V_1(x)$ を求めることである。

逆問題を考える前に、まず順問題、すなわち(1)、(2) に対する散乱作用素を構成することを示す。以下、$V_0(x)$、$V_1(x)$、σ は次の条件を満たすとする。$n_*=(n-1)/(n-2)$ $(n\geq 3)$、$\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{1/2}$ とおく。

1. $V_0(x)$ は $\mathbf{R}^n, n \geq 3$ の実数値関数。$|\alpha| \leq 1$ を満たす $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ と $\rho > 2/n_*$ に対し $\mathfrak{F}(\langle x \rangle^\rho D^\alpha V) \in L^{n_*}(\mathbf{R}^n)$ とし、$\|\mathfrak{F}(\langle x \rangle^\rho V)\|_{L^{n_*}}$ は十分小さいとする。ここで、 $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ $(D_j = -i\partial/\partial x_j)$。

2. $V_1(x)$ は有界連続関数。

3. σ は $2 \leq \sigma \leq 4$ かつ $\sigma < n$ を満たす。

これらの条件のもとで散乱作用素は次のように構成される。$\phi_- \in H^1$ でそのノルムが十分小さいものに対し、$t \to -\infty$ で

$$\|u(t) - e^{-itH_0}\phi_-\|_{H^1} \longrightarrow 0$$

を満たす(1)、(2) の解 $u \in L^\infty(\mathbf{R} : H^1) \cap L^3(\mathbf{R} : H^{1,q})$、$1/q = 1/2 - 2/3n$ が唯一つ存在する。線型 Schrödinger 方程式に対する波動作用素 $W_\pm$ と散乱作用素 S_{V_0} を

$$W_\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0},$$
$$S_{V_0} = W_+^* W_-$$

で定義する。また、

$$S := W_+^* S_F W_-$$

$$(S_F \phi)(x) := \phi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{itH} F(u(t))\, dt$$

と定義し $\phi_+(x) = (S\phi_-)(x)$ とおくと $t \to \infty$ としたとき

$$\|u(t) - e^{-itH_0}\phi_+\|_{H^1} \longrightarrow 0$$

となる。S が(1)、(2) に対する散乱作用素である。

注意１： (2) の非線型項に対する散乱問題は(1) において $V_0(x) \equiv 0$ の場合に Mochizuki [1] が条件３のもとでいわゆる $L^p - L^q$ 法で示している。また、線型 Schrödinger 方程式に対する波動作用素の L^p 有界性及びその解に対する $L^p - L^q$ 評価は Yajima [5] によって示されている。これらの結果を用いることによって(1)、(2) に対する散乱問題を解くことができる。

まず次の問題について考える。

$\boxed{\text{問題：散乱作用素 } S \text{ から } V_0(x)\text{、}V_1(x) \text{ を求めよ。}}$

2 Results.

最初に S から V_0 を求めよう。

定理 1. 任意の $\phi \in H^1$ に対し次が成り立つ。

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} S(\varepsilon\phi) = S_{V_0}\phi \qquad in \quad H^1。$$

S_{V_0} から V_0 が一意に定まることはよく知られている。従って定理1は S から V_0 が一意に定まることを示している。

$V_1(x)$ について： この場合 σ は与えられているとする。

定理 2. $\lambda \in \mathbf{R}$、x、$x_0 \in \mathbf{R}^n$ とし $\phi_\lambda(x) = \phi(\lambda(x - x_0))$、

$$T[\phi] := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^3}(\,(S_F - I)(\varepsilon\phi), \phi)$$

とおく。任意の $\phi \in H^1$ に対し次が成り立つ。

$$V_1(x_0) = \frac{\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{2n+2-\sigma} T[\phi_\lambda]}{\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^n} (|x|^{-\sigma} * |e^{-itH_0}\phi|^2)|e^{-itH_0}\phi|^2 \, dx \, dt}。$$

定理2を見てわかるように、V_1 を決めるには σ は既知でなければならない。このことは power type nonlinearity の場合の結果 (Strauss、Weder) でも同様で、p が既知であれば S から V_1 を求めることができる。すると σ 又は p を散乱作用素から求められないだろうかという問題が生じる。この問題に関してはこれまで何の結果もなかったと思われる。そこでまずは(1)、(2) において $V_0 \equiv 0$、$V_1(x) \equiv 1$ の場合

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = H_0 u + (|x|^{-\sigma} * |u|^2)u$$

で考えた。この場合の散乱作用素を S_σ と書くことにする。

$$(S_\sigma\phi)(x) = \phi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{itH_0}(|x|^{-\sigma} * |u|^2)u(t,x)\, dt。$$

問題は

$$\boxed{\text{問題: } S_\sigma \text{ から } \sigma \text{ を求めよ}}$$

である。[3] において一意性 : $S_{\sigma_1} = S_{\sigma_2} \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ が示された。今回、S_σ から σ を求める方法を見つけた。結果は以下のとおり。

定理 3. $\phi_e(x) = \phi(ex)$、

$$\tilde{T}[\phi] := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^3}(\,(S_\sigma - I)(\varepsilon\phi), \phi)$$

とおく。任意の $\phi \in H^1$ に対して次が成り立つ。

$$\sigma = 2n + 2 + \log \frac{\tilde{T}[\phi_e]}{\tilde{T}[\phi]}。$$

3 Proof.

定理 3 の証明を紹介する。次の等式は Strauss [2] によって示されている。

補題 1. 任意の $\phi \in H^{1,2}$ に対して

$$\tilde{T}[\phi] = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}^n} (|x|^{-\sigma} * |e^{-itH_0}\phi|^2)|e^{-itH_0}\phi(x)|^2\, dx\, dt$$

が成り立つ。

簡単な計算により

$$(e^{-itH_0}\phi_e)(x) = (e^{-ie^2tH_0}\phi)(ex)、$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} (|x|^{-\sigma} * f_e) f_e(x)\, dx = e^{\sigma - 2n} \int_{\mathbf{R}^n} (|x|^{-\sigma} * f) f(x)\, dx$$

が得られる。補題 1 の式とこれらの式より

$$\tilde{T}[\phi_e] = e^{\sigma-2n-2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^n} (|x|^{-\sigma} * |e^{-itH_0}\phi|^2)|e^{-itH_0}\phi(x)|^2\, dx\, dt.$$

が得られる。左辺の式は補題 1 の式から $\tilde{T}[\phi]$ に等しい。従って

$$\tilde{T}[\phi_e] = e^{\sigma-2n-2}\tilde{T}[\phi]$$

を得る。 □

参考文献

[1] Mochizuki, K., On small data scattering with cubic convolution nonlinearity, *J. Math. Soc. Japan.* **41** (1989), 143–160.

[2] Strauss, W. A., Non linear scattering theory, in "Scattering Theory in Mathematical Physics", pp. 53–78. J. A. Lavita and J.-P. Marchand, editors, D. Reidel, Dordrecht-Holland / Boston, 1974

[3] Watanabe, M., Uniqueness in the inverse scattering problem for Hartree type equation, *Proc. Japan Acad. Ser. A.* **77** (2001), 143–146.

[4] Weder, R., Inverse Scattering for the Nonlinear Schrödinger Equation. Reconstruction of the Potential and the Nonlinearity. *Math. Methods. Appl. Sci.* **24** (2001), 245–254.

[5] Yajima, K., The $W^{k,p}$–continuous of wave operator for Schrödinger operators. *J. Math. Soc. Japan.* **47** (1995), 551–581.