数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 37-47

ピサのレオナルドと3次方程式

神戸大学国際文化学部　三浦伸夫（MIURA　Nobuo）
Faculty of Cross-cultural Studies,
Kobe University

12世紀のピサのレオナルド（1170頃-1240以降）は，その『算板の書』（*Liber abaci*,1202および1228）において西欧で最初にアラビア数字による記数法を体系的に述べ，いわゆる「フィボナッチ数列」に言及した数学者としてよく知られている．彼はまた小著『精華』[1]（*Flos*,1225）で3次方程式を西欧で最初に議論した人物としても重要である．しかしながら彼はその方程式の解は与えたもののその数値解法は述べなかったこともあり，レオナルドの3次方程式に関しては議論されることはあまりなかった[2]．本稿では彼の3次方程式に関する論述をボンコンパーニ編集の『ピサのレオナルド著作集』に基づいて紹介し，あわせて数学史上におけるその意味を考察する．

1．『精華』と3次方程式

『精華』ではいくつかの問題が議論されているが，そのうちの第2番目の問題はパレルモのヨハンネス師が与えた問題であり，「二倍の平方と十倍の根とがひとつに集められて二十になる，ある立方数を見出す」もので，3次方程式に還元できる問題である[3]．それを議論するにあたってレオナルドはまず次のように述べている．

> このことを考察するに際し，私はユークリッド『原論』第十巻に含まれることからこの問題の解が生まれると考え，そのためにこのユークリッド『原論』第十巻を正確に研究し，とくにそのためにその定理を暗記し理解した．またそれ[＝『原論』第十巻]はユークリッド『原論』の前後の若干の巻より難解なので，私は線と面とで論証されている事柄を数に還元して理解し，その第十巻の注釈を始めた[4]

こうして彼は準備として『原論』第10巻に含まれる15種の線分に関する幾何学を数に変換し，

---

[1] 正確な表題は，『数に，そして幾何学に，あるいは両者に関係する，若干の問題の解法についてのピサ出身のビゴッルスのレオナルドの精華』．ここでビゴッルス(bigollus)とは怠け者，浮浪者を意味すると考えられるが，なぜこのような名前がついたかは不明．テクストは次の中に編集されている．B.Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano*, Vol.II, Roma, 1862, cc.227-247．この『精華』はまた現代イタリア語に注釈付きで翻訳されている．Picutti,E., "Il <Flos> di Leonardo Pisano", *Physis* 25(1983), pp.293-387．しかしピクッティは3次方程式に関してはほとんど論じていない．
[2] 多くの数学史書では『精華』の3次方程式の解の「結果」だけを紹介しているにすぎない．ただし，なかにはカントールのように幾分詳しく論じているものもある．M.Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd.2, 1900: rep. New York, 1965, SS.47-48.
[3] 3次方程式を議論した個所は，*Scritit* II, cc.228-234．以下本文では，訳文中の漢数字は原文がローマ数字であることを示す．
[4] *Scritti* II, c.228.

以下のように要約している[5].

15 種の数のうち２つは通約可能数(rite あるいは ratiocinate)と呼ばれ，他の 13 は通約不能数(aloge あるいは inratiocinate)と呼ばれる．これらはギリシア語，ῥητός，ἄλογος の音訳である[6]．それらはさらに以下のように分類される．通約可能数には，まず，「長さと冪において通約可能な数」がある．これは，「数えられる数」であり，また，平方数の根となる数である．すなわち，自然数や単位分数がその例である．次いで，「不言数(numerus surdus)[7]つまり冪においてのみ通約可能な数」がある．すなわち非平方数の根となる数で，その冪のみが数えられる数である．次に，aloge には 13 種ある．まず，中項数(media あるいは simplex)と呼ばれる，非平方数の２重根である．次いであとの６種は二項和（numerorum binomiorum）の根，最後の６種は２項差（numerorum recisorum）の根である．これらは次のように現代的に表記できよう．

通約可能数(riti)

通約可能数(riti)：数と平方において通約可能：a

不言数（surdus）：平方においてのみ通約可能：$\sqrt{a}$

通約不能数(aloge)

中項数(media)：$\sqrt[4]{a}$

６種の二項和の根：$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ など

６種の二項差の根：$\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ など

この後レオナルドは，「この十五種の数とそれらの相違とを私は熱心に考察したので，私は，二倍の平方と立方とで二十になる上述の十の根のうちの一つは決して上記の根とは一致しないことを見出した．以下でそのことが幾何学的に論証される」と述べて，ユークリッド的に図形を用いた論述が始まるのである．

以下のような値の矩形を描き，ここでは求める根（radix）すなわち数を x とおく．

$ab=x$, $bg=10$, $eg=x^3$, $iz=2x^2$

とおくと，

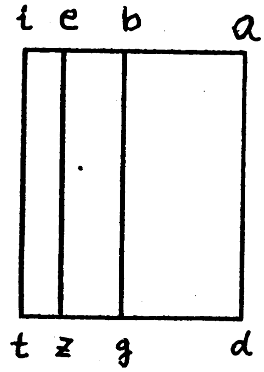
$at=ad\cdot ai=x^3+2x^2+10x=20$

すると，$ab=bg=10$ より

$ai=2$

こうして，ab(=x)が次の６つではないことが，

「もしそうであるなら」ではじまる背理法で証明される．



---

[5] *Scritti* II, c.228. レオナルドはまた『幾何学の実際』，『算板の書』でも『原論』を要約している．レオナルドとユークリッド『原論』の関係については稿を改めて論ずる予定である．

[6] このことはレオナルドが，ギリシア語版『原論』あるいはそれに関連するテクストを利用したことを意味する．

[7] これはアラビア語 aṣamm のラテン語訳．根号記号がないのでそこでは平方根は発音することができないことを意味する．ただしアラビアでは，「不言数」は分母が 11 以上の分数（これもアラビア語では古典的方法では発音できない）や素数を指すこともある．

1．有理数
2．有理数の根
3．有理数の根の根
4．６種の二項和
5．６種の二項差
6．二項和の根または二項差の根

すなわち現代表記するなら，x は，

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$$

ではない，というのである．

以下ではこの証明を順追って紹介する．記述を簡単にするために，a,b が（数において）互いに通約可能であるときを a∩b，a,b が平方において互いに通約可能であるときを $a\cap^2 b$ で示すとする[8]．それらの否定は，∩/，$\cap^2$/で示される．

2．レオナルドの論述

2-1．有理数ではないことの証明

ab を有理数すなわち長さと冪において通約可能な数とおく．

ab＜ai＝２

ところで ab＝有理数とおいたので，ab は整数または分数である．

1）整数とする．

ab<2 より ab=1 となる．すると at=2+1+10=13. ところが at は 20 であったので矛盾．

よって ab は整数ではありえない．

2）分数とする

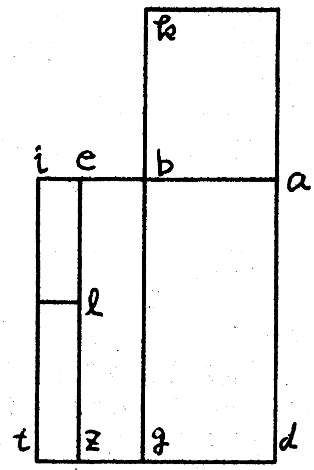
bd は分数または整数．

eg=x は分数の分数の分数．

iz は分数，または分数の分数．

したがって bd が分数であろうと整数であろうとこれら 3 数の和は分数になるが，実際は 20 であり分数ではない．

したがって，ab は分数ではありえない．



2-2．有理数の根ではないことの証明

a,b を有理数の根とし，

$(ab)^2$=bk

とする．

bk・ab=ak

これは ab^3（$=x^3$）に等しい．

よって ka=bz

---

[8] この記号法は，次で用いられた記号法である．中村幸四郎他（訳・解説），『ユークリッド原論』，共立出版，1971, p.510.

ここで『原論』VI[9]より,

$gb/bk=ab/be$

この4数は比例関係にある．また $gb \cap ab$ なので[10],

$ab \cap be$

すなわち，ab は有理数の根と仮定したので，be も有理数の根となる．

また $ab \cap be$ より，

$ab \cap (ab+be)$

すなわち $ab \cap ae$ である．(※)

また $ab \cap^2 ai$.

よって『原論』X[11]より，$ai - ae = ei$ は無理数．

さて，$(ab)^2$ は有理数で，$1/2(et)$.

よって et も有理数．その一辺 ez は 10 で有理数であった．

よって ei も有理数．しかしこれは無理数であった．

ゆえに ab は有理数の根ではありえない[12].

さて，レオナルドは，(※) 以降の別解を次のように与えている．
ae が有理数の根であり，ez は有理数なので，面 de は有理数の根となる．また面 et は有理数．ゆえに,全体の面 di は有理数と無理数とから成立するが,実際は 20 なので不都合(*inconveniens*)である．

2-3．ab が平方根の平方根ではないことの証明

ab をある有理数の平方根の平方根とする．

さらに，

$(ab)^2=bk$

とせよ．

$ab \cdot bk=ka=bz=ab^3=x^3$

よって，$gb/bk=ab/be$.

ab は有理数の平方根の平方根であったので，bk は平方根．

ゆえに，$gb \cap^2 bk$.

すると，$ab \cap^2 be$ となる[13].

---

9 『原論』VI-14 の前半を指す．「お互いに等しくかつ等角な平行四辺形の等しい角をはさむ辺は逆比例する」．『原論』からの引用は，中村幸四郎他（訳・解説），『ユークリッド原論』にもとづく．

10 『原論』X-15 を指す．「もし２つの通約できる量が加えられるならば，全体もそれらの双方と通約できるであろう．そしてもし全体がそれらの一方と通約できるならば，最初の２量も通約できるであろう」．

11 『原論』X-73 を指す．「もし有理線分から全体と平方においてのみ通約できる有理線分が引かれるならば，残りは無理線分である」．

12 与えられた方程式は，$x=(20-2x^2)/(10+x^2)$ になる．ここで，$x=\sqrt{a}$ なら，$\sqrt{a}=(20-2a)/(10+a)$ となり，無理数が有理数と等しくなり矛盾．

13 『原論』X-11 を用いている．「もし四つの量が比例し，第１が第２と通約できるならば，第３も第４と通約できるであろう．そしてもし第１が第２と通約できないならば，第３も第４と

ab は中項線分(media)で be も中項線分となる．
そして ab∩/be.
よって，全体 ae=ab+be は双中項線分(bimedialis)となる．
さらに，

$(ab)^2=1/2(et)=li$

ei は有理線分で，ei∩/le[14].
よって ei は有理数の平方根で，ai∩/ei，ai∩^{2}ei.
よって，ae は余線分である[15].
ところが ae は双中項線分であったが，余線分は双中項線分ではないので，矛盾．

ここでレオナルドは証明を次に進めるために以下のような準備をする．これは『原論』第 10 巻を算術化したものである．

まず，二項和からなる数 B_i の分類である．レオナルドによれば次のようになる．ここで記号□は平方数を示すとする．

	(現代表記)	(性質)	(レオナルドの挙げた例)
B_1	$a+\sqrt{b}$	$a^2-b^2=\square$	$4+\sqrt{7}$
B_2	$\sqrt{a}+b$	$a/(a-b^2)=\square_1/\square_2$	$\sqrt{112}+7$
B_3	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$(a-b)/a=\square_1/\square_2$，$a/b\neq\square_1/\square_2$	$\sqrt{18}+\sqrt{10}$
B_4	$a+\sqrt{b}$	$(a^2-b)/a\neq\square_1/\square_2$	$4+\sqrt{6}$
B_5	$\sqrt{a}+b$	$(a-b^2)/a\neq\square_1/\square_2$	$\sqrt{6}+2$
B_6	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$(a-b)/a\neq\square_1/\square_2$	$\sqrt{8}+\sqrt{5}$

これを『原論』X-54-59 を用いて別の書き方をすると，性質は以下のように表記することもできる．ただし e は任意の有理数とする．

B_1	$\sqrt{(a^2-b^2)}$∩a，a∩e
B_2	$\sqrt{(a^2-b^2)}$∩a，b∩e
B_3	$\sqrt{(a^2-b^2)}$∩a，a∩/e，b∩/e
B_4	$\sqrt{(a^2-b^2)}$∩/a，a∩e
B_5	$\sqrt{(a^2-b^2)}$∩/a，b∩e
B_6	$\sqrt{(a^2-b^2)}$∩/a，a∩/e，b∩/e

さらにこれら６つの２項の平方根 $\sqrt{B_i}$ は順に次のようになる[16].

通約できないであろう」．

14 『原論』X-22 を用いている．「中項線分上の正方形に等しい矩形が有理線分上につくられると，有理でかつ矩形の底辺と長さにおいて通約できない線分を幅とする」．

15 『原論』X-73 を用いている．「もし有理線分から全体と平方においてのみ通約できる有理線分が引かれるならば，残りは無理線分である．それを余線分とよぶ」．

16 ラテン語名はそれぞれ以下のようである．numerus binomialis（二項数），bimedialis prima（第一双中項数），bimedialis secunda（第二双中項数），maior，riti et medium potens)，potens super duos inratiocinatos numeros.

	(性質)	(レオナルドの挙げた例)
$\sqrt{B_1}$	$a \cap {}^2 b$,	
$\sqrt{B_2}$	$a \cap {}^2 b$, $a \cdot b \cap e$	${}_4\sqrt{2} + {}_4\sqrt{8}$
$\sqrt{B_3}$	$a \cap {}^2 b$, $a \cdot b \cap / e$	${}_4\sqrt{12} + {}_4\sqrt{3}$
$\sqrt{B_4}$	$a \cap / {}^2 b$, $a \cdot b \cap / e$, $(a+b) \cap e$	$\sqrt{(4+\sqrt{13})} + \sqrt{(4-\sqrt{13})}$
$\sqrt{B_5}$	$a \cap / {}^2 b$, $a \cdot b \cap e$, $(a+b) \cap / e$	$\sqrt{(\sqrt{20}+2)} + \sqrt{(\sqrt{20}-2)}$
$\sqrt{B_6}$	$a \cap / {}^2 b$, $a \cdot b \cap / e$, $(a+b) \cap / e$	$\sqrt{(\sqrt{24}+\sqrt{7})} + \sqrt{(\sqrt{24}-\sqrt{7})}$

ついで余線分$R_i(=u-v)$を挙げる.

R_1	$\sqrt{(u^2-v^2)} \cap u$, $u \cap e$
R_2	$\sqrt{(u^2-v^2)} \cap u$, $v \cap e$
R_3	$\sqrt{(u^2-v^2)} \cap u$, $u \cap / e$, $v \cap / e$
R_4	$\sqrt{(u^2-v^2)} \cap / u$, $u \cap e$
R_5	$\sqrt{(u^2-v^2)} \cap / u$, $v \cap e$
R_6	$\sqrt{(u^2-v^2)} \cap / u$, $u \cap / e$, $v \cap / e$

さらに続けて，その平方根$\sqrt{R_i}$をとる.

$\sqrt{R_1}$	$u \cap {}^2 v$,
$\sqrt{R_2}$	$u \cap {}^2 v$, $u \cdot v \cap e$
$\sqrt{R_3}$	$u \cap {}^2 v$, $u \cdot v \cap / e$
$\sqrt{R_4}$	$u \cap / {}^2 v$, $u \cdot v \cap / e$, $(u+v) \cap e$
$\sqrt{R_5}$	$u \cap / {}^2 v$, $u \cdot v \cap e$, $(u+v) \cap / e$
$\sqrt{R_6}$	$u \cap / {}^2 v$, $u \cdot v \cap / e$, $(u+v) \cap / e$

この準備の後，証明が続く.

2-4．B_i (i=1,…,6) ではないことの証明

(1) $ab=x=B_i$ (i=1,2,4,5) とする.

すなわち，ab=（有理数 bc）+(無理数 ca)
$(ba)^2=bk$ とおく.
$ab \cdot bk=ak$ となり，$ak=bz$ である.
両辺に bd を加えると,

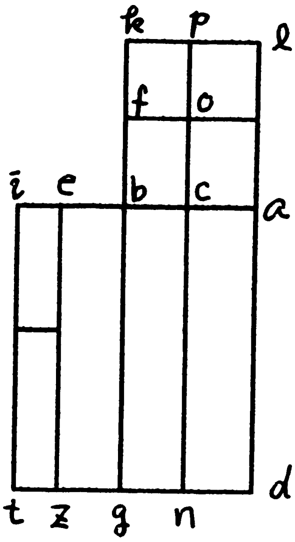
$dk=de$

まず，de=（有理数）+（平方根）をいう.

$(bc)^2+(ca)^2+2 \cdot bc \cdot ca=(ba)^2$

ここで，$(bc)^2$，$(ca)^2$は有理数であるから,
$(bc)^2+(ca)^2=bf$ とすると,

$2 \cdot bc \cdot ca=fk$



bc は有理数なので，fk/ca=2bc より，

　　fk∩ca

ここで dk を次のように四分する．

　　dk＝go+ol+do+ok

gb, bf は有理数なので，gb+bf=gf も有理数．

bc=fo から，fo も有理数．

よって gf・fo=go は有理数．

fk∩ca より，op∩ca.

よって ol も有理数となる[17]．

また，no，of は有理数で，fk∩ca であったので，do∩ok.

no, of は有理数なので，do，ok は互いに通約可能な平方根からなることになる．

そして，ひとつにまとめると，平方根が生じる．

よって，

　　dk＝(go+ol)+(do+ok)＝（有理数）＋（平方根）

dk=de なので，

　　de＝（有理数）＋（平方根）

さらに，et も（有理数）＋（平方根）であることを同様にして証明する．

以上から，di=(de+et)=（有理数）＋（平方根）となり，数 20 ではなくなり，これは矛盾．

よって，ab は（有理数）＋（平方根）からなる４種の二項和（B_1, B_2, B_4, B_5）ではない．

（2）$ab=x=B_i$ とする（i=3,6）．

ab=bc+ca とする

　　dk=db+eg=gk・kl=(gb+bk)・ab

である．よって，dk=de は平方根よりなる．

et=2bk なので，（有理数）＋（平方根）

よって di=de+et は（有理数）＋（平方根）となるが，これは di=20 に矛盾．

以上（1），（2）から，ab は二項和 B_i（i=1,...,6）ではない．

2-5．R_i ではないことの証明

これは２-４と同様の証明でできる（証明略）．

2-6．$\sqrt{B_i}$ でも $\sqrt{R_i}$ でもないことの証明

これは次の６つに分けられて論ぜられる．

(1)　$\sqrt{B_1}$ でも $\sqrt{R_1}$ でないことの証明

　　$ab \neq B_i$，R_i であった．また『原論』[18]より，$\sqrt{B_1}=B_i$，$\sqrt{R_1}=R_i$.

---

[17] 『原論』X-19 を用いている．「長さにおいて通約できる有理線分にかこまれる矩形は有理面積である」．

[18] 『原論』X-54 と『原論』X-91 とを指す．「もし面積が有理線分と第１の二項線分とによって

よって，$ab \neq \sqrt{B_i}$，$\sqrt{R_i}$

(2) $\sqrt{B_2}$でないことの証明

$ab=\sqrt{B_2}$

とする．これは『原論』[19]より，第一双中項余線分である．

$gk=gb+bk=$（有理数）+（平方根）．

また

$gk \cdot kl=dk=de$.

さらに et も（有理数）+（平方根）．

よって $di=de+et$ は（有理数）+（平方根）となり，20にはならず矛盾する．

(3) $\sqrt{B_i}$（i=4,5）でないことの証明

B_i（i=4,5）は（有理数）+（平方根）なので，同様にして示される．

(4) $\sqrt{B_i}$（i=3,6）でないことの証明

$de=gk \cdot kl=$（有理数）+（平方根）．

また $et=$（有理数）+（平方根）．

よって $di=de+et$ は（有理数）+（平方根）となり，$di=20$ に矛盾．

さらに$\sqrt{R_i}$でないことも同様にして証明される．

(5) $\sqrt{R_i}(i=2,4,5)$でないことの証明

$ab=\sqrt{R_i}(i=2,4,5)$のとき，

de は$\sqrt{R_i}(i=2,4,5)$となり，また et は（有理数）+（平方根）である．

よって，di は有理数にはならず，矛盾．

(6) $\sqrt{R_i}(i=3,6)$でないことの証明

同様の証明ができる．

以上で，線分 ab はユークリッドの言及する 15 種の線分にはならないことが証明できた．そこで用いられた証明から，レオナルドはユークリッド『原論』第 10 巻を算術化し，新しい数概念を生み出しつつあったことがうかがえる．この算術化はすでに古代ギリシア末期のヘロンなどにも見られ，アラビアでさらに展開されたものであり[20]，それをレオナルドは受け継いでいるのであろう．ただし証明はいまだギリシア的であり，幾何学を用いていることに注意しておこう．代数学が幾何学にとってかわり，証明の働きをするのはまだ数世紀を待たねばならない．

かこまれるならば，その面積に等しい正方形の辺は二項線分とよばれる無理線分である」．「もし面積が有理線分と第 1 の余線分とによってかこまれるならば，その面積に等しい正方形の辺は余線分である」．

[19] 『原論』X-55 を指す．「もし面積が有理線分と第 2 の二項線分とによってかこまれるならば，その面積に等しい正方形の辺は第 1 の双中項線分とよばれる無理線分である」．

[20] クルツェ編集のアン＝ナイリーズィーによる『原論』注釈では，ヘロンがすでにその路線にいたことを指している．M.Curtze, *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis*, Leipzig,

ところでレオナルドの論述はこれで終わるのではない．さらに続けて次のように述べている．

> そしてこの問題は上記のどれでも解くことができなかったので，私はその解を近似することを学んだ．そして，言及された十個の根のうちのひとつ，すなわち数abは，*unum et minuta XXII et secunda VII et tertia XLII et quarta XXXIII et quinta IIII et sexta XL* であることを見出した[21]

この数値は60進法で記述されており，現代表記すると，1: 22; 7; 42; 33; 4; 40 である．しかしレオナルドはこの解をどのようにして見出したかについては一言も述べていないのである．

3．レオナルドの時代の3次方程式

アラビア世界では9世紀にアル=フワーリズミーが代数学すなわち「ジャブルの学」を確立し，2次方程式の代数的解法と，幾何学的図形による解法すなわち「図解」とを議論した．また他方で，アルキメデス『球と円柱について』第2巻命題4の「与えられた球をひとつの平面で切って，2つの欠球が互いに与えられた比をもつようにすること」が，アラビア世界の代数学の伝統に加わり，$x^2=(c^2/a)y$; $(c-x)y=ab$ の解法に帰結する3次方程式にかかわる問題となった．このような伝統の中でレオナルドの時代には3次方程式は様々な仕方で議論された．それを次のようにまとめておこう（中国は除く）．

（1）．幾何学的解法

先のアルキメデスに由来する3次方程式の問題をアラビア世界で最初に議論したアル=マーハーニーにちなんで，$x^3+a^2b=cx^2$ の問題は「アル=マーハーニーの問題」として知られるようになったが，彼自身は解法を見出せなかった．これ以降，これを含めて3次方程式の解を円錐曲線の交点上に求める幾何学的解法が試みられた．サービト・イブン・クッラ，アル=ハージン，アブル=ジュード・イブン・アル=ライス，アル=クーヒーなどである．それらの成果をまとめたのが有名なアル=ハイヤーミー(1048-1131)である[22]．彼はレオナルドと同じ型の方程式を円と双曲線との交点上に求めている[23]．

（2）．「ホーナーの方法」

アル=ハイヤーミーのあとシャラフ・アッディーン・アッ=トゥースィー(~1213または1214)が，3次方程式の解を，ヴィエトに始まりルフィニ=ホーナーで完成したいわゆる「ホーナーの方法」で見出すことに成功した[24]．後にこの方法はアル=カーシーの時代に一般的となり，彼は6乗根の開法に適用した．

（3）．代数的解法—誤った拡張

ピサのレオナルド以降，彼の方法を踏襲していわゆる「算法学派」がイタリアで形成された．それを担った人物は「算法教師」であり，方程式の代数的解法を互いに競い合った．その伝統の中で後にいわゆるカルダーノとタルターリアの3次方程式をめぐる論争が生じるのである．さてその中でもっとも初期に3次方程式の代数的解法を扱ったのが，レオナルドの一世紀後の

---

21 Scritti, II, c.234.
22 R. Rashed, et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyam mathématicien*, Paris, 1999.
23 R. Rashed, et B. Vahabzadeh, *op.cit.*, pp.186-187.
24 R. Rashed, “Résolution des Équations Numériques et Algèbre: Šaraf-al-Din al-Tūsī, Viète”, *Archive for the History of Exact Sciences* 12(1974), pp.244-290.

1328年に書かれたパオロ・ゲラルディの『諸問題の書』(*Libro di ragioni*)である．しかしそこで彼は3次方程式を誤って2次方程式の解の公式を用いて解いてしまっている[25]．

以上の3次方程式をめぐる解法の伝統を眺めるならば，先に述べたレオナルドの議論は歴史上きわめて特殊であるといえよう．レオナルドを前後した時代においては，代数学は一般的に，学ではなく技法(*ars*)としてしかみなされなかった[26]．実際，中世ラテン世界では代数学は大学では数学の教科対象にもならなかったのである．しかし彼はそれをユークリッド的論証法に基づいて学(*scientia*)と高揚した，しかも独創的な西欧最初の数学者といえるのである．

4．レオナルドと3次方程式

さて，彼はいかにして具体的な解を見出したのであろうか．以上述べた3つのうち可能性があるのはいわゆるホーナーの方法であろう．しかし彼がその方法をアラビアから伝え聞いたということを示す直接間接の証拠はまったく存在しない．また著作には3次方程式を扱ったものは他にはなく，起源に関するこの問題の解決は困難である．ところで以上の方法のほかに可能性としては，レオナルドが絶賛する線形的代数的解法である複式仮定法がある．

複式仮定法自身はすでにアラビア世界で知られており，「2つの誤りの」(*al-khaṭa'ayni*) 方法と言われていた．レオナルドはこれをラテン語に音訳し *elchataieym* と呼び，また *duarum falsarum posicionum regula* とラテン語に意訳して言及することもあった．これは，2つの近似値a,bから，第3のより正確な値yを求める方法である．

ところでレオナルドはこの方法を『算板の書』第13章で詳細に述べている[27]．

$f(x)=c$ において，

$$y=\frac{a\times\left(f(b)-c\right)+b\times\left(c-f(a)\right)}{f(b)-f(a)}$$

彼はこの方法[28]の有効性をはっきりと認識し，「これによってすべての問題が解かれる」とまで言い切っている．

さて，a,bの値をいかにとるかによって解の値は変化するが，グルシコフはこの方法を18回繰り返すことによってレオナルドは3次方程式の近似解に至ったとする[29]．いずれにせよレオナルド自身が用いた3次方程式解法は不明ではあるが，可能性として，ホーナーの方法あるいは複式仮定法が挙げられるのである[30]．ただし彼は解を60進法で記述していることに注意しておこう．レオナルドには『算板の書』に見られるようにいわゆる10進法による分数表記も可能

---

[25] Gherardi, Paolo, *Opera matematica*, Lucca, 1987.

[26] アラビアではアル＝ファーラービー，レオナルド以前のラテン世界ではグンディサルボがそのような見解を持っていた．中世学問分類上における代数学の位置付けに関しては，稿を改めて論ずる予定である．

[27] B.Boncompagni, *Scritti di Leonardo Pisano*, Vol.I, Roma, 1857, cc.318.

[28] この方法は，誤差を加えたり引いたりするので，「増加と減少の規則」(regula augmenti et diminucionis) ともよばれた．*Scritti*, I, c.319.

[29] S.Glushkov, "On Approximation Method of Leonardo Fibonacci", *Historia Mathematica* 3(1976), pp.291-296.

[30] カントールはJ.P.Gramに従って，ホーナーの方法を採用している（ただしそこでは仮定法と述べているが）．Cantor, *op.cit.*, S.48.

であったはずであるが（10進小数表記はまだ知られていない），60進法で記述したことは，彼の方法が 60 進法を用いる天文学に結びついたアラビアの近似計算の伝統につながるものであることをうかがわせる．

『算板の書』や『平方の書』はレオナルドの死後不完全ではあるが受容されイタリア語による要約版も出た．しかしながら『精華』自体はまったく知られることなく—実際，写本は現在ミラノに保存されている 1 点しか残されていない[31]—，したがってレオナルドによる 3 次方程式の議論や近似解法はその後のイタリアの「算法学派」さらには近代西欧数学には影響を与えなかったようである．また他方で，方程式に関する彼の議論は，先行するアラビア数学にも見られなかったものである．その意味で，レオナルドの 3 次方程式解法をめぐる議論は歴史上きわめて独創的であり特異なものであるといえよう．

[31] Codex E. 75P. sup. Biblioteca Ambrosiana, Milano.