数理解析研究所講究録 1256 巻 2002 年 89-96

Hecke eigenvalues for principal split primes and the L-values associated with class characters

岡田 薫 (Kaoru Okada)

立命館大学理工学研究科
(Grad. School of Sci. & Eng., Ritsumeikan Univ.)

Introduction

私の専門は保型形式であり, 現在の研究対象は Hilbert cusp forms の空間に作用する Hecke 作用素の固有値である. そして研究の手法として, 具体的な計算を通して新しい発見の糸口を探る, ということを試みている.

保型形式というのは, 保型性と呼ばれるある種の群の作用で不変な性質をもつ関数のことで, それは整数論と深く結びついている. 保型形式は elliptic modular form と呼ばれる $SL_2(\mathbf{Q})$ の部分群 $SL_2(\mathbf{Z})$ (及びその指数有限な部分群) に関して保型性を持つ複素上半平面上の関数から研究が始まった. そしてその後, 定義体が有理数体から一般の総実代数体に拡張された, Hilbert modular form と呼ばれる $SL_2(F)$ もしくは $GL_2(F)$ の部分群に関して保型性を持つ関数が定義された. 一方それとは別に, 定義体は有理数体のままで群の方がより一般の代数群に拡張された関数も定義されている. 例えば群が symplectic 群 $Sp_n(\mathbf{Q})$ であるものは Siegel modular form と呼ばれている. さらに近年, 体も群も一般化された関数も志村五郎先生により作られている.

これらの保型形式のなす空間に対して, Hecke 作用素と呼ばれる自己準同型写像が基礎体の各整 ideal ごとに定義されており, その固有値は保型形式論において極めて重要な研究対象のひとつである. というのは, 例えば elliptic modular form や Hilbert modular form においては, Hecke 作用素の固有値はそれの作用する空間の固有関数となる modular form の Fourier 係数と本質的に一致するからである. また保型形式に付随する zeta 関数や L-関数もこの固有値から作られる.

保型形式の空間は cusp forms の空間と Eisenstein series の空間の直和に分解される. Eisenstein series の方は cusp form に比べると比較的扱いやすく研究も進んでいる. この Eisenstein series については Fourier 係数が explicit に決まるものと思われている. 実際 elliptic modular form や Hilbert modular form の場合には Eisenstein series の Fourier 係数の形はすでによく知られている.

そして Siegel modular form についても, 数年前に桂田英典氏により決定されている. しかし一方 cusp form については, たとえ elliptic cusp form についてでさえも, Fourier 係数の形が具体的に書き表せるような種類のものであるとは (現時点では) 到底思えない. ただ現在, elliptic cusp form 及び Hilbert cusp form については, ひとつひとつの form が与えられた場合に, その Fourier 係数, すなわち Hecke 作用素の固有値を具体的に計算する方法は存在する. それが trace formula である.

ここで今回の研究の動機について述べておく. Hilbert cusp form が elliptic cusp form と大きく異なるところは, 基礎体の整数環が単項 ideal 整域とは限らない, というところである. そこで特に, 考える総実代数体 F の類数が 1 より大きいと仮定する. このとき F は単項 ideal 整域ではないため, F には複数個の ideal 類が存在する. さて Hecke 作用素は F の各整 ideal に対して定義されている. **では各 ideal 類ごとに, その類の元に対応する Hecke 作用素の固有値達はその類特有の何らかの共通する性質を持つのではないか?** この疑問が今回の研究の発端である. ideal 類群や類数は代数体において極めて重要かつ本質的なものであるため, それが Hecke 作用素の固有値に何らかの影響を及ぼしている可能性は十分考えられる. そしてこの種の疑問について調べる方法は, 実際に固有値を計算してみる以外ないと思われる.

そこで trace formula を用いて計算を試みるのであるが, これまで類数が 1 より大きい場合に Hecke 作用素の固有値が具体的に計算された例は存在しない. 類数が 1 より大きい場合には整数環が単項 ideal 整域ではなくなるため, 計算を F の元で済ませることができず, 具体的な計算を adele で行わければならない. そのため複雑な考察を要することが, その理由のひとつにあるのかもしれない.

そして今回その計算を実際に行って, 固有値を具体的に求めてみた. そしてそのデータを調べたところ, 特に "単項類" については, 類の元に対応する Hecke 作用素の固有値に共通する性質が見られた. そのことについてお話しする.

1 Definitions

まず研究の対象である Hilbert cusp forms の空間及びその空間に作用する Hecke 作用素について明確にしておくために, その定義について述べておく. この空間の formulation は [Shimura] によって与えられた. ここでは特に level が F の整数環 $\mathfrak{o}_F$ の場合に制限して述べることにする.

F を総実代数体とし, その次数を g とする. $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$ をそれぞれ F の archimedean primes, nonarchimedean primes 全体の集合とする. $F_{\mathbf{A}}$ を F

の adele 環, $F_{\mathbf{A}}^{\times}$ を idele 群とする. $F_{\mathbf{a}}$, $F_{\mathbf{h}}$, F_v 等で $F_{\mathbf{A}}$ の $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$, v-part 等を表すものとする. $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}$ をそれぞれ $\mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{d}_F$ の $F_{\mathfrak{p}}$ における topological closure とする (ここで $\mathfrak{d}_F$ は F の相対判別式). $\mathfrak{o}_{\mathbf{h}} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ とおく.

$G = GL_2(F)$ とおき, G の adelization を $G_{\mathbf{A}}$ と表す. G についても $G_{\mathbf{a}}$, $G_{\mathbf{h}}$, G_v 等で $G_{\mathbf{A}}$ の $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$, v-part 等を表すものとする. $G_{\mathbf{a}+} = \{x \in G_{\mathbf{a}} \mid \det(x_v) > 0 \text{ for all } v \in \mathbf{a}\}$ とおく. $\delta \in F_{\mathbf{h}}$ をすべての $\mathfrak{p} \in \mathbf{h}$ に対して $\delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}$ をみたすものとし,

$$Y_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} M_2(\mathfrak{o}_{\mathbf{h}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1} \cap G_{\mathbf{h}},$$

$$W_{\mathbf{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} GL_2(\mathfrak{o}_{\mathbf{h}}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}^{-1},$$

$$Y = G_{\mathbf{a}+} Y_{\mathbf{h}}, \qquad W = G_{\mathbf{a}+} W_{\mathbf{h}}$$

とおく.

ψ を F の 位数有限な Hecke character で $\psi(\mathfrak{o}_{\mathbf{h}}^{\times}) = 1$ を満たすもの, k を $\mathbf{Z}^g$ の元とし, $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ を (群 $GL(2)$ に関する) weight k, level $\mathfrak{o}_F$, character ψ の adelic な Hilbert cusp forms の空間, すなわち次の (i), (ii), (iii) をみたす $G_{\mathbf{A}}$ 上の複素数値関数 $\mathbf{f}$ 全体とする:

(i) $s \in F_{\mathbf{A}}^{\times}$, $a \in G$, $w \in W_{\mathbf{h}}$, $u \in SO_2(F_{\mathbf{a}})$ に対して, $\mathbf{f}(saxwu) = \psi(s)\mathbf{f}(x)J_k(u, \mathbf{i})^{-1}$ が成り立つ ($x \in G_{\mathbf{A}}$),

(ii) 任意の $a \in G_{\mathbf{h}}$ に対して $f_a(x + \mathbf{i}y) = \mathbf{f}\left(a\left(\begin{smallmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) J_k\left(\left(\begin{smallmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \mathbf{i}\right)$ は H^g 上の正則関数,

(iii) すべての $x \in G_{\mathbf{A}}$ について

$$\int_{F_{\mathbf{A}}/F} \mathbf{f}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)x\right) d\mu(u) = 0,$$

ここで $J_k(u, z) = \prod_{v\in\mathbf{a}} \left(\det(u_v)^{-k_v/2}(c_v z_v + d_v)^{k_v}\right)$ $\left(u = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G_{\mathbf{a}+}\right)$, H は複素上半平面, $\mathbf{i} = (i, \ldots, i) \in H^g$, $d\mu$ は $F_{\mathbf{A}}/F$ の Haar measure である.

(i) が保型性条件, (ii) が正則性条件, (iii) が cuspidal 条件と呼ばれるものである. ここで, $F \neq \mathbf{Q}$ のとき, (i), (ii) のみ満たすものを adelic な Hilbert modular form と呼ぶ, ということを一言付け加えておく. ($F = \mathbf{Q}$ のときには, さらに cusp での正則条件が必要である.)

$\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F, \psi)$ は $\mathbf{C}$ 上の有限次元 vector 空間をなす. またこの空間には Petersson 内積と呼ばれる standard な内積が定義される.

F の整 ideal $\mathfrak{a}$ に対して, $T(\mathfrak{a})$ を

$$\mathbf{f}|T(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{WyW\in W\backslash Y/W \\ \det(y)\mathfrak{o}_F=\mathfrak{a}}} \mathbf{f}|WyW,$$

$$(\mathbf{f}|WyW)(x) = \sum_{j=1}^{m_y} \mathbf{f}(x\det(y_j)y_j^{-1}) \quad (x\in G_{\mathbf{A}})$$

$$\left(\text{ここで } WyW = \bigsqcup_{j=1}^{m_y} Wy_j,\ (y_j)_{\mathfrak{a}} = 1 \text{ とする}\right)$$

であたえられる $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}\big(\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F,\psi)\big)$ の元とする. これを Hecke 作用素と呼ぶ.

$\mathbf{f} \in \mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F,\psi)$ がすべての $T(\mathfrak{a})$ の同時固有関数で, さらに $f_{1_2}(z) = \sum_\xi c(\xi)e_F(\xi z)$ (ここで $1_2 \in G_{\mathbf{h}}$ は単位行列, f_{1_2} は (ii) で与えられるもの) の $\xi = 1$ に対応する Fourier 係数 $c(1)$ が 1 であるとき, $\mathbf{f}$ を primitive form と呼ぶ. (同時固有関数は scalar 倍の自由度があるので, 後半の条件でその中のひとつを決めている.) $\mathcal{S}_k(\mathfrak{o}_F,\psi)$ は primitive forms からなる基底をもつ.

2 Trace Formula

ここで Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ の trace を求める方法である trace formula について触れておく.

trace formula は 1950 年代後半に Eichler と Selberg によって独立に与えられた. そしてそれはまず elliptic cusp form に対して適用され, その後, 清水英夫氏により Hilbert cusp form の場合に拡張された. そして [Saito] により, 先ほど述べた空間に対する formula が与えられた. (そこでは level は $\mathfrak{o}_F$ のみならず一般で与えられている.) よってこの formula を用いて先ほどの Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ の trace を計算することができる.

具体的にはまず [Saito] の formula を代数体の order の conductor を用いて, より計算に適した形に変形する. すると trace を具体的に計算するためには, F の任意の総虚 2 次拡大体 K に対して,

(i) $D_{K/F} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathbf{h}} D_{\mathfrak{p}}$: 相対判別式,

(ii) $\left(\frac{K}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathfrak{p} \text{ splits in } K, \\ -1 & \text{if } \mathfrak{p} \text{ remains prime in } K, \\ 0 & \text{if } \mathfrak{p} \text{ ramifies in } K \end{cases} \quad (\mathfrak{p}\in\mathbf{h}),$

(iii) $L_F(0,\chi_{K/F})$ (ここで $\chi_{K/F}$ は拡大 K/F に対応する character)

の 3 つの factor を求めるアルゴリズムを与えればよいということがわかる.

特に実2次体 F については, (i), (ii) は $K=F(\sqrt{\alpha})$ $(\alpha\in\mathfrak{o}_F)$ と表したときに α の $F_{\mathfrak{p}}$ での様子を詳細に調べることにより決定することができる. また (iii) についても例えば [Shintani] の方法によって計算することができる.

実2次体 $F=\mathbf{Q}(\sqrt{m})$, $m\equiv 1 \pmod 4$ の場合の Hecke 作用素 $T(\mathfrak{a})$ の trace の計算方法については, [Okada] で詳しく述べてあるのでそれを参照されたい.

3 Numerical example

この section では trace formula を用いて計算した Hecke 作用素の固有値のデータを通して見られた新しい現象についてお話する.

$F=\mathbf{Q}(\sqrt{401})$ とする. このとき F の広義類数及び狭義類数はともに 5 である. さらに $k=(2,2)$, $\psi=1$ (すなわち $\psi(F_{\mathbf{A}}^{\times})=\{1\}$) とする. F, k, ψ は最後までこれで固定する.

このとき

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F,1)=\operatorname{tr}T(\mathfrak{o}_F)=24$$

である. いま $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F,1)$ は次のように分解される:

$$\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F,1)=\mathcal{S}_{(2,2)}^{N}(\mathfrak{o}_F,1)\bigoplus\mathcal{S}_{(2,2)}^{0}(\mathfrak{o}_F,1),$$

ここで $\mathcal{S}_{(2,2)}^{N}(\mathfrak{o}_F,1)$ は level 401 の "Neben"-type の elliptic cusp forms の空間 $S_2(\Gamma_0(401),(\frac{401}{}))$ からの Doi-Naganuma の base change lifts のなす部分空間, $\mathcal{S}_{(2,2)}^{0}(\mathfrak{o}_F,1)$ は $\mathcal{S}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F,1)$ の "F-proper" な部分空間, すなわち base change lift でない primitive form で張られる部分空間である. いま elliptic cusp forms の trace formula より $\dim_{\mathbf{C}}S_2(\Gamma_0(401),(\frac{401}{}))=32$ なので,

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{S}_{(2,2)}^{N}(\mathfrak{o}_F,1)=16.$$

よって

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{S}_{(2,2)}^{0}(\mathfrak{o}_F,1)=8.$$

ここで $\mathcal{S}_{(2,2)}^{N}(\mathfrak{o}_F,1)$ 及び $\mathcal{S}_{(2,2)}^{0}(\mathfrak{o}_F,1)$ は $T(\mathfrak{a})$ の作用で閉じている. $\mathcal{S}_{(2,2)}^{N}(\mathfrak{o}_F,1)$ は本質的に "Neben"-type の elliptic cusp forms の空間 $S_2(\Gamma_0(401),(\frac{401}{}))$ なので, Hecke 作用素の固有値はすでに知られている. 一方 $\mathcal{S}_{(2,2)}^{0}(\mathfrak{o}_F,1)$ は体が上がって (つまり F になって) 初めて現れる空間であり, F の性質を含んでいると思われる. そこでこの $\mathcal{S}_{(2,2)}^{0}(\mathfrak{o}_F,1)$ に注目し, この空間に対する Hecke 作用素の固有値を調べることにする.

Hecke 作用素は次のよく知られた性質を持つ:

$$T(\mathfrak{a}\mathfrak{b})=T(\mathfrak{a})T(\mathfrak{b})\quad\text{if } \gcd(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\mathfrak{o}_F, \tag{3.1}$$

$$T(\mathfrak{p})T(\mathfrak{p}^e) = T(\mathfrak{p}^{e+1}) + N(\mathfrak{p})S(\mathfrak{p})T(\mathfrak{p}^{e-1}) \quad (\mathfrak{p} \in \mathbf{h},\ e \geq 1). \tag{3.2}$$

この (3.1), (3.2) より, すべての $T(\mathfrak{a})$ は $\{T(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} : F \text{ の prime}\}$ で生成される. よって $T(\mathfrak{p})$ に対応する固有値のみを調べれば十分である.

ここで trace formula を用いて $T(\mathfrak{p})$ の固有多項式を求める方法について一言述べておくと, まず trace formula によって $\mathrm{tr}\,T(\mathfrak{p}^l)$ $(l = 1, \ldots, 8)$ が求まり, さらに上の (3.2) から $\mathrm{tr}\,(T(\mathfrak{p})^l)$ $(l = 1, \ldots, 8)$ が求まる. よって Newton の公式から $T(\mathfrak{p})$ の固有多項式のすべての係数が求まる. (もう少し計算効率の良い方法も存在する.)

さて, いま調べようとしているのは, 各 ideal 類に対してその類に含まれる元に対応する Hecke 作用素の固有値に共通する性質があるか, ということである. そこで特に F の $F/\mathbf{Q}$ における split prime $\mathfrak{p}$ (i.e. $(p)_F = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$) に注目することにする. というのは, $F/\mathbf{Q}$ で split しない prime はほどんどすべて単項類に含まれているので, 他の類との比較ができないため, 類に共通する性質 (つまりその類にあって他の類にない性質) を調べるのに不適当である.

いま $\mathbf{f}$ を $\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ の primitive form とし, それに対応する $T(\mathfrak{p})$ の固有値を $C_\mathbf{f}(\mathfrak{p})$ と表す. $\mathbf{f}$ の Hecke 体, すなわち $\mathbf{Q}$ 上すべての $C_\mathbf{f}(\mathfrak{p})$ で生成される体を $K_\mathbf{f}$ とし, $\{C_\mathbf{f}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \text{ remains prime in F (i.e. } (p)_F = \mathfrak{p})\}$ で生成される $K_\mathbf{f}$ の部分体を $K_\mathbf{f}^+$ とする. このとき $T\big(2\mathbf{Z} + ((1+\sqrt{401})/2)\mathbf{Z}\big)$ の固有値を計算することにより, $K_\mathbf{f}$ は総実 8 次体

$$\mathbf{Q}\left(\sqrt{4900 - 100\sqrt{5} + (150 - 10\sqrt{5})\sqrt{110 + 10\sqrt{5}}}\right)$$

の共役体であることがわかる. ($\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ の各 primitive form ごとにこれの共役体が対応する.) ここで特に $\mathbf{f}$ として $K_\mathbf{f}$ がこの体自身であるものを選ぶことにする. このとき $K_\mathbf{f}^+$ は 4 次体

$$K_\mathbf{f}^+ = \mathbf{Q}\left(\sqrt{110 + 10\sqrt{5}}\right)$$

となる.

ここで F の $F/\mathbf{Q}$ における split prime $\mathfrak{p}$ に対応する Hecke 作用素の固有値の相対拡大 $K_\mathbf{f}/K_\mathbf{f}^+$ での様子を考察する.

まず初めは相対 trace 及び相対 norm を調べてみたのだが, 類に共通する性質を見つけることは出来なかった. そこで次に相対判別式を調べてみた. すると単項類については共通する性質が見られた. それについてこれから述べる.

F の $F/\mathbf{Q}$ における split prime $\mathfrak{p}$ に対して,

$$D(C_\mathbf{f}(\mathfrak{p})) = \left(D_{K_\mathbf{f}/K_\mathbf{f}^+}(C_\mathbf{f}(\mathfrak{p})) \cdot D_{K_\mathbf{f}/K_\mathbf{f}^+}{}^{-1}\right)^{1/2}$$

とおく. (つまり元の相対判別式は体の相対判別式 $D_{K_{\mathfrak{f}}/K_{\mathfrak{f}}^+}$ で割れているのでそれを除いておく.) このとき $D(C_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{p}))$ は $K_{\mathfrak{f}}^+$ の ideal である. ここで

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{f}} = D\Big(C_{\mathfrak{f}}\Big(83\mathbf{Z} + \big(30 + (1+\sqrt{401})/2\big)\mathbf{Z}\Big)\Big)$$

とおく. (この $83\mathbf{Z} + (30 + (1+\sqrt{401})/2)\mathbf{Z}$ は F の "単項" な sprit prime の中で norm が最も小さいものである.) このとき $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}$ は $N(\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}) = 19$ を満たす $K_{\mathfrak{f}}^+$ の prime ideal である.

このとき計算した範囲において, すべての "単項" な split prime $\mathfrak{p}$ について,

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{f}} \mid D(C_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{p}))$$

となっていた. 一方, 非単項な split prime ideal $\mathfrak{p}$ については, ほとんど $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}} \nmid D(C_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{p}))$ であった. つまり, **単項類に含まれる split prime に対応する Hecke 作用素の固有値の相対判別式は, 類特有の共通因子 $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}$ を持っている**, ということである.

さてここで $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}$ は一体何なのか, という疑問が起こる. これに関して肥田晴三先生より次のような suggestion を頂いた:

> Andrew Wiles による総実代数体上の Iwasawa 予想の証明の key step であった primitive Hilbert cusp form と Eisenstein series との間の congruence primes の研究を踏まえると, この $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}$ の素因子は実は F の non-trivial な ideal class character χ に付随する Hecke の L-関数の値 $L_F(1-k_1,\chi)$ の分子の素因子と一致することが推測される.

そこでそれを確かめるために, この Hecke の L-value $L_F(1-2,\chi)$ を [Siegel] の公式で計算してみたところ,

$$\prod_{\chi:\text{non-trivial}} 2^{-2} L_F(-1,\chi) = \left(\frac{9+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \left(\frac{9-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 19^2$$

であった. 一方, $\mathcal{S}^0_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, \mathit{1})$ のすべての primitive forms $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_8$ に対して, 合成体 $K_{\mathbf{f}_1}^+ \cdots K_{\mathbf{f}_8}^+$ において

$$\mathcal{P}_{\mathbf{f}_1} \cdots \mathcal{P}_{\mathbf{f}_8} = (19^2)_{K_{\mathbf{f}_1}^+ \cdots K_{\mathbf{f}_8}^+}.$$

となっている. よって $\mathcal{P}_{\mathfrak{f}}$ が本質的に Hecke の L-values の分子であることが計算によって確認された. そしてこの現象の証明については, 近いうちに別の機会で述べたいと思う.

ここで一言, 取り除いた体の相対判別式 $D_{K_{\mathfrak{f}}/K_{\mathfrak{f}}^{+}}$ について言及しておくと, これは [Doi, Hida, and Ishii] によって $\mathcal{S}^{N}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, 1)$ と $\mathcal{S}^{0}_{(2,2)}(\mathfrak{o}_F, 1)$ との congruence prime, すなわち twisted adoint L-value の分子であることが知られている.

以上によって, 単項類に関しては当初考えていた疑問に対する肯定的な答えを得られた. そしてここで強調しておくべきことは, この種の現象はやはり計算を通してでないとなかなか気づかないものであるということである. このように計算というものは整数論の研究において極めて有効な手段である.

最後に, 今回扱ったのは Hilbert cusp form であるが, もっと一般の代数群に関する保型形式についても, 定義体の類数が 1 より大きいときには, 単項類に対応する Hecke 作用素の固有値の相対判別式が非自明な共通因子を持ち, それが何らかの L-value と関係している, という可能性をこの例は示唆していると思われる.

参考文献

[Doi, Hida, and Ishii] K. Doi, H. Hida, and H. Ishii, *Discriminant of Hecke fields and twisted adjoint L-values for GL(2)*, Invent. Math. **134** (1998), 547–577.

[Okada] K. Okada, *Hecke eigenvalues for real quadratic fields*, to appear in Exp. Math.

[Saito] H. Saito, *On an operator U_χ acting on the space of Hilbert cusp forms*, J. Math. Kyoto Univ. **24** (1984), 285–303.

[Shimura] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **45** (1978), 637–679.

[Shintani] T. Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 393–417.

[Siegel] C. L. Siegel, *Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. 1969, 87–102.