数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 198-204

大成算經巻之八、九～日用術～について

東京理科大学 理学研究科　原田 美樹 (Miki Harada)
Graduate School of Science,
Science University of Tokyo.

1 大成算經について

大成算經は、関孝和・建部賢明・建部賢弘により 1683 年の夏から編集が始まり、1710 年ごろに全二十巻が完成した。構成は、主に首篇 (巻之一の初めの部分)・前集 (巻之一～巻之三)・中集 (巻之四～巻之十五) ・後集 (巻之十六～巻之二十) の 4 つであり、日用術 (巻之八、九) はこのうちの中集に編集されている。

2 日用術について

巻之八、巻之九は、日用術とされ、金銭の両替、利息の計算、運賃や労働などの計算、布や米に関する計算、単位の換算など、日常で使う計算法について書かれている。本文は最初に日用術の説明が記述されており、それ以降はすべて例題となっている。構成は、問題、答え、解法の順になっており、とくに解法については計算方法のみが書かれており、なぜそのような方法で答が出るのかは説明されていない。

3 巻之八、巻之九について

巻之八は、穀類、金類、銀類、錢類、服類、舂秏、税務、數量、運僦、利足、逘輸、互換で構成されており、各問題数は、11 問、8 問、7 問、7 問、8 問、5 問、10 問、13 問、12 問、27 問、5 問、23 問となっている。一方巻之九は、差分、均分、逐倍、盈朒、方程、堆積で、各問題数は、29 問、12 問、9 問、13 問、7 問、13 問となっている。本文では、穀類から服類までを「商價の物」とし、税務から逘輸までを、「動作の事」としている。前者は、物の取引に関する問題であり、後者は、貸し借りや、運搬などのように、人の動作に関する問題である。それ以降はそれぞれについて簡単に説明されている。

互換‥単位の異なるものをそろえて換算
差分‥比例配分のこと

均分‥速さ、方向の異なる複数のものが、出会う時の距離や時間を求める

逐倍‥決まった数に応じて物が増えたり減ったりするとき、元の量や、増える量などを求める。たとえば、一粒の米が毎日倍ずつ増えるとして十五日経ったときの米粒の数を求める問題などである

盈朒‥過不足問題。たとえば、人が何人かいて、金をわける。四両ずつわけると十一両足りず、六両ずつわけると三両足りないとき、人数と金の両を求めるような問題である

方程‥連立一次方程式

堆積‥球を積み重ねたときの、球の個数を問う

4 九章算術との比較

中国にも、日用術のように日常で使われている計算などをまとめた「九章算術」がある。内容や計算方法など大成算經巻之八、巻之九の日用術(以下、日用術と記す)と非常によく似ているので、比較をした。
以下は、九章算術の項目である。

方田：これによって田畑の界域をおさめる

粟米：これによって交易をおさめる

衰分：貴賎により異なる給与と納税をおさめる

小広：正方形、立方体と円、球の面積、体積をおさめる

商功：土木工事の功程と種々の立体の体積、容積をおさめる

均輸：遠近の労費をおさめる

盈不足：錯雑した表面に出ない数をおさめる

方程：錯糅する正数負数をおさめる

句股：これによって高、深、広、遠をおさめる

このうち、日用術にないものは、小広、商功、句股の三つである。また、衰分は、日用術では「差分」にあたり、均輸、盈不足はそれぞれ「逡輸」、「盈朒」にあたる。逆に、日用術では、三次、四次など、高次方程式が使われるが、九章算術に高次方程式は使われていない。さらに、当時は分数表記がなかったために、計算を工夫しなければならなかった。

現代とは多少異なった計算方法もあるので、ここでは、整数未満の端数計算や、分数計算などについて、利足、逐倍、送輸の例題を抜粋しながら紹介していく。

5 利足

問題數は前述したとおり、27 問である。金利は、年利では 10〜20 %、月利では平均 2〜4 %となっている。例題として、第一十八問目を紹介する。

「假如有元銀三百一十二錢五分毎月加利四分 (乃利加利) 還元利共三百四十四錢七分六厘問借月數」

はじめに銀が 312 錢 5 分あって、月利四分 (4 %) のとき、元利あわせて 344 錢 7 分 6 厘になったら、どのくらいの月数を借りていたかという問題である。

「答曰借二箇月一十五日」

解法は以下のように記述されていた。

「術曰置四分加元一得一箇〇四厘以乘元銀三百一十二錢五分得一箇月元利共銀三百二十五錢少於還共銀故亦乘一箇〇四厘得二月元利共數三百三十八錢亦少於還銀故又乘一箇〇四厘得三箇月元利共數三百五十一錢五分二厘却多於還銀故爲二箇月有畸置還銀三百四十四錢七分六厘內減二箇月元利共銀餘六錢七分六厘以三十日相乘得二百〇二錢八分為實置三箇月元利共數內減二箇月元利共數餘一十三錢五分二厘爲法實如法而一得有畸日數也」

計算方法は、

$0.04 + 1 = 1.04$

$312.5 \times 1.04 = 325$ …… 一箇月後の元利

$325 \times 1.04 = 338$ …… 二箇月後の元利

$338 \times 1.04 = 351.52$ …… 三箇月後の元利

この時点で、借月数は、三箇月を超えないことがわかる。
以下の計算は、端数を求める計算である。

$344.76 - 338 = 6.76$
$6.76 \times 30 = 202.8$
$351.52 - 338 = 13.52$
$202.8 \div 13.52 = 15$

ここで、先に30を掛けたのは、割算のときにできるだけ誤差が出ないようにするためである。グラフにしてみるとよくわかるが、このように端数は比例を利用して計算していたことがわかった。利足に限らず、他の例題でも同様の計算がなされていた。

6 逐倍

逐倍の問題の多くは、現在解くならば等比数列の和の計算をすると解ける。以下紹介する例題(第七問目)は、分数を含む複雑な計算を、表記しないように工夫して計算した問題である。

「假如有人携酒遊不知其數只云遇務添酒五分之三倍逢花飲三㪷二升七合六勺八抄今遇務逢花倶各五次酒盡壷空問元携酒」

人が何人かいて、酒を持っているがその量は知られていない。働いて元の酒の5分の3にあたる量をもらい、宴会などで三㪷二升七合六勺八抄を飲む。これを5回ずつ繰り返し、酒が尽きたとき、もとあった酒の量を求める問題である。

「答曰元携酒四㪷九升四合〇五抄」
「術曰分母五與分子三相并得八爲初率以分母相乘加入分母自乘二十五共得六十五爲二次率以初率八相乘加入分母再自乘一百二十五共得六百四十三爲三次率又以初率相乘加入分母三自乘六百二十五共得五千七百八十五爲四次率復以初率相乘加入分母四自乘三千一百二十五共得四萬九千四百〇五爲五次率以飲三㪷二升七合六勺八抄相乘得一萬六千一百八十九斛〇三升〇四勺爲實置初率八四自乘之得三萬二千八百六十八爲法實如法而一得元携酒也」

本文での計算方法は、

5+3=8	初　率
8×5+25=65	二次率
8×65+125=645	三次率
8×645+625=5785	四次率
8×5785+3125=49405	五次率
49405×3.2768=161890.304	實
8×8×8×8×8=32768	法
161890.304÷32768=4.9405	

となっている。現在この問題を解くとすれば、以下の方程式を立てて計算するであろう。簡単にするため、$a = 3.2768$ とする。

$$\left(\frac{8}{5}\right)^5 x = \left(1 + \frac{8}{5} + \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^3 + \left(\frac{8}{5}\right)^4\right) a \tag{1}$$

ここで (1) 式の両辺に５の５乗をかけると、

$$8^5 x = \left(5^5 + 5^4 \times 8 + 5^3 \times 8^2 + 5^2 \times 8^3 + 5 \times 8^4\right) a$$

８の累乗を表示させないようカッコでくくると、

$$8^5 x = \left(8\left(8\left(8\left(8 \times 5 + 5^2\right) + 5^3\right) + 5^4\right) + 5^5\right) a$$

を得る。本文での式の第二行目は、一番内側のカッコに対応しており、次のカッコが第三行目に、さらに次のカッコが第四、五行目に対応している。

7 送輸

送輸は、等しい労働力のもとで、距離の遠近応じて運ぶ物の量を求めるような問題である。、ここでは、第五問目を紹介する。

「假如有土七百五十五坪運四箇所東用徒七人南用徒六人西用徒五人北用徒四人各毎一人均往返一百町而棄畢其路東南西北遞增一町四路及運土」

土が七百五十五坪あり、東は七人、南は六人、西は五人、北は四人で運ぶ。ちょうどどの方角も運ぶ距離を百町にし、各距離は東南西北になるにつれて一町ずつ増えていくとき、それぞれの (片道の) 距離と運ぶ土を求める問題である。

「　　答曰
東路二町　土三百五十坪
南路三町　土二百坪
西路四町　土一百二十五坪
北路五町　土八十坪　」

解は「術曰立天元一爲東路 ……」で始まっている(長いので省略する)。以下、本文に書かれてある通りの流れで計算方法を述べていく。わかりやすくするために、変数 x を使う。

東路を x とする。
南路、西路、北路はそれぞれ

$$x+1 \quad , \quad x+2 \quad , \quad x+3$$

となる。
南路、西路、北路と東の人数 7 をかけて

$$7x^3+42x^2+77x+42 \cdots\cdots\cdots ①$$

東路、西路、北路と南の人数 6 をかけて

$$6x^3+30x^2+36x \cdots\cdots\cdots ②$$

東路、南路、北路と西の人数 5 をかけて

$$5x^3+20x^2+15x \cdots\cdots\cdots ③$$

東路、南路、西路と北の人数 4 をかけて

$$4x^3+12x^2+8x \cdots\cdots\cdots ④$$

①+②+③+④より

$$22x^3+104x^2+136x+42$$

百倍して

$$2200x^3+10400x^2+13600x+4200 \cdots\cdots ⑤$$

を得、左に寄せる。また、東南西北すべての道を掛けあわせ

$$x^4+6x^3+11x^2+6x \cdots\cdots\cdots ⑥$$

を得、755 をかけて⑤を引くと開方式

$$755x^4 + 2330x^3 - 2095x^2 - 9070x - 4200 = 0$$

を得る。

現在この問題を解くとすれば、以下の方程式を解くことになる。

$$700 \times \frac{1}{x} + 600 \times \frac{1}{x+1} + 500 \times \frac{1}{x+2} + 400 \times \frac{1}{x+3} = 755 \cdots\cdots ⑦$$

この方程式の両辺に、$x(x+1)(x+2)(x+3)$ をかけると、左辺の第一項目は、①式の 100 倍に対応し、第二項目、第三項目、第四項目はそれぞれ②、③、④式の 100 倍に対応している。また、右辺は、⑥を 755 倍したものになっている。つまり、本文の計算は、⑦式を解くことと同じである。

このように、分数を含む式を扱えなかったために、複雑な計算をすることによって分数を使わずに天元術を用いて解いたのである。

8 まとめ

利足などの例から、整数では解けない端数が出てくるような問題については、比例を利用して計算していたことがわかった。そして、分数計算については、分数表記を防ぐために簡単な問題では、あらかじめ割る数と割られる数に分母の積をかけておくという計算方法をとっていたことがわかった。また、複雑な分数計算 (特に分母に変数があるような計算) に関して、分数表記を避けるために、工夫した計算を行っているが、現代の解法と比較すると、非常に計算過程がよく似ている。しかし、そのような解法に至る過程は述べられていない。当時、分数自体は存在していた (本文中には「三分之二」などの表記があった) が、それを数式として表示する方法がなかったため、第六、七章で紹介したような複雑な計算方法がなされたのであろう。