数理解析研究所講究録 1256 巻 2002 年 161-171

L 関数の値分布とランダム性

京大・数理研　　名越弘文 (Hirofumi Nagoshi)
Research Institute for Mathematical Sciences,
Kyoto Univ.

1. はじめに

本稿では、解析数論における確率的な現象の一端について述べたい。具体的には、特に L 関数の値分布に関することである。最後に筆者の結果を一つ紹介するが、研究集会の趣旨に沿って、本稿では、筆者の結果の詳しい証明を述べるよりも、今回の研究の背景や動機、思ったことなどを重点的に述べるつもりである。そのため、数学的な主張はもちろん正確に書くが、それ以外の文章には著者の私見が少なからず入っていることをあらかじめお断りしておきたいと思う。(だから、文章を鵜呑みにせず、読者各人が個人的に考えたり調べたりしてほしいと思う。)

2. 解析数論における中心極限定理

本稿のキーワードの一つとして、「中心極限定理」がある。まず、確率論における中心極限定理を思い出そう。ラフに言えば、「独立同分布（平均を 0、分散を 1 と正規化しておく）な確率変数達 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ があるとき、$n^{-1/2}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$ はガウス分布に分布収束する」というもので、すなわち、ランダムな現象が集積してくると適当なスケーリングで観測量はその期待値の回りに常にガウス分布で分布してくるというものである。確率変数達 X_i の分布によらず常にガウス分布が出てくる点で不思議であり、自然界の普遍的な性質の一つである。

さて、ここで注意を一つしておきたい。確率論はふつう、不確定な要素を持つ対象に対して適当な確率空間を人工的に作り確率変数達に“良い条件（統計的に独立とか）”を仮定し (つまり理想的な状況を与え) それから議論を始めるのである。しかし、本稿で扱いたい Probabilisitic number theory（「確率的数論」とでも訳すのか）は、むしろ逆な感じである。数論で出てくる対象は完全に deterministic なものであるが、まずそのような対象がはじめに天から与えられ、そしてそれらに対してランダム性・統計的に独立を表す性質を導くのが

目的である。このような事情はエルゴード理論でもそうである。確率的数論では確率論での経験をモデルにしたいとでも言えばいいのかもしれない。

例をあげたい。以下、「素数分布」とは、いわゆる素数定理のみならず、素数たち$2, 3, 5, 7, 11, 13, \cdots$（これらは、完全に deterministic なものである）を実数 $\mathbb{R}$ に入れたとき素数たちのお互いの位置的な相関の統計的な性質を意味することにする。人間の直感として、素数たちは実軸上でなんだかランダムに並んでいるように思える。さらに、位置的な並びだけでなく、性質としても異なる素数達は、“独立”に振舞うように思える。そのことを考察・証明したい。

しかし、いざ実際にそのようなことを考察・証明しようとすると、未解決問題にたくさん出会う。素数分布論には未解決問題だらけと言った方がいいかもしれない。（これについては、第3節も見て下さい。）なぜ解けないのか。その理由の一つには、素数の定義の簡単さがある。普通、数学的用語・概念には、いろんな下準備をしてやっと定義される（つまり、それだけ構造がいろいろ入り、よってその分、“攻めやすい”のである）というものが多いが、素数の定義は小学生でさえ知っているぐらい簡単であり、つまり、それだけ一見には“構造がない・見えにくく”(真にそうなのかどうかは分からないのが現状)、よって攻めようにもなかなか攻められない、また、たとえ攻めようとしても、直接的・straightforward でかつ非常にテクニカルのものになってしまう。素数分布に限らず、この辺の事情は、一般に解析数論や超越数論においてそうである。個々の独自の対象に応じて非常にテクニカルにならざるを得ないのがしばしばである。(でもそれがゆえに、逆に面白く感じるのでもあるのだけど。）また、素数pを一つ固定してその上でいろんな対象を考察するよりも、素数たちを走らせたときにどうなるかは、しばしばより難しい問題となるが、素数分布はその典型である。素数定理の少しでも詳しい version からして、それはリーマン予想（の弱い形）と関連することが知られているが、もう超難問になってしまう。

さて話を元に戻し、解析数論における中心極限定理の例を2つ述べたい。ここでの中心極限定理とは、先の確率論での中心極限定理を動機とし、何かの分布を調べたときそれがガウス分布に従っているという類いの結果を指し、それは統計的独立な確率変数のように振舞っていることを暗に意味する。

まず一つ目であるが、自然数 $\mathbb{N}$ 上定義されるある種の数論的関数に関する結果である。例で説明しよう。いつものように$\omega(n)$で、nを割る異なる素数たちpの個数を表すことにする。関数$\omega(n)$は、自然数nを1から順に走らせたとき、突然大きくなったり逆に突然小さくなったりと“不規則”に振舞っているように思える。この$\omega(n)$に関し、Erdös と Kac は [EK1] [EK2] において

次の結果を示した。(余談であるが、数論研究者でなじみのない方がいるかもしれないので一言述べておくと、この Kac は、著名な論文「Can one hear the shape of a drum?」の著者であり、またファインマン経路積分に関し数学的に正当化されているいわゆる Feynman-Kac の公式の Kac である。)

Theorem 2.1. 任意の $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $(x_1 < x_2)$ に対して、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \le n \le N \,\middle|\, x_1 < \frac{\omega(n) - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

この研究結果の基本的な動機は、素数たちのランダム性を調べたかったというものであろうが、確率的数論のはじまりと言っていい結果である。自然数の中で素数たちは絶妙なバランスで存在していると想像される。

次に、解析数論における中心極限定理の2番目の例であるが、それはL関数の臨界線上の値分布に関するものである。リーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ の臨界線 $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$ 上の様子について Selberg は [S3] において次の結果を述べた。この証明の本質的な部分は [S1] においてなされている。

Theorem 2.2. $\mathbb{C}$ 上の任意のボレル集合 E に対して、

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} m \left(\left\{ t \in [0,T] \,\middle|\, \frac{\log\zeta(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log t}} \in E \right\} \right) = \frac{1}{2\pi} \iint_E e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

が成り立つ。ここで、m は、$\mathbb{R}$ 上の通常のルベーグ測度を表す。

ただし、$\log\zeta(s)$ の枝は、$\mathrm{Re}\,(s) \to \infty$ で0に取っておく。またいわゆる Selberg class と呼ばれるディリクレ級数たちについて同様の結果が [S3] [BH] にある。また、[BH] にはこの結果を応用して零点に関する結果を得ている。

3. 臨界領域での様子

前節で Selberg の結果を述べたが、そしてまた後に保型 L 関数の値分布に関する筆者の結果を述べるが、そこで今、臨界領域での様子を調べたい(と思った)動機について、基本的な考えをリーマン・ゼータ関数を例にして、言っておきたいと思う。ここで、臨界領域とは、$\{s \in \mathbb{C} | 0 \le \mathrm{Re}\,(s) \le 1\}$ (今は便宜上 $\mathrm{Re}\,(s) = 0, 1$ も含ませておく)を表すことにする。少なくとも次の二つは大きな理由である:

1、素数分布のことが知りたい。

2、ゼータ関数が“関数”として興味深い。

まず、1であるが、典型例は素数定理である。素数定理 $\pi(x) \sim x/\log x$ は、いわゆる明示公式を通して $\zeta(s)$ が $\mathrm{Re}(s)=1$ 上で零点を持たないことと同値であり、$\zeta(s) \neq 0$ on $\mathrm{Re}(s)=1$ は Hadamard と de la Vallée Poussin によって独立に、はじめに得られたことは有名である。素数定理の証明は、少なくとも3種類の方法があるが、それらは方法論から見ても象徴的なので述べておく。1つは、上記のもので古典的関数論の範疇である。2つ目はスペクトル理論に関する方法である。実解析的な Eisenstein 級数を使って $\mathrm{Re}(s)=1$ 上で $\zeta(s) \neq 0$ を示して、その結果として素数定理を得るものである。3つ目は、上の2つと違って $\zeta(s)$ を介さず、直接的に素数を扱うもので、Selberg と Erdös によって得られた Sieve 的方法（Elementary method）である。

上記のように素数定理は解決したが、素数分布の問題には未解決問題がたくさんある。双子素数、Hardy-Littlewood prime n-tuple conjecture、$p_{n+1}-p_n$ の大きさ（ここで、p_n は n 番目の素数）、$x_n := p_n/\log p_n$ と正規化したときの差 $x_{n+1}-x_n$ の分布（予想はポアソン分布）、Goldbach 予想などなど。

素数定理の経験からすると、素数に関する情報はすべて $\zeta(s)$ に入っていて、$\zeta(s)$ の解析的性質として、素数のすべての情報は浮かび上がってくると期待するかもしれない。ただ実際には、素数分布に関するある性質が $\zeta(s)$ のどういう性質と関連するのかという時点で既に未知な部分が多く研究課題であり、また $\zeta(s)$ のある性質と結びついたとしても、リーマン予想のごとく、$\zeta(s)$ の解析的性質を調べることは相当に困難であったりする。そのことについては下記でもう一度触れる。またそもそも、素数分布の深い研究においてリーマン・ゼータ関数 $\zeta(s)$ が非常に役に立つのかどうかは、よくは分からないことも述べておこう。分からないことだらけであるが、しかしいずれにしろ、$\zeta(s)$ との関連（や上記のような Sieve Method, Elementary Method）を探求することは大いに興味のあることである。

次に、2について述べたい。普遍性定理（see [La]）を例にあげよう。これは、次のような主張である。

Theorem 3.1. 今、$D=\{s \in \mathbb{C} | 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ 内の単連結なコンパクト集合 K と、K 上連続で K の内部で正則な関数 $h(s)$ を与える。そのとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\sup_{s\in K} |\zeta(s+it)-h(s)| < \varepsilon$ となる $t \in \mathbb{R}$ がある。より詳しくは、

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} m\left(t \in [0,T] \,\middle|\, \sup_{s\in K} |\zeta(s+it)-h(s)| < \varepsilon \right) > 0$$

が成立する。

つまり、リーマン・ゼータ関数$\zeta(s)$は領域Dにおいて、虚軸方向に平行移動させることにより、“どんな挙動をもする”というようなことを言っているわけで、たった一つの関数でこのようないろんな挙動を作り出せるというのは、尋常ではなかなか考えられにくいものである。証明では、$\log p$たちの$\mathbb{Q}$上線形独立であること（これは素因数分解の一意性）から得られるあるエルゴード性が一つのキーとなっている。このように、ゼータ関数は関数として大変興味深い性質を持っている。

さて、以上のように、研究動機として上記の1，2をあげたが、実際的には臨界領域での様子を調べるのは非常に難しい。なぜかというと、詳しい解析ができる良い表示がないからである。すなわち、$\mathrm{Re}(s) > 1$では、$\sum_n n^{-s}$という解析的に扱いやすい（もちろん、正の奇数値における簡単な表示や超越性など分かってないのだけど）表示・定義があるのだが、$0 < \mathrm{Re}(s) < 1$では、そういうものが“ない”。解析接続を表すぐらいの表示ならあるが、詳しい解析には十分ではないのだ。また、それなりに良い表示は現在でも知られているが、しかし、それが良い性質を持つことを示すことはとても難しい。これらのことは、Sieveや一様分布論、スペクトル理論などの各分野での深い話題に関わってくる。

このように$\zeta(s)$の臨界領域での様子は解析的に扱いが難しい。しかし、その良いモデルとして、ランダム行列理論というものが近年活発に研究されているので、それについて、次の節で触れたい。

4. ランダム行列理論

ランダム行列とは、ある行列の集合に適当な確率測度を乗っけたものである。もともとはWigner（量子力学の建設の立役者の1人）により、原子核のスペクトルの統計的な性質を記述するために考え出されたものである（see e.g. [M]）。この分野において、GUE(Gaussian Unitary Ensemble)というモデルがよく出てくるのでまずそれを紹介しておきたい。$\mathcal{H}_N$を$N \times N$-Hermite行列全体とし、その上にGauss型の確率測度を乗っけたもの、つまり、$P_N(dX) \propto \exp(-\mathrm{Tr}\,(X^2))dX$なる確率測度を与えたときの組$(\mathcal{H}_N, P_N)$のことをGUEと言う。そのとき、このランダム行列の固有値について、適当なスケーリングで$N \to \infty$としたときの統計的な振る舞いが興味深く、今ではいろいろ知られておりまた盛んに研究されている。

そして実は、これら固有値の統計的な様子が、一見全然関係ないと思われるリーマン・ゼータ関数の零点の様子と不思議と一致しているのである。歴史をたどってみる。Montgomery（1973）が純粋に解析数論的な興味から、リーマ

ン予想の仮定の元でリーマン・ゼータ関数の零点たち ρ_i の虚部 γ_i の 2 点相関関数について調べ、その後、Dyson の指摘により GUE との関連が認識された。そしてその信憑性が、Odlyzko（1987）による隣接零点の間隔分布に対する数値計算によって、確実なものとなったのである。今では、n 点相関関数について、両者が一致することが "部分的に" 示されているが、一般には未解決である。これらのことや以下に述べることは、例えば [KS] [C] が良い survey となっている。

ところで、行列の特性多項式は固有値を零点に持つ関数であるので、上記のことから、GUE に対する特性多項式の様子とリーマン・ゼータ関数の臨界線上の様子は、何か関係がある・似ているかもしれないと思われるが、実際、そのような結果がありそれについて簡単に述べたい。

ここで、GUE よりも、GUE とは統計的に同じであるが、我々にとって扱いやすい Dyson の CUE(Circular Unitary Ensemble) というものを導入しておく。これは、$N \times N$-ユニタリー行列 $U(N)$ とその確率 Haar 測度 Q_N の組 $(U(N), Q_N)$ のことである。上記のように、適当な scaled limit $N \to \infty$ が興味深い。そのとき、例えば、$\zeta(s)$ の $\mathrm{Re}\,(s) = 1/2$ 上の平均値 $M_k(T) = \int_0^T |\zeta(1/2+it)|^{2k} dt$（これは、リンデレーフ予想と関連する重要な量である）についてその漸近的な振る舞いが、CUE の特性多項式 $Z(U,\theta) = \det(I - Ue^{-i\theta}), U \in U(N)$ の平均値 $\lim_{N\to\infty} N^{-k^2} Q_N(|Z(U,\theta)|^{2k})$ の振る舞いと関連があることが $k = 1, 2$ のとき知られ、一般の k で予想されている。つまり、よく分からない $M_k(T)$ に対する良いモデルとなっているのである。

また他にも、Keating-Snaith(2000) が、次を示した。

Theorem 4.1. $\mathbb{C}$ 上の任意のボレル集合 E に対して、

$$\lim_{N\to\infty} Q_N \left(U \in U(N) \left| \frac{\log Z(U,\theta)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log N}} \in E \right. \right) = \frac{1}{2\pi} \iint_E e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$$

が（θ によらずに）成立する。

これは、先の Selberg の結果 Theorem 2.2 に対応するものである。このように、リーマン・ゼータ関数の解析的挙動にとってランダム行列理論は良いモデルであり、そしてこれは、ヒルベルト・ポリヤのプログラムに大きな可能性を与えているものである。

5. 主結果

この節では、著者による本稿の主結果を述べる。

Theorem 2.2 で出てきたようにリーマン・ゼータ関数に対しては $t(=\mathrm{Im}\,(s))$ というパラメータがあるが、他の一般の L 関数に対しては付随するパラメータとして t 以外に幾つか考えられる場合がある。例えば、ディリクレ指標 $\chi \bmod q$ のディリクレ L 関数 $L(s,\chi)$ では q をパラメータとして持っている。そして、t を動かす代わりに、q を動かしたときの様子についても、解析数論ではよく研究されていて、例えば [S2] でも考察されている。そして不思議にも、t の場合に対応するような現象があることが認識されている。他に保型 L 関数ならレベル N や重さ k などのパラメータとして持ちうるが、それらを動かした時の様子が、例えば、零点の様子だと [ILS] で研究されている。また、第 3 節で普遍性定理を述べたが、保型 L 関数に対しそれらのパラメータでの普遍性については [N1] で考察されている。このように、証明の道具・方法は個々の状況に応じてうまく探すのだが、現象としては不思議にも t 以外のパラメータを動かしたとき、t の場合と対応するような現象があるのだ。今回、セルバーグの Theorem 2.2 を動機として、保型 L 関数に対しレベル N を動かした時の中心極限定理について考察した。

今、$\mathcal{F}_N$ を $\Gamma_0(N)(\subset SL(2,\mathbb{Z}))$ に対する重さ 2 の正規化された Hecke eigen cusp forms 全体とする。ただし以下では、レベル N は素数とする。そして、$f\in\mathcal{F}_N$ に対し正規化した Hecke 固有値を $\lambda_f(n)$ とする、すなわち、$T_n(N)$ を n 番目の Hecke 作用素とするとき、

$$T_n'(N)f=\lambda_f(n)f,\quad \text{where } T_n'(N):=T_n(N)/n^{\frac{1}{2}}$$

とする。そのとき、f に付随する保型 L 関数は

$$L(s,f):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_f(n)}{n^s}=\prod_{p\mid N}\left(1-\frac{\lambda_f(p)}{p^s}\right)^{-1}\prod_{p\nmid N}\left(1-\frac{\lambda_f(p)}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}\right)^{-1}$$

for $\mathrm{Re}\,(s)>1$ というものであった。これらは $\mathbb{C}$ 上全体に解析接続されそして関数等式を持つ。Hecke 固有値は正規化してあるので、臨界線は $\mathrm{Re}\,(s)=1/2$ である。

そのとき、レベル N をパラメータをして動かしたときに次の結果が成り立つ。

Theorem 5.1. 実数 $t\neq 0$ を固定する。そのとき、$\mathbb{R}$ 上の任意にボレル集合 E に対して次が成り立つ。

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\#\mathcal{F}_N}\#\left\{f\in\mathcal{F}_N\ \middle|\ \frac{\mathrm{Im}\log L\left(\frac{1}{2}+it,f\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\log\log N}}\in E\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_E e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

レベル N を無限に飛ばしたとき Hecke eigen cusp forms $f \in \mathcal{F}_N$ の個数はどんどん増えていくが、この定理は、$N \to \infty$ で、これら f 達がお互いに “ランダム” に位置していることを暗に意味しているように思える。ただ、素数分布（これは $\mathbb{R}$ に埋め込んで考えていた）と違って、その “ランダム” ということをどのように表現すれば・計ればいいのかは今のところ分からない。

6. 証明の概略

この節では、主結果の証明の概略を述べる。詳しくは [N2] を見て下さい。要するに、モーメントを計算しそれがガウス分布のものと一致することを確かめれば、Moment method により主結果が成立するので、次のモーメントに関する結果を示せばよい。

Theorem 6.1. $m \in \mathbb{N}$ とし $t \neq 0$ を固定したとき、

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_N} \left(\operatorname{Im} \log L\left(\frac{1}{2} + it, f\right)\right)^m$$
$$= C_m \, \#\mathcal{F}_N \left(\frac{1}{2} \log\log N\right)^{\frac{m}{2}} + O_{m,t}\left(N (\log\log N)^{\frac{m-1}{2}}\right).$$

ここで、

$$C_m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(\frac{m}{2})!\, 2^{\frac{m}{2}}}, & \textit{if } m \textit{ is even,} \\ 0, & \textit{if } m \textit{ is odd} \end{cases}$$

とする。この C_m は、ガウス分布のモーメントである。

この Theorem を示すわけだが、Selberg [S1] のテクニックに習って、計算する。荒く言えば、次のようになる。まず、次の形の explicit formula が出発点である。

Lemma 6.2. $\operatorname{Re} s \geq 1/2$、$x \geq 10$ とするとき、

$$\begin{aligned} \frac{L'}{L}(s, f) = &- \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_x(n) c_f(n)}{n^s} + \frac{1}{\log^2 x} \sum_{\rho} \frac{x^{\rho - s}(1 - x^{\rho - s})^2}{(s-\rho)^3} \\ &- \frac{1}{\log^2 x} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^{-\frac{1}{2}-\ell-s}(1 - x^{-\frac{1}{2}-\ell-s})^2}{(s + \frac{1}{2} + \ell)^3}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

ここで、ρ は $L(s,f)$ の非自明な零点全体を走り、$\Lambda_x(n)$ は *von Mangolt* 関数 $\Lambda(n)$ を変形したもので、$\Lambda_x(n) := \Lambda(n)w_x(n)$ *where*

$$w_x(n) := \begin{cases} 1, & \text{for } 1 \le n \le x, \\ \left(\frac{1}{2}\log^2 \frac{x^3}{n} - \log^2 \frac{x^2}{n}\right)\Big/ \log^2 x, & \text{for } x < n \le x^2, \\ \left(\frac{1}{2}\log^2 \frac{x^3}{n}\right)\Big/ \log^2 x, & \text{for } x^2 < n \le x^3, \\ 0, & \text{for } x^3 < n. \end{cases}$$

というものである。

次に、式(6.1) において、和 $\sum_\rho$ の部分が問題であるが（和 $\sum_\ell$ の部分は問題ない)、次の零点密度定理 (by Kowalski-Michel 1999) により処理する。

Lemma 6.3. N を素数とする。そのとき、次を満たす絶対定数 $A>0$ がある：任意の実数 t_1, t_2 *with*

$$t_1 < t_2, \quad t_2 - t_1 \ge \frac{1}{\log q},$$

と任意の $\alpha \ge 1/2 + (\log N)^{-1}$ と任意の c *with* $0 < c < 1/4$ に対して、

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_N} N_f(\alpha, t_1, t_2) \ll_c (1 + |t_1| + |t_2|)^A N^{1 - c\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)} (\log N)(t_2 - t_1)$$

が成り立つ。ここで、$N_f(\alpha, t_1, t_2)$ は、$L(s,f)$ の零点 $\rho = \beta + i\gamma$ のうち

$$\beta \le \alpha, \quad t_1 \le \gamma \le t_2.$$

なるものの個数（重複を含める）を表す。

式(6.1) の右辺の第一和については、セルバーグ跡公式から導かれる次の結果を使って処理する。

Lemma 6.4. N を素数とし $(n,N)=1$ とするとき、

$$\operatorname{Tr} T'_n(N) = \frac{(N+1)}{12} n^{-1/2} \delta_{n=\square} + O\left(n^c N^{1/2}\right).$$

ここで、$c>0$ は絶対定数で、関数 $\delta_{n=\square}$ は、n が平方数なら 1、それ以外の n なら 0 なるものである。

結局は、主要な部分として、$\operatorname{Im} \sum_{p \le N^\delta} \frac{\lambda_f(p)}{p^{1/2+it}}$ （ここで、δ は十分小さな正の実数）が出てきて、これのモーメントを計算することになる。Theorem 5.1, Theorem 6.1 において、$\log\log N$ が出るのは、公式 $\sum_{p \le x} 1/p = \log\log x + O(1)$ によることを述べておく。

7. 終わりに

確率論やエルゴード理論的な視点が、この先、数論においてどれほど重要であるのだろうか。少なくとも歴史は、完全に deterministic である数論的対象に対してその裏にランダム性が潜んでいることが現にあるということは、示している。そしてまたそれらは一見しただけでは非自明なことが多い。確率論はまだ比較的新しい分野であり (Kolmogorov が確率の公理を作ったのは 1933 年である)、数論 (や他の分野) との接点は十分研究され尽くされたとは言えないし、この先、増えると期待したい。例をあげよう。いわゆる Sato-Tate 予想というものがあるが、なぜ Sato-Tate 測度というきれいな確率測度が現れるのか (もちろん、例えば、付随する symmetric power L-functions のある性質だと言ってしまえばそうなのだけど)、またなぜその測度はランダム行列理論や自由確率論といった分野にも現れるのか。確率論がすぐそばに横たわっているトピックは、思った以上に多いのではないか。素数分布を含め、解けるかどうかは別として、気になる問題はたくさんあるように思う。

REFERENCES

[BH] E. Bombieri, D. A. Hejhal: On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products, Duke Math. J. **80** (1995), 821–862.

[C] J. B. Conrey: L-functions and random matrices, in "Mathematics unlimited - 2001 and beyond" Springer-Verlag, 2001, 331–352.

[E] P. D. T. A. Elliott: Probabilistic number theory, I, II, Springer-Verlag, 1979, 1980.

[EK1] P. Erdös, M. Kac: On the Gaussia law of errors in the theory of additive functions, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **25** (1939), 206–207.

[EK2] P. Erdös, M. Kac: The Gaussia law of errors in the theory of additive number-theoretic functions, Amer. J. Math. **62** (1940), 738–742.

[ILS] H. Iwaniec, W. Luo, P. Sarnak: Low lying zeros of families of L-functions, IHES **91** (2001), 55–131.

[K] M. Kac: Statistical independence in probability, analysis and number theory, Carus Monograph No. 12, 1959.

[KS] N. M. Katz, P. Sarnak: Zeros of zeta functions and symmetry, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 1–26.

[Ku] J. Kubilius: Probabilistic methods in the theory of numbers, AMS, 1964.

[La] A. Laurinčikas: Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, 1996.

[Li] U. V. Linnik: Ergodic properties of algebraic fields, Springer-Verlag, 1968.

[M] M. L. Mehta: Random matrices, Academic Press, 1991.

[N1] H. Nagoshi: The universality of families of automorphic L-functions, preprint.

[N2] H. Nagoshi: Gaussian distribution and a family of automorphic L-functions, preprint.

[S1] A. Selberg: Contributions to the theory of the Riemann zeta-function, Arch. Math. Naturvid. **48** (1946), 89–155; Collected Papers, Vol 1, 214–280, Springer-Verlag.

[S2] A. Selberg: Contributions to the theory of Dirichlet's L-function, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo (1946), 1–62: Collected Papers, Vol 1, 281–340, Springer-Verlag.

[S3] A. Selberg: Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series, Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory (1992), 367–385; Collected Papers, Vol 2, 47–63, Springer-Verlag.

[Si] Y. G. Sinai: Introduction to ergodic theory, Princeton University Press, 1976.