数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 223-233

『拾璣算法』の分果問題について

藤井康生 (Yasuo Fujii)

1　はじめに

不定方程式の整数解を求める問題に関して，有馬頼徸著『拾璣算法』(明和6年，1769) には，第一巻に翦管4問と第三巻に分果5問を載せている．翦管は暦に関する計算から発展したと考えられる，剰余方程式の問題である．関孝和著『括要算法』(正徳2年，1702) 亨巻や建部賢弘著『研幾算法』(天和3年，1683) に載せられており，関以前から研究対称として注目されていたと考えられる．一方，分果は方程式が未知数より少ない，連立一次方程式の問題である．松永良弼著『桃李蹊径術』において述べられており，『拾璣算法』の分果は『桃李蹊径術』をもとにしたものであると考えられるが，術文には違いも見られる．『楊輝算法』の百鶏問題から発展したように思われるが，松永以前にはあまり注目されていなかったようである．

2　『拾璣算法』第三巻　分果

第1問　今有欲買桃李二果只云以共價銭除果共箇数得一箇三十七分箇之二十七　又云桃毎三十一箇價三文李毎七箇價一十三文問各箇数及價銭

答日　桃九十三箇　價九文　李三十五箇　價六十五文

術日　置只云数通分内子得六十四寄位〇置李價十三文以寄位乗之得内減分母三十七與李数七箇相乗数餘五百七十三為桃汎段数〇置桃数三十一箇以分母乗之得内減桃價三文與寄位相乗数餘九百五十五為李汎段数〇各汎段数互相減得等数一百九十一以約各汎段数而得桃三段李五段以各乗之得果箇数及價銭合問

桃と李の２種類の果物を買いたい，２つの値段の和で，２つの個数の和を割ると$1\frac{27}{37}$となる．桃は３１個で３文，李は７個で１３文である．桃，李の個数と値段はそれぞれいくらか．

答え　桃　９３個　９文　　李　３５個　６５文

術文は，

$1+\dfrac{27}{37}$ の分子 64　寄位

李値 $\times$ 寄位 $-$ 分母 $\times$ 李数 $= 13\times 64 - 37\times 7 = 573$　桃汎段数

桃数 × 分母 − 桃値 × 寄位 $= 31 \times 37 - 3 \times 64 = 955$　李汎段数

955,573 を互減して等数 191 をえる．これは

$955 - 573 = 382$

$573 - 382 = 191$

$382 - 191 = 191$

各汎段数を等数で約して

3　桃段数

5　李段数

を得，各果の個数と値段を得る．

解説

桃，李の個数をそれぞれ３１ｘ，７ｙとすれば，(ｘ，ｙは桃段数，李段数)

$$\frac{31x + 7y}{3x + 13y} = 1 + \frac{27}{37}$$

$$37(31x + 7y) = 64(3x + 13y)$$

$$955x - 573y = 0$$

$$5x - 3y = 0$$

$$x = 3 \quad y = 5$$

を得る．

第２問　今有人持桃李二果換杏一果各不知其箇数桃李共箇数與杏箇数適足只云桃李共價銭與杏價銭亦合又云桃毎三十一箇價三文李毎二箇價五文杏毎七箇價一十三文問三色各幾何

答曰　桃二百七十九箇　價二十七文　李七百六十四箇　仝一千九百十文
　　杏一千零四十三箇　仝一千九百三十七文

術曰　李價五文内減李数二箇餘三為桃段数○桃数三十一箇内減桃價三文餘二十八為李段数○桃数李價相乗得一百五十五内減李数桃價相乗六餘一百四十九為共数得木式①　李價内減李数餘三為杏段数○杏價一十三文内減杏数七箇餘六負○杏数李價相乗得三十五内減李数杏價相乗二十六餘九為共数○両段数互相減得等数三以各約之得火式②　列木式以火式之共数乗之得土式③　列火式以木式之共数乗之得金式④　列土式以金式同減異加而得水式⑤　列水式之段数杏段数変之為正得各段数○列所設段数以各乗之得果箇数及其價銭合問⑥

桃，李の２種類の果物を持っている人がいる．その個数の和はわからないが，杏の個数と同じである．また桃と李の２種類の値段と杏の値段は同じである．桃は３１個で３文，李は２個で５文，杏は７個で１３文である．３種類の個数と値段はそれぞれいく

答え　桃の個数　２７９個　値段　２７文
　　　李の個数　７６４個　値段　１９１０文
　　　杏の個数　１０４３個　値段　１９３７文

術文は，

李値 − 李個数 = 5 − 2 = 3　桃段数

桃個数 − 桃値 = 31 − 3 = 28　李段数

桃数 × 李値 − 李数 × 桃値 = 共数

31 × 5 − 2 × 3 = 155 − 6 = 149　木式　···①

李値 − 李数 = 5 − 2 = 3　杏段数

杏値 − 杏数 = 13 − 7 = 6 負　李段数

杏数 × 李値 − 李数 × 杏値 = 共数

7 × 5 − 2 × 13 = 35 − 26 = 9

互減により等数 3 を得る　火式　···②

木式 × 火式の共数　土式···③

火式 × 木式の共数　金式···④

土式と金式を同符号の時は減じ，異符号の時は加える．水式···⑤

水式の杏段数の符号を正とし，各段数を得，各果の個数と値段を得る．

①木式	桃	段数	3	共数	149
	李	段数	28	共値	149
②火式	李	段数	-2	共数	3
	杏	段数	1	共値	3
③土式	桃	段数	9	共数	447
	李	段数	84	共値	447
④金式	李	段数	-298	共数	447
	杏	段数	149	共値	447
⑤水式	桃	段数	9	共数	0
	李	段数	382	共値	0
	杏	段数	-149		
⑥	桃	段数	9		
	李	段数	382		
	杏	段数	149		

解説

桃，李，杏のそれぞれの個数を３１ｘ，２ｙ，７ｚ，それぞれの値段を３ｘ，５ｙ１３ｚとすれば，

$$31x + 2y = 7z$$

$$3x + 5y = 13z$$

これは，

$31x' + 2y' - 7z' = 0$

$3x' + 5y' - 13z' = 0$

とし，ここで $z' = 0$ とする，

$28x' - 3y' = 0$ より

$x' = 3,\quad y' = 28,\quad 31x' + 2y' = 3x' + 5y' = 149 \cdots (1)$

同様に $x' = 0$ とする，

$3y'' - 6z'' = 0$ より

$y'' = 2,\quad z'' = 1,\quad 2y'' - 7z'' = 5y'' - 13z'' = -3 \cdots (2)$

次に，上記の２式の右辺を消去する．$(1) \times 3 + (2) \times 149$

$x = 9,\ y = 382,\ z = 149$ を得る．

$31x' + 2y' + 7z' = 0$

$3x' + 5y' + 13z' = 0$

とし，ここで $z' = 0$ とする，

$28x' - 3y' = 0$ より

$x' = 3t,\quad y' = 28t,\quad 31x' + 2y' = 3x' + 5y' = 149t$

これが木式である．同様に火式は $x' = 0$ とする，

$3y' + 6z' = 0$ より

$y' = -2s,\quad z' = s,\quad 2y' + 7z' = 5y' + 13z' = 3s$

次に，木式，火式から共数を消去して，

$x = 9,\ y = 382,\ z = 149$ を得る．

注　松永良弼桃李蹊径術　第１５　では，z を消去している．

第３問　今買桃李杏三果只云果共箇数多如共價銭四十七箇又云桃毎三十一箇價三文李毎二箇價五文杏毎七箇價一十三文問得至少各箇数及其價銭術

答日　桃六十二箇　　價六文　　李二箇　　仝五文　　杏七箇　　仝一十三文

術日　置杏價一十三文内減杏数七箇餘六寄位〇置李價五文内減李数二箇餘三為杏汎段数〇置只云数四十七箇内累減杏汎段数三止餘二為桃段数〇置桃数三十一箇内減桃價三文餘二十八以桃段数二乗之得五十六内減只云数與寄位餘三三約之得李段数一杏汎段数三亦三約而得杏段数一而以各其箇数及價銭相乗之得数合問

桃，李，杏の３種類の果物があり，それぞれの個数の和は，それぞれの価格の和より４７文多い．また桃は３１個ごとに３文，李は２個ごとに５文，杏は７個ごとに１３文のとき，最も少ない個数およびその価格はいくらか．

答え　桃　６２個　６文　李　２個　５文　杏　７個　１３文

術文は,

杏値 − 杏個数 $= 13 - 7 = 6$　寄位

李値 = 李個数 $= 5 = 2 = 3$　杏の汎段数

只云数 − 杏汎段数 $\times n = 47 - 3 \times 15 = 2$　桃段数

桃個数 − 桃値 $= 31 - 3 = 28$

$28 \times$ 桃段数 − (只云数 + 寄位) $= 28 \times 2 - (47 + 6) = 3$,　$3 \div 3 = 1$　李段数

杏段数 $\div 3 = 3 \div 3 = 1$　杏段数

として, 桃段数 $= 2$,　李段数 $= 1$,　杏段数 $= 1$,　としている.

解説

桃, 李, 杏のそれぞれの個数を３１ｘ, ２ｙ, ７ｚ, それぞれの値段を３ｘ, ５ｙ, １３ｚとすれば,

$31x + 2y + 7z = 3x + 5y + 13z + 47$

術文はわかりにくい, 松永良弼桃李蹊径術　第１９　を参考に術文を考察する.

$28x' - 3y' - 6z' = 0$,　を考える.

まず, $x' = 0$　とし, $y' = -6$ (寄位)　$z' = 3$ (杏の汎数段)

次に, $28x' - 3y' - 6z' = 47$,　$z' = 0$,　を解くために,

$28x'' - 3y'' = 1$,　によって, $x'' = 1$,　$y'' = 9$,　を得る.

よって, $x' = 47 \times 1 - 15 \times 3 = 2$ (桃段数)

ここで, 術文では

$y' = \{28 \times 2 - (47 + 6)\} \div 3 = 1$,　(李段数)

$z' = 3 \div 3 = 1$,　(杏段数)

としている. この部分は不明である.

松永は, 最初に, $y' = -2$,　$z' = 1$　とし,

$y' = 47 \times 9 - 15 \times 28 = 3$　と併せて求めている.

第４問　今有甲乙丙客分取桃李杏三果只云總人数與共枝数適足又云甲毎三十五人取桃四枝乙毎三人取李七枝丙毎一十人取杏一十三枝問三果各枝数及各人数是変題也故只擇答数一條録于茲

答曰　甲三十五人　桃四枝　乙二十一人　李四十九枝　丙一十人　杏一十三枝

術曰　李七枝内減乙数三人餘四為甲段数〇甲数三十五人内減桃四枝餘三十一為乙段数〇甲数李七相乗得内減乙数桃四相乗餘二百三十三為各共数得天式①　杏一十三枝内減丙数一十人餘三為甲段数〇甲数内減桃四枝餘三十一為丙段数〇甲数杏十三相乗得内減丙数桃四相乗餘四百十五為各共数得人式②　杏一十三枝内減丙数餘三為負為乙段数〇李七枝内減乙数餘四為丙段数〇乙数杏十三相乗得内減丙数李七相乗餘三十一為各共数得地式③　於是以所求天人地之式二式或三式逐互加減之同加異減又同減異加或累倍而悉為変段

数交負数者各棄之依図布算乃変段数無除限故今此取段数四変示之④ ⑤ ⑥ ⑦ 列所設段数以各題数乗之得三果枝数及甲乙丙人数合問乃所録答数者用天地併式

甲，乙，丙グループの客がおり，桃，李，杏の３種類を取る．総人数と総枝数は同じで，甲は３５人毎に，桃４枝，乙は３人毎に李７枝，丙は１０人毎に１３枝をとる．３種類の枝数と各人数はいくらか．ただし答えがいくつもあるので，１つよいものを選ぶ．

答え　甲　３５人　桃　４枝　乙　２１人　李　４９枝　丙　１０人　杏　１３枝

術文は，

李枝数 $-$ 乙数 $= 7 - 3 = 4$　甲段数

甲数 $-$ 桃枝数 $= 35 - 4 = 31$　乙段数

甲数 $\times$ 李枝数 $-$ 乙数 $\times$ 桃枝数 $= 35 \times 7 - 3 \times 4 = 233$　共数　天式…①

杏枝数 $-$ 丙数 $= 13 - 10 = 3$　甲段数

甲数 $-$ 桃枝数 $= 35 - 4 = 31$　丙段数

甲数 $\times$ 杏枝数 $-$ 丙数 $\times$ 桃枝数 $= 35 \times 13 - 10 \times 4 = 415$　共数　人式…②

杏枝数 $-$ 丙数 $= 13 - 10 = 3$　乙段数　負

李枝数 $-$ 乙数 $= 7 - 3 = 4$　丙段数

乙数 $\times$ 杏枝数 $-$ 丙数 $\times$ 李段数 $= 3 \times 13 - 10 \times 7 = -31$　共数　地式…③

天式 $+$ 地式…④

天式 $+$ 人式…⑤

人式 $-$ 地式…⑥

天式 $+$ 人式 $+$ 地式…⑦

等，天式，人式，地式，を組み合わせることによって各段数を得

各果の枝数と甲．乙，丙，丁の人数を得る．

天式 $+$ 地式 の時が求めるものである．

①天式	甲	段数	4	総人数	233
	乙	段数	31	共枝数	233
②人式	甲	段数	3	総人数	415
	丙	段数	31	共枝数	415
③地式	乙	段数	-3	総人数	31
	丙	段数	4	共枝数	31
④天式＋地式	甲	段数	1	総人数	66
	乙	段数	7	共枝数	66
	丙	段数	1		
⑤天式＋人式	甲	段数	7	総人数	648
	乙	段数	31	共枝数	648
	丙	段数	31		
⑥人式－地式	甲	段数	1	総人数	128
	乙	段数	1	共枝数	128
	丙	段数	9		
⑦天式＋人式＋地式	甲	段数	1	総人数	97
	乙	段数	4	共枝数	97
	丙	段数	5		

解説

甲，乙，丙，のグループの数をそれぞれ，x，y，zとすると，

$$35x + 3y + 10z = 4x + 7y + 13z$$

術文は，第２問と同様にして解いている．概略を示す．

$31x' - 4y' - 3z' = 0$

とし，ここで $z' = 0$ とする．

$x' = 4,\quad y' = 31,\quad 35x' + 3y' = 4x' + 7y' = 233$ 天式

次ぎに，$y' = 0$ とする．

$x' = 3,\quad z' = 31,\quad 35x' + 10z' = 4x' + 13z' = 415$ 人式

そして，$x' = 0$ とする．

$y' = -3,\quad z' = 4,\quad 3y' + 10z' = 7y' + 13z' = 31$ 地式

s 天位 $+\, t$ 人位 $+\, u$ 地位 ($s,\ t,\ u$：整数) として，

天式＋地式，　天式＋人式，　天式－地式，　天式＋人式＋地式　等を作る．

本文では，天式＋地式，より　$x' = 1,\quad y' = 7,\quad z' = 1$ を得る．

注　松永良弼桃李蹊径術　第１６　では同様に解いている．

第５問　今有桃李杏栗四果折枝而束之只云總束数三十五共枝数一千四百三十九枝又云毎桃毎束三十五枝李毎束三十八枝杏毎束四十二枝栗毎束四十八枝而無奇零問得四果各束

数及変次数術
答曰　変数三十二次
術曰　置總束数三十五以桃束法三十五枝乗之得一千一百二十五枝以減共枝数一千四百三十九枝餘二百一十四寄天位〇置李束法三十八枝内減桃束法三十五枝餘三寄人位〇置杏束法四十二枝内減桃束法三十五枝餘七寄地位〇置杏束法四十二枝内減李束法三十八枝餘四為栗加差〇置栗束法四十八枝内減李束法三十八枝餘一十為杏減差〇杏栗束法差六為李加差而各半之名陽式①　置栗束法四十八枝内減杏束法四十二枝餘倍之得一十二為桃加差與李減差〇置人位倍之得六為杏減差與栗加差而加陽式一十八段遍六除之得数名除式②　假定杏束数而後置天位内減地位餘二百零七以人位除之得六十九為李束数〇於是李束六十九杏束一二和得七十以減總束数三十五餘為桃束数所求共束数多於總束数故李東六十九内減地位九段為李六束又杏束一加人位九段為杏二十八束相併得三十四束以減總束数餘得桃一束也各布算為基式③　列基式加陽式為初行各束数名乾④　乾行加陰式為次行各束数名兌⑤　逐如此以陰陽二式累加或累減之盡桃李束数束数得負為限而求其変次束数合問

桃，李，杏，栗の４種類の果物の枝の総束数３５束，枝数１４３９枝である．桃は１束３５枝，李１束３８枝，杏１束４２枝，栗１束４８枝，整数値になる場合何組あるか．
答え　３２組
術文は，

共枝数 − 総束数 × 桃束法 $= 1439 - 35 \times 35 = 214$　天位

李束法 − 桃束法 $= 38 - 35 = 3$　人位

杏束法 − 桃束法 $= 42 - 35 = 7$　地位

杏束法 − 李束法 $= 42 - 38 = 4$　栗加差

栗束法 − 李束法 $= 48 - 38 = 10$　杏減差

栗束法 − 杏束法 $= 48 - 42 = 6$　李加差

栗加差，杏減差，李加差をそれぞれ半分にする．陽式 ···①

2(栗束法 − 杏束法) $= 2(48 - 42) = 12$　桃加差 李減差

2 人位 $= 6$　杏減差 栗加差

桃加差，李減差，杏減差，栗加差に陽式の１８倍を足し，６で約す．陰式 ···②

仮に，杏束数を１とする．

(天位 − 地位) ÷ 人位 $= (214 - 7) \div 3 = 69$　李束数

李束数 + 杏束数 $= 69 + 1 = 70$

李束数と杏束数の和が総束数より多いので，69 − 地位 × 9 $= 69 - 7 \times 9 = 6$　李束数

1 + 人位 × 9 $= 1 + 3 \times 9 = 28$　杏束数

総束数 − (李束数 + 杏束数) $= 35 - (6 + 28) = 35$　桃束数　基式 ···③

基式 + 陽式　乾式 ···④

乾式 + 陰式　兌式 ···⑤

桃束数，李束数が負になるまで，基式に陽式，陰式を累加，累減して求める結果を得る

	桃束	李束	杏束	栗束
①陽式	0	3	-5	2
②陰式	2	7	-16	7
③基式	1	6	28	0
④乾式	1	9	23	2
⑤兌式	3	16	7	9

解説

桃，李，杏，栗の４種類の果物の束数を，ａ，ｂ，ｃ，ｄとする．

$a+b+c+d=35$

$35a+38b+42c+48d=1439$

術文を概説する．そのため，桃束法（３５），李束法（３８），杏束法（４２），栗束法（４８）をそれぞれ，ｋ，ｌ，ｍ，ｎとする．

$a'+b'+c'+d'=0$

$ka'+lb'+mc'+nd'=0$

とし，$a'=0$ とする．上２式より，

$(m-l)c'+(n-l)d'=0,$

$c'=-(n-l),\ \ d'=m-l,\ \ b'=-c'-d'=n-m,$ とし公約数で約す．

よって $b'=3,\ \ c'=-5,\ \ d'=2$ 陽式

次に，$b'=-a',\ \ c'=-d',$ とする．

$-(l-k)a'+(n-m)d'=0,\ \ a'=n-m,\ \ d'=l-k$

この値を２倍し，$18\times$ 陽式を足し公約数で約す．

$a'=2,\ \ b'=7,\ \ c'=-16,\ \ d'=7$ 陰式

そして，$a',$ を消去する．

$a'+b'+c'+d'=35$

$ka'+lb'+mc'+nd'=1439$

$(l-k)b'+(m-l)c'+(n-l)d'=1439-35l=214$（天位）

ここで $d'=0$ とする．

$3b'+7c'=214,$ を解き $b'=6,\ \ c'=28$ を得る．

$a'=35-(b'+c')=1,$ 基式

基式に陽式，陰式を累加，累減して求める結果を得る．

$a=1+2t\ \ b=6+3s+7t\ \ c=28-5s-16t\ \ d=2s+7t$ $(s,\ t:$整数$)$ とする．

注　術文中の陰式を求めるところで，$a'=n-m,\ \ d'=l-k,$ を２倍し，陽式を１８倍している理由は不明．

s	t	a	b	c	d
-11	4	9	1	19	6
-18	7	15	1	6	13
-6	2	5	2	26	2
-13	5	11	2	13	9
-8	3	7	3	20	5
-15	6	13	3	7	12
-3	1	3	4	27	1
-10	4	9	4	14	8
-17	7	15	4	1	15
-5	2	5	5	21	4
-12	5	11	5	8	11
-7	3	7	6	15	7
-14	6	13	6	2	14
-2	1	3	7	22	3
-9	4	9	7	9	10
-4	2	5	8	16	6
-11	5	11	8	3	13
1	0	1	9	23	2
-6	3	7	9	10	9
-1	1	3	10	17	5
-8	4	9	10	4	12
-3	2	5	11	11	8
2	0	1	12	18	4
-5	3	7	12	5	11
0	1	3	13	12	7
-2	2	5	14	6	10
3	0	1	15	13	6
1	1	3	16	7	9
-1	2	5	17	1	12
4	0	1	18	8	8
2	1	3	19	2	11
5	0	1	21	3	10

参考文献

[1] 加藤平左ェ門著『和算の研究　整数論』日本学術振興会　昭和 39 年

[2] 平山締・内藤淳編集『松永良弼』　松永良弼刊行会　東京法令　昭和 62 年

[3] 日本学士院編『明治前日本数学史』　岩波書店　昭和 29 年～昭和 35 年

[4] 林鶴一著『和算研究集録上巻』 林博士遺著刊行会 東京開成館 昭和 12 年

[5] 米光丁・藤井康生著 『拾璣算法』 平成 11 年