数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 48-63

ニュートンと幾何学的精神

— エウクレイデス『ポリスマタ』の復元 —

埼玉県立熊谷女子高等学校　髙橋 秀裕 (Shuyu TAKAHASHI)

Kumagaya Girls' High School

1　はじめに

ニュートンの『自然哲学の数学的諸原理』(通称,『プリーンキピア』) の第3版を編集したヘンリー・ペンバートンは,ニュートンが古代の幾何学者たちに崇敬の念を抱くようになったことを次のように証言している.

> 彼らの眼識や証明形式について, アイザック卿はいつも自分は大いなる賞賛者であると公言しておられた——私は嘗て卿がもっと厳密に彼らを踏襲しなかったとして, 自分自身を責めておられたり, 数学の勉強を始めた頃, … エウクレイデスの『原論』を注意力をもって考察もしないで, デカルトや他の代数学の著者たちの諸著作に取り組んでしまった自己の過ちを後悔しておられるのを聞いたことがある.[*1]

1690年代初頭, ニュートンはギリシャの幾何学的解析の復興のために純粋幾何学の研究に没頭した. 以下の小論は, 古代人の幾何学的解析の痕跡を捜し出す——エウクレイデス『ポリスマタ』の復元など——ニュートンのひたむきさに焦点を当て, 彼の古代ギリシャ数学への畏敬の一端を素描してみたものである.

2　古代ギリシャ数学の研究

2.1　デカルト的代数解析の批判

1670年代中頃から, ニュートンは近代の解析家たちを批判し始めた. 例えば, 1670年代後半に執筆されたとされる論考「古代人の立体軌跡問題の解法」(Solutio Problematis Veterum de Loco solido) の, 解析家たちへのある種の警告的内容をもつ序論「古代人の立体軌跡の復元」(Veterum Loca solida restituta) の中で, ニュートンはデカルト『幾何学』におけるパッポス問題の解法について論評し, 次のように述べている.

> 確かに, 彼ら〔古代人たち〕の方法は, デカルトのそれよりはるかに優美である. というのも, 彼〔デカルト〕は代数計算によって諸結果を達成してい

[*1] H. Pemberton(1728), Preface, [iii].

> るが，それは（古代人たちの著述の仕方を踏襲して）言葉に置き換えてみればわかるように，嫌悪をおぼえるほど冗長でもつれており，理解されそうにもないほどだからである．しかし，彼ら〔古代人たち〕はある単純な比例によってそれを成し遂げており，それは彼らが異なる他の形式で書かれたものは一切読むに値しないと判断し，その結果，自分たちの作図法を見出すのに用いた解析を隠しておいたからである．[*2]

ここでニュートンは，「エウクレイデスもアポロニオスも，そのほか誰も完全には解くことのできなかった問題」を自分が成し遂げたと自慢するデカルトに対し，いわば古代人の権威をもって攻撃を加えているわけである．

1670 年代からニュートンはデカルトの自然哲学（特に，機械論的哲学）に反逆の姿勢を見せ始めたのと並行して，デカルト派の数学に対しても批判的になっていった．実際，ニュートンは再度デカルト『幾何学』のスホーテンによるラテン語訳第 2 版 (1659 年) を精読し，デカルトの数学的誤謬を発見して，その欄外の 8 箇所に「誤謬」(Error)，2 箇所に「承認せず」(non probo)，1 箇所に「不完全」(Imperf)，そして 3 箇所に「幾何学にあらず」(Non Geom[etricum est.]) といった書き込みをしている．また，彼は「デカルト『幾何学』の誤謬」(Errores Cartesij Geometriae) という論考も書き，「〔自ら〕幾何学的と呼んでいるあらゆる曲線がパッポス問題においてすべて役に立つというデカルトの主張は誤りである」と指摘している．

その背景について簡単に見ておこう．

ニュートンは 1672 年秋に光学の講義を終え，翌 1673 年秋には一連の代数学の講義を開始している．[*3] 彼はそのためのいわば新教材を求めて，デカルト『幾何学』を細部に渡って読みなおしたと考えられる．

ニュートンが 1660 年代に初めてデカルト『幾何学』を読んだ時には，ニュートンの注意はデカルトが代数曲線上の点における法線影を作図するための方法を開発し，6 次までの基本的な代数方程式論の簡潔な説明を与えている箇所に集中していた．しかし今度は，彼は主にパッポス問題に関係する第 1 巻の後半と第 2 巻の最初の部分に焦点を合わせた．

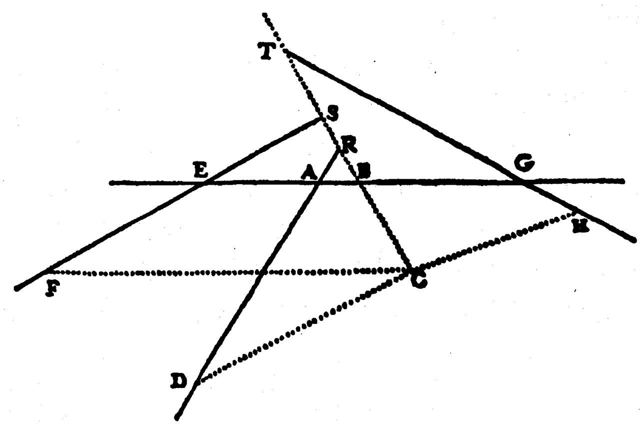

図 1: 点 A を原点として，AB $= x$，CB $= y$ とする．

デカルトは 3 線ないし 4 線軌跡問題の解析的探究において，今日的に言えば，適切な斜交座標 x，y を導入することによって（図 1 参照），軌跡に関す

[*2] *MP*, IV, pp. 276f.

[*3] 提出された 97 回分の講義録の余白に書き込まれた日付から，代数学の講義は 1673 年 10 月から 1683 年までの 11 年間続いたことが知られるが，講義自体すべてが行なわれていたかどうかは疑わしい．これらの講義録は最終的にはウィリアム・ホイストン (William Whiston) によって 1707 年に『普遍算術』(*Arithmetica universalis*) として出版された．

る定義条件がいつも

$$y^2 + 2\alpha xy + \beta x^2 + \gamma y + \delta x = 0$$

という形の方程式で表現されることを提示した．これはただちに円錐曲線の彼の一般方程式に還元可能であるから，彼は一般の 4 線軌跡 (そして 2 本の基線が一致する特別な場合の 3 線軌跡) は一般の円錐曲線であると正確に結論を下したことになる．

しかし，3 線ないし 4 線軌跡と「立体」軌跡とのこのような認識自体は，決して新しいものではなかった．その証明は，エウクレイデスによって彼の失われた『円錐曲線論』のある巻で試みられていた．ところが「エウクレイデスは 3 線と 4 線に関する軌跡の総合をうまく解決していなかった．⋯ というのも，総合は私によって発見された定理なしでは完成され得ないからである」[*4] というアポロニオスの断言を，後にパッポスは批評して自己の『数学集成』に次のような所見を加えていた．

> この 3 線および 4 線の軌跡問題はエウクレイデスによって完全には解かれなかったものであるが，彼〔アポロニオス〕自身も他の誰も，これを解くことができなかったし，エウクレイデスの時代までに円錐曲線について前もって立証されていたことのみによっては，エウクレイデスが書いたことに何一つ加えることもできなかった．[*5]

デカルトは，コンマンディーノ (Federico Commandino, 1509–1572) のラテン語訳でこの箇所を読み，パッポスの言葉をそのまま「エウクレイデスもアポロニオスも，そのほか誰も完全には解くことができなかった」[*6] という意味に受け止めた．[*7] それがもし本当であるなら，古典的な幾何学者の誰もが解決することができなかった問題に，自分自身の解析的方法を効率的にしかも首尾よく適用することができれば，それこそ自己の方法が古代人のものよりも如何に優れたものであるかを断言する絶好のチャンスになる，とデカルトは考えたに相違ない．

結果として，後の数学者はそれほどためらいもなくデカルトの解法に本質的な斬新さを認めたが，ニュートンは，デカルトのこの得意げな主張をそのまま認める気にはならなかった．デカルトは単に軌跡について代数解析的手法を明確に与えただけで，古代人が要求したような厳密な幾何学的作図については何ら提示していないというわけだ．ニュートンはこのような心境を先の「古代人の立体軌跡の復元」の冒頭で,「デカルトは，この問題を彼が成し遂げたことに関して，古代人によってまさに真剣に要求されたことをあたかも自分が達成したかのように大見得をきっている」[*8] と表現している．

[*4] "Apollonius of Perga," in ***Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, II: From Aristarchus to Pappus of Alexandria***, Translated by Ivor Thomas (London, $_3$1993), pp. 275–357. on p. 283.

[*5] ***Mathematical Collection***, Book VII: prefatory remarks on Apollonius' ***Conics***. 引用は，トーマスの英訳．Ivor Thomas, trans.,***Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, I: From Thales to Euclid***(London, $_2$1951), p. 487.

[*6] デカルト (1973)，8 頁．

[*7] コンマンディーノのラテン語版 ***Pappi Alexandrini Collectiones***(Pesaro, 1588) は遺稿出版のためもあり，多くの誤りを含んでいた．バロッツィ(Francesco Barozzi, 1537–1604) が改訂を計ったが出版されるにはいたらなかった．今日ハリー彗星で有名な天文学者エドマンド・ハリーによって，パッポス『数学集成』序論のオリジナルのギリシャ語テクストが公刊されたのは，1706 年のことであった．

[*8] ***MP***, IV, pp. 274f.

30歳代半ばのニュートンは，デカルト『幾何学』からアレクサンドリアの数学者パッポスの『数学集成』に強い関心を移して行く．デカルトと同様に，彼はコンマンディーノのラテン語訳でその第7巻と第8巻を綿密に研究した．それとともにこのようなデカルトに対する反感が，ニュートンの心中に急速に浮かんできたことは確かであろう．そしてその意識の一端が前述の引用文に結びついたと考えられるわけなのである．

ところで，ニュートンが特に深く研究した第7巻「解析のトポス」は，現場の数学者のハンドブックとして，彼らが何らかの問題への解を解析的に決定したり，問題が解を持つかどうか確認したりする際の助けとして参照できるように書かれたものだった．すなわち，第7巻は古代ギリシャ数学の盛期に発展させられた一般に役立つ問題解決技法の貯蔵庫を意味していたのである．[*9]

続いて，ニュートンは『数学集成』の読む範囲を拡大し，パッポスによって第7巻の序論で与えられたエウクレイデス，アリスタイオス，およびアポロニオスの失われた作品の解説に深く興味を持つようになる．特に顕著なのは，エウクレイデス『ポリスマタ』3巻とアポロニオスの『平面軌跡』2巻，『傾斜』2巻，『定量切断』2巻，『接触』2巻であった．例えば，ニュートンはアポロニオスの『接触』と『傾斜』に関する失われた諸巻について論評し，代数的解法と幾何学的解法とを比較している．それらはエウクレイデスの現存する『デドメナ』とアポロニオスの『円錐曲線論』と共に，まさにこの「解析が展開される場所」で扱われていた．

ニュートンにこのようなパッポスの「解析のトポス」を中心とする古代ギリシャ数学研究のきっかけを与えたと推測されるもう一つの重要な要素として，1679年にフランスで出版された次の二つの書物を挙げることができる．すなわち，それらはフェルマーの『数学論文集』(*Varia opera mathematica*) とフィリップ・ド・ラ・イール (Phillipe de la Hire) の『円錐曲線に関する新提要』(*Nouveaux élémens des sections coniques*) である．前者には，アポロニオスの『平面軌跡』に関する論考とエウクレイデスの『ポリスマタ』の五つの命題についてのフェルマーによる再構成が含まれ，後者には立体軌跡に関する論考が含まれていた．実際，ニュートン自身はこれらに直接言及してはいないが，例えば，先の論考「古代人の立体軌跡問題の解法」において詳細に解説された「立体軌跡」に関する一般的な技法は，明らかにフェルマーによって再構成されたアポロニオス『平面軌跡』第2巻の2命題に負っているように思われる．[*10]

いずれにしても，1680年前後にニュートンは少なくとも自発的に古代ギリシャ幾何学の研究に10年以上にもわたって真剣に取り組んだ．1680年以降，ニュートンは決して再びデカルトへのいわば知的恩義に言及することはなかった．そして，彼はデカルト幾何学を「数学に不器用な人たちの解析」と呼ぶことさえしたのである．

[*9]第7巻の表題「解析のトポス」(ὸ [τόπος] ἀναλυόμενος) は，文字通りには,「トポス」(τόπος) が在り処，猟場を意味することから,「解析が展開される場所」，あるいは「解析を学ぶことができるところ」を意味した．実際，コンマンディーノによって “locus resolutus” と訳され，ヒースは “Treasury of Analysis”，ヴェルエックは “le champ de l’analyse” と訳している．ニュートンは1694年5月の書簡でデイヴィド・グレゴリーに「古代人の解析が展開される場所は解析の貯蔵庫である」(Locus resolutus veterum est penus Analytica) と述べている．*Corres*, 3, 1961, p.331.

[*10]ホワイトサイドは，以下の幾何学的な論考をその傍証として挙げている．

- 「平面軌跡」(Loca plana)〔命題〕8,〔命題〕〔22〕
- 「古代人の立体軌跡問題の解法」命題12

3　幾何学的流率論の建設

3.1　流率の解析的方法と総合的方法

ニュートンは1670年代から80年代にかけて初期の解析的な流率論の表現を改め，幾何学的な総合的証明をその基礎に据えた，いわば幾何学的流率論の建設へと向かった．彼はデカルト派の代数解析的スタイルの痕跡を拭い去ろうとしたのである．

ニュートンは1710年代後半に，初期の「解析的方法」に対して，自己の新しい方法を「流率とモーメントの総合的方法」と呼んでいる．

> 連続的な流れにおいて増加する量を流量 (fluens) と呼ぶ．流れる速さを流率 (fluxio) と呼ぶ．また，瞬間的な増分をモーメント (momentum) と呼ぶ．そしてこの種の量を扱う方法を流率とモーメントの方法と呼ぶ：この方法は総合的かあるいは解析的かのどちらかである．*11

1670年代初頭にニュートンは流率とモーメントの「解析的方法」から次第に離れ，この「流率とモーメントの総合的方法」へと向かったのである．グィッチャルディーニは，ニュートンのこの姿勢を数学史の最も目を見張る「転換」の一つであると指摘した．*12 ニュートンは，微分積分学という数学史において最も有益な発見の一つに関与した後，それに頼るのを拒否したというわけである．

しかし，ニュートンのいわば解析的流率論（流率とモーメントの解析的方法）は，彼がいわゆる「奇跡の諸年」にデカルト『幾何学』ラテン語版とウォリス『無限算術』の詳細な記述を自分のものとし，それらを拡張することによって発展させたものであった．それを「ニュートンは完全に捨て去った」と主張するとしたら，それはあまりに極端すぎる見方である．ニュートンとデカルト派の伝統との関係は数学においても両義的なのである．

我々は少なくとも，1670年代以降のニュートンは幾何学的な総合的方法と代数解析的な方法を対比させ，前者の後者に対する (数学思想的) 優越性を強調したこと，そして彼がそこに確立しようとした幾何学的流率論の数学スタイルは『プリーンキピア』を記述する数学的言語になった，と主張することは可能であろう．

3.2　幾何学的流率論と無限小

1671–2年，ニュートンは『方法について』*13 に一つの補遺 (addendum) を書いている．その中で，彼は流率法を「もっと自然なアプローチで展開する」として，そこに総合的方法を強調した．「流れの運動による面の生成」に基づいたそのアプローチ自体はすでに『方法について』に現れていたが，そこに幾何学的な総合的証明の方法が採られれば「なお一層理解しやすく華麗になるであろう」というわけである．

ニュートンはこの「補遺」では，代数的表現 (代数式) をその方法の中心に採用せず，流率とモーメントに関する公理をたて，定理，証明といういわゆる幾何学的様式 (mos geometricus) の手順をほぼ踏みながら，時間内に流れる幾何学的図形を用いて議論を展開している．ま

---

*11 *MP*, VIII, pp. 454f.

*12 Guicciardini(1998), p. 315.

*13 『級数と流率の方法について』(*De Methodis Serierum et Fluxionum*, 1670–1671).

さに「補遺」はニュートン流率論の幾何学的試論とみなすことができよう.*14 そして，この「補遺」の成果の大部分が後の未完の論文『曲線の幾何学』(*Geometria curvilinea, ca.* 1680) に結実することになる.

それではニュートンは自己の幾何学的流率論の建設において，初期の流率論を構築する際に決定的な役割を演じた無限小 (infinite parva) を完全に捨て去ろうとしたのであろうか. 17 世紀まで，無限と無限小は数学論文において正式な地位を得ていなかった. それでもウォリスは，無限小の大きさを扱うことに（あたかもそれらが論理的困難を少しも含意していなかったかのように）大きな疑問をもたなかったようである. 彼は不可分者 (indivisibilis) をカヴァリエリが理解したような点，線，面として理解すべきではないということを強調した. むしろ，それらは無限小に取って代わられる必要があると考えたのである. ウォリスと同様バロウによっても，不可分者から無限小への移行は専念して熟考された問題の一つであった. 彼らが不可分者を捨て，結局無限小を採用するようになったのは，無限小の方がしっかりした基礎をより多く提供すると考えたからである.

従来この時代の数学者にとって，いわゆる数学的厳密性，あるいは攻撃のすきを与えないような確実な基礎を樹立するということはそれほど重大な関心事ではなかったということが，さも特徴的な事柄として議論されることがあった. いわば時代の精神として，新方法とそこに導入された概念の利便さがそれらの基礎にかかわる論理的欠陥を相殺してしまったというわけである.

しかし，数学者たちがカヴァリエリの理論を修正しようとしたのは，むしろ彼らが基礎の問題に気を配ったからであり，さらに彼らは不可分者の代わりに無限小を採用することによって不可分者の方法に新しい地位を与えようとしたと考えられるのである.*15

実際，ニュートンが導入した無限小概念は一部の数学者によって注意深く分析されてもいたし，ニュートン自身もこの文脈で無限小の基礎づけの問題を考えていた. ニュートンにとって，無限小の性質をどのように基礎づけるかということは，心配事であるとともに重要な問題でもあった. 1670 年代を境に，ニュートンは確かに新式の無限小算法に関連する数学的方法を忌避したが，それは全面的に無限小を否定しさったわけではけっしてない.*16 彼は可能な限り無限小を直接的に用いない幾何学的スタイルを選びとり，それを運動概念に基づく「流率の幾何学」として確立しようとしたのである.

ニュートンは運動によって生成される無限小量を,「補遺」では「モーメント」,『曲線の幾何学』では「生まれつつある，あるいは消えつつある部分」という概念として扱い，いずれも幾何学的スタイルで議論している.『曲線の幾何学』でニュートンは「最初の比」と「最後の比」という概念を導入した. そして，それは『プリーンキピア』の数学において極めて重要な役割を演じることになった.*17

ところで，ニュートンは自己の数学思想に関わるこのような重要な試みをどうして未完のまま途中で放棄してしまったのだろうか. 残念ながら，それは依然として不明のままであるが，この点についてホワイトサイドは「適当な機会が現れれば，ニュートンは疑いな

*14 詳細な分析は高橋 (1999)，173–194 頁を参照.

*15 17 世紀の数学者は不可分者を無限小と分かつ差異を十分に知っていた. そして，彼らは前者の代わりに後者を用いることに無頓着ではなかった. 実際，第一級の数学者がたとえ不可分者が捨てられ無限小がその代わりに取り上げられたとしても，不可分者の方法の妥当性のことで心配する理由はないと結論したのは，これらの差異について注意深く議論した末のことであった. Cf. Malet(1997), esp. p. 69.

*16 Cf. Lai(1975); Kitcher(1973).

*17 『プリーンキピア』における最初の比と最後の比の理論の考察は，高橋 (1999)，第 5 章を参照.

くより有益な話題の方へ自己のエネルギーを喜んで方向転換しただろう．1680年に執筆されたとする我々の推定年代が正確ならば，その年11月の彗星の突然の出現はそのような関心をそらすものを十分に提供できたであろう」[*18] と指摘している．1680年12月中旬から4箇月間，ニュートンはフラムスティード (John Flamsteed) と活発に手紙の交換をしていることなどから想像するに，彗星の軌道とそれらの物質の性質についての話題がこの時期のニュートンの創造的な活力を完全に独占してしまっていた蓋然性が高い．

いずれにしても『曲線の幾何学』は第2巻の途中で放棄され，公表されることもなかったため，ニュートンの同時代人あるいは後任者に直接影響力を持つことはなかった．しかし，ニュートンが修正した『曲線の幾何学』第1巻，命題3–10の要約は1686年に第2巻第2章の補助定理2として『プリーンキピア』に盛込まれ，それはライプニッツ派との微分積分学発見をめぐる先取権論争において極めて重要な文書となったのである．[*19]

「補遺」や『曲線の幾何学』に代表されるニュートンの幾何学的流率論の建設は，彼の青年期における数学スタイルを大きく転換させるものであった．そして，1670年代後半から1680年代以降のニュートンのいわゆる「古代の知恵」(prisca sapientia) への畏敬の姿勢は，彼の数学スタイルをいわば「デカルト的様式からパッポス的様式へ」と復帰させる大きな要因の一つになったと言えよう．ニュートンのこのような姿勢は1690年代にさらに徹底されることになる．

4 純粋幾何学の研究

4.1 ギリシャの幾何学的解析の復興――『幾何学3巻』序論

1690年代初頭，ニュートンは幾何学に関する自己の見解を実質的な論考の形式で表そうと多くの試みを行っている．この時期，彼の関心は古代の幾何学的解析のいわば「宝庫」を綿密に探検し，それを解釈することに向けられていた．古代人の「失われた解析」への興味・関心が，ニュートンに幾何学の使用を再評価させたのである．しかし，長期にわたるこのような古代の幾何学に関するニュートンの精巧な研究は，これまで数学史家の間でもほとんど知られることがなかった．ホワイトサイドはポーツマス・コレクションの中から乱雑状態にあった多くの資料を抽出し，ニュートンの意図が典型的に現れている草稿中に存在する，実質的内容の断片を苦心してつなぎ合わせた．このようなホワイトサイドの努力により，我々はそれらのうちの主要な草稿を『幾何学3巻』(*Geometriae Libri Tres*)[*20]，および『幾何学2巻』(*Geometriae Libri Duo*)[*21] というタイトルで読むことができる．

これらの著作は執筆年代が1693年頃と推定されているので，[*22] 『プリーンキピア』執

[*18] *MP*, IV, p. 413, note(18).

[*19] 実際，表面上はその『プリーンキピア』の補助定理2は続く諸命題の主張を正当化するために導入されたが，明らかにニュートンが成熟した流率法をここで最初に公表 (1687年7月) したのは，極大・極小および接線の問題を扱うために同時期に現れたライプニッツの「非凡な微分積分学」に対する猛反撃を意図してのものであった．

[*20] *MP*, VII, pp. 248–401.

[*21] *MP*, VII, pp. 402–561.

[*22] ただし，ウェストフォールは，『幾何学2巻』のうち，特に第1巻は記述の内容とその方法からしても，1680年代の『曲線の幾何学』と類似している箇所が多いことから，ホワイトサイドが多くの草稿を一塊りにするかのようにすべて1693年頃に入れてしまっていることも含めて，これらの年代推定に疑問を投げかけている．RSW, p. 381, note(130). 邦訳，I, 523頁．

筆の後，それもニュートンの数学研究にとっては晩年のものに属するが，彼の数学思想の転換を見る上で極めて重要な文献と考えられる．ここでは，主に『幾何学3巻』の序論に触れることによって，ニュートンの古典的な幾何学に向けられた畏敬の一端を垣間見ることにしよう．

解析と総合の定義

ニュートンは『幾何学3巻』序論の冒頭を次のように始めている．

> 総合と解析は，古代の幾何学者の学科と並んで，パッポスによって次のように定義されている．
>
> 「分解」(Resolutio)—すなわち，解析 (Analysis)—とは「求められていることから，あたかもそれが確かめられているかのように見なし,〔順々に〕それから従うものを通して，合成 (compositio) の結果として確かめられている事柄まで行く途 (*via*) である．というのは，分解〔解析〕においては，我々は求められていることを成し遂げられているように仮定し，それが何から従ってくるかを調べ，そしてさらに，出て来たものの前のものを調べ，こうして遡行をおこない既に知られている事柄に我々が達するか，もしくは第一原理の状態を得るまでおこなって行く．そして，このような種類の手順を，逆向きの解法のようにとり，我々は分解〔解析〕と呼んでいるのである．
>
> しかし，合成〔—すなわち，総合 (Synthesis)—〕においては，分解において最後に残されたものを既になされているとし，そこからそこでは前提であったものを帰結とする自然の順序に従って，それらを互いに連結して，我々はついに求められているものの構成〔作図〕に到達する．そして，この方法は合成〔総合〕と呼ばれるのである．[*23]

このようにニュートンは解析と総合の定義について確認をした後，デカルトの確信と同様に,「我々の代数もその表現の仕方という点以外では，彼ら〔古代人たち〕の解析と違わないように見える」と続けるが,「しかし問題の解法は本来総合にある」と自己の見解を述べ始める．ニュートンによれば，古代人たちは問題の解を発見する際に解析が必要であったとしても，解析を用いないで総合によって明確に述べられかつ証明されるような結果に到達するまでは，それは依然として未解決であると考えた.「彼らはこの理由で，Resolutio(resolution) と Solutio(solution) を両者正反対のものとして互いに区別した」とニュートンは言う．パッポスによれば，幾何学者は自らの見解でその解析を仕上げたときには，問題が「分解された」と見なし，解析を用いないでそれを総合する方法に気づいたとき，問題が「解かれた」と見なしたというわけである．そのため，方程式を立てることによる問題の解法は純粋幾何学から除外されるべきである，とニュートンは考えたのである．

総合の威力 (vis compositionis)

確かに，問題が解析なしで解決できるのにそれに頼るのは回りくどい方法である．ニュートンはこのような方法で横道に逸れて失敗に至るのは「人間らしい」(humana) としながが

[*23] *MP*, VII, pp. 248f. もちろん，これはパッポス『数学集成』第7巻の序論における有名な表現を，コンマンディーノのラテン語版からほとんど引用したものである．まだこの時期，その序論のギリシャ語版がハリーによって与えられるまで (1706年)，パッポスの原文テクストは印刷になって現れていないということに注意されたい．

らも，ほとんどすべての問題は「解かれるための自然の方法を持っていて，その発見者は苦労なく解に到達するであろうから，直接的な途からはずれる人がたとえ最終的に我々の目標に到達することができたとしても，幾何学者はより一層熟練していて，彼らよりも少ない労力でより簡単な結論を求めることができる」と古代幾何学者の優越さを強調している．この点について，ニュートンは執拗なまでに次のように述べる．

> 代数の型にはまった方法に従うと，一つの方程式をつくるのに極めて困難をともなってしまうか，あるいは，まったく還元され得ないような問題が数えきれないほど多くある．[*24] しかもそれらの解は，もし誰かがそれに正しい方法で取りかかれば，いとも簡単である．[*25]

このようにニュートンは「その目的が総合にある古代人はしばしば代数に専念している近代人よりももっと単純な結論に到達していた」と考え，総合による問題解決力[*26]を強調しているわけなのである．そして彼は実際にその事例を述べることに話題を移す．

ニュートンは，最初に次のような三つの例を挙げている．

- 三つの与えられた円に接するように，〔もう〕一つの円が描かれるようにすること．
- 形 (species)，すなわち，面積が与えられ，そのかどが三つの与えられた円周上にあるように三角形を作図すること．
- 与えられた角に隣接する辺が，その与えられた角が接する円周上の与えられた点を通るように三角形を作図すること．

ニュートンは代数の確立した方法によって実行すると，第一の例では「4 次元」，一方，後者の二つの例においては，「8 というより 16 あるいは 32 次元の方程式に出会うであろう」と言い，「代数学者はそのような大きな次元の方程式をどう処理するのだろうか」と問題を投げつける．そして，「古代人が導いた例に倣って，これらの問題はたとえ解析を用いなくても解決され，定規とコンパスによって迅速に作図されうる」と主張している．

さらに，ニュートンは円錐曲線の例を挙げて次のように述べている．

> もし，楕円 (あるいは他の円錐曲線) において，4，6，8 あるいはそれ以上の偶数個の辺の直線図形を，互い違いのかどが与えられ，楕円の与えられた点に位置しているという制限付きで内接させる必要があるならば，辺の数が非常に多くなると，問題を代数学だけで解くには人間の一生がいくら長くても十分ということはないであろう．―― しかし，問題は常に定規とコンパスで作図でき，その作図は解析なしでも確実であった．[*27]

そこでニュートンは，「古代人たちは解析を非常に洗練させたにもかかわらず，種々の補助に頼り，解析の困難を減らすための方法に関する様々な書物を著した」として，例え

[*24]ニュートンはここで，そのような問題を従来の代数解析によって還元することが論理的に不可能であると言おうとしているのではなく，そのような還元を首尾よく実行するのは「極端に」困難であると主張したいのである．

[*25]*MP*, VII, pp. 250–253.

[*26]ニュートンは上の引用文の書き出し箇所の欄外に，「総合の威力」(Vis compositionis) と記している．

[*27]*MP*, VII, pp. 254f.

ば，パッポスが「より複雑でわかりにくい諸問題の解析のために極めて巧妙に工夫された集成」(opus artificiosissimus ac perutile ad resolutionem obscuriorum problematum) と呼ぶ「エウクレイデスの『ポリスマタ』全3巻」,「アポロニオスの無数に多くの困難な諸問題が還元されうる，ある単純なタイプの問題である線の切断に関するいくつかの巻」，および「エウクレイデスと他の人たちによる，平面と立体の軌跡に関するいくつかの巻」を，その事例として挙げている．その中でニュートンは次のような指摘をする．

> パッポスの記述は，おそらくエウクレイデスの『ポリスマタ』がそこからいくつか復元されない限り，残りを復元するには十分でない．これらの諸巻の範囲と使用目的がかつて明らかにされたが，諸問題の解に関する「解析の場所」(locus resolutus) の技法を復元することが残されている．[*28]

こうしてニュートンは，エウクレイデスの『ポリスマタ』の失われた巻を復元することに努力を向けようとするのである．

4.2 エウクレイデス『ポリスマタ』の復元

まず「ポリスマタ」($\pi o\rho i\sigma\mu\alpha\tau\alpha$) に関するニュートンの見解を見てみよう．

ニュートンにとっても，ポリスマ〔ポリスマタの単数〕の本性に関する古代人による明確な言明がないので，パッポスがポリスマとして引用している箇所が重要になる．[*29] ニュートンによれば,「ポリスマタとは，その助けによって，解析されるべきものと総合されるべきものとの間の何らかのもの (中名辞) が前提から推測される命題である．推測されるものは，与えられた軌跡かあるいは軌跡の発見と決定に関係する他の与えられたものかのどちらかである．そして，しばしばありのままの真理，すなわち定理である」．これだけではよくわからないので，少々長くなるが，さらにニュートンの説明を見て行こう．

ニュートンは「ポリスマタは問題の状況において仮定されるもの，与えられるものに関しての系 (corollaria) である．そして，解析された事柄を総合および証明する際には，しばしば現在の補助定理に変化する．そのため適切なポリスマタによって進行する解析は，証明を総合するのに通常の代数より適しているということが起こる」とも述べている．続けてニュートンは言う．「ポリスマタは二つの面がある」．すなわち,「〔その二つとは,〕あるものは証明なしの結果の表現である．他方は証明された命題の形式である．第一の方は，実際の作業の間に見出されるし，後者の方は，“解析の場所” で供給される．前者の種類からアルキメデスは『球と円柱について』第1巻で二つの例を与えた．後者の種類の大部分は “解析の場所” を構成する」というわけである．そしてパッポスからの引用の後，次のように結論する．

> したがって，ポリスマタは，その最終目的の理由によっても，またその命題形式に関しても，定理と問題のいずれとも異なっている．[*30]

[*28] *MP*, VII, pp. 258f.

[*29] マホーニィ(1982)，82 頁．

[*30] *MP*, VII, pp. 260–263. 定理のものもあれば，問題のものもあるというのではなく，それらは中間的な性質を持っていた．その結果，ある幾何学者たちはそれらをすべて定理であると見なし，他の幾何学者たちはすべてを問題と見なした．

実際ニュートンは，それらは両方の種類の性質を共有しているので，最終的にはどちらにも容易に変容可能なものと理解した方が実際的であると考えた．彼は「エウクレイデスの『デドメナ』はポリスマタ以外の何ものでもなく，それは発見の単純さの理由によって，“与えられたものども”という名称が好んでつけられた」[*31] とも語り，さらに「『ポリスマタ』全3巻は『デドメナ』の続き以外の何ものでもない」と述べ，このことは「パッポスの第7巻序論で論評されているように，それらの命題の形式から明らかである」とその根拠を指摘している．

そこで「私はコンマンディーノの〔パッポス『数学集成』の〕翻訳における次の例を付け加えよう」と，ニュートンは再び次のようなパッポスの言及を引用している．

> 第7巻の冒頭で(〔『ポリスマタ』〕第1巻のポリスマは) [*32] 次のように述べられている．もし与えられた2点から，位置において与えられた直線〔上の任意の点〕に向かって直線が傾けられ，[*33] その一つが，位置において与えられた〔第2の〕直線から，その上に与えられた点に関して，ある切片を切りとるならば，もう一方の直線も与えられた比をもつ切片を切りとる．… [*34]

引き続き，ニュートンは「これらの命題の意味は，もし私が，パッポスの短くしかも極めて質の悪いテクストを正確に解釈するならば，次のようになる」と述べ，Porisma 1 から Porism. 12 までを列挙している．

Porisma 1 と Porism. 12 は次のようなものである．

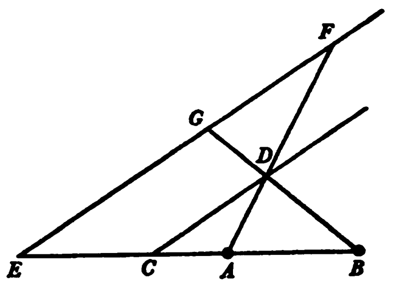

図 2: Porisma 1

Porisma 1.　もし与えられた2点 A，B から，位置において与えられた直線 CD〔上の任意の点 D〕に向かって直線 AD，BD が傾けられ，その一つ AD が，位置において与えられた〔第2の〕直線 EF から，その上に与えられた点 E に関して，位置において与えられた別の直線 CD と与えられた比をもつ切片 EF を切りとるならば，もう一方の直線 BD も同じ CD と与えられた比をもつ切片 EG を切りとる．もちろん，EG と CD は平行となり，点 E，C，A，B は同一直線上にある．[*35]

[*31] 『デドメナ』は『原論』以外のエウクレイデスに帰される著作のうちで最も重要なものである．その中の命題が「もし … が与えられると … もまた与えられる」という形式をとっていることから「与えられたものども」という意味のギリシャ語 $\Delta\varepsilon\delta o\mu\acute{\varepsilon}\nu\alpha$ を表題としている．著作の表題は著者が与えるものではなく，後生の人によって定まるものであった．斎藤憲 (1997)，31–34 頁を参照．

[*32] この括弧付けの挿入語句は，ニュートンの憶測による．

[*33] 「… に向かって傾けられたとせよ」という表現は，「ネウシス（傾斜）」と呼ばれる古代ギリシャの作図法の定型表現である．

[*34] *MP*, VII, pp. 262f. ニュートンは欄外で，「この命題は改悪された前のものの繰り返しであると私は思う」と記している．フルチは，この場合に限り，文章の信頼性に関してニュートンと同様な疑義を投げかけていない．Cf. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, ed. F. Hultsch(Berlin, 1877), Vol.II.

[*35] *MP*, VII, pp. 264f.

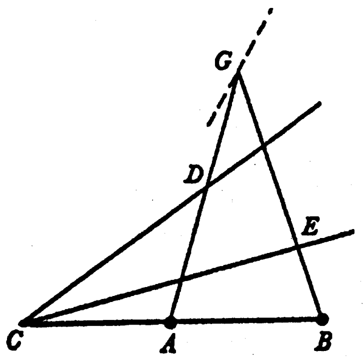

図 3: Porism. 12

Porism. 12. もし2点A，Bから，位置において与えられた2直線CD，CEに，2直線AD，BEが1点Gに集まるように引かれ，しかもCDとCEが与えられた比をもち，点C，A，Bが〔同一〕直線上にあるならば,[*36] 点Gは位置において与えられた直線を描く．

また，直線AB〔上〕に端点をもつ任意の線CD，FEが相互に与えられた比をもつならば，同じ結果が生じる．[*37]

Porism. 12の後で，ニュートンは「実際，この種のポリスマタは第1巻の冒頭にあった．パッポスはそれらのすべてを次の一般的な命題にまとめている」として，次のような命題を挙げている．

> もし，一直線上にある3点A, B, Cから3本の直線が相互に引かれ，互いに点D, E, Fで切りとるとし，交点のうち任意の2点D，Fが位置において与えられた直線DG，FGを描くならば，第3の点Eもまた位置において与えられた直線を描く．点A, B, Cが一直線上になくても，点G, B, Cが一直線上に置かれるならば，同様の命題が有効である．[*38]

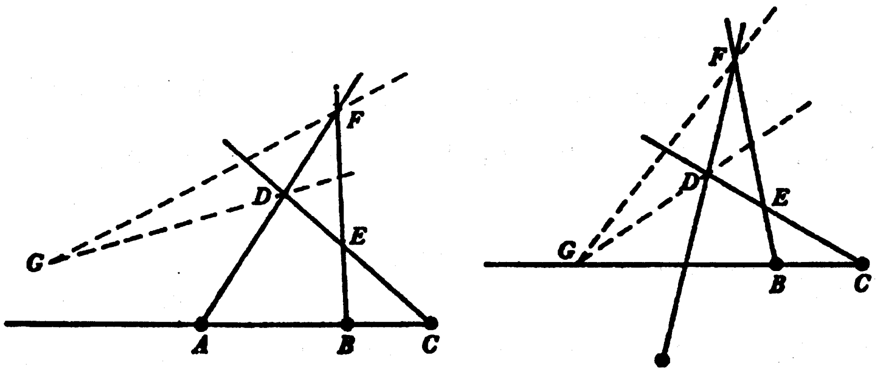

図 4: Porisma 1–12の一般化

しかしながら，ニュートンは「ポリスマタ」のパッポスによる概説を全体的に理解しようとしなかったこと，さらにはニュートンにとって実際に知られていないエウクレイデスの論考の諸命題を復元するということは，明らかな誤謬を生む要因になったことも確かで

[*36]この必要条件が満たされない場合は点Gは点A，B，Cを通る円錐曲線を描く．もちろん，ニュートンはこれに気づいている．Cf. *MP*, VII, p. 266, note(52).

[*37]*MP*, VII, pp. 266f.

[*38]*MP*, VII, pp. 268f.

「ポリスマタ」の作図

ポリスマタの再構成の後，ニュートンは次のように述べている．

> ポリスマタの作図はそれらの証明において明らかになると私は指摘した．
> エウクレイデスの『デドメナ』に，このような問題に関する“平面”の例がある．ここでは，幾つかの例を加えておけば十分であろう．[*40]

そしてニュートンは続いて，Porisma [1′] から Porisma [4′] までを挙げ，それぞれに証明を加えている．そこで序論は終っている．

ここでは Porisma [1′] と Porisma [4′] を以下に紹介するだけにとどめよう．

Porisma [1′]　直線 ABCD が与えられた点 A から引かれ，それが位置において与えられた，共通な点 E に集中している 3 直線 EB，EC，ED と交わるならば，矩形 AB×CD，AC×BD，AD×BC は互いに与えられた比をもつことが証明される．[*41]

証明　点 A から ED に平行に AFG を引き，EB と EC に点 F と G で交わるとし，点 F から EG に平行に FH を引き，AB と点 H で交わるとする．

図形 AFBH と DEBC は相似であるから

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BD}(=\mathrm{AF}:\mathrm{ED})=\mathrm{AH}:\mathrm{CD}$$

したがって，矩形 AB×CD と AH×BD は等しい．

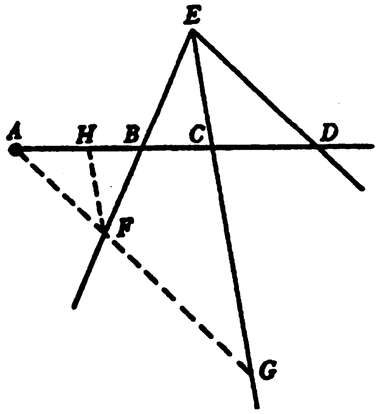

図 5: Porisma [1′]

しかし，矩形 AH×BD と AC×BD の比は AH と AC の比，すなわち，AF と AG の比に等しい．したがって，

$$\mathrm{AB}\times\mathrm{CD}:\mathrm{AC}\times\mathrm{BD}=\mathrm{AF}:\mathrm{AG}$$

一方，AF と AG は与えられているから，その比も与えられている．QED.

[*39] このことは，実際，1706 年にパッポスの『数学集成』第 7 巻序論のギリシャ語テクストを公表することになったハリーにとって，極めて不運なことであった．ニュートンの影響を強く受けていたハリーの「ポリスマタ」に関する見解は，公的には 1723 年『フィロソフィカル・トランザクションズ』において，シムソン (Robert Simson, 1687-1768) によって大打撃を受けることになった．しかし，シムソンからシャール (Michel Chasle, 1793-1880) にいたる数多くの研究にもかかわらず，『ポリスマタ』の数学的内容に関する謎は解かれていないのである．これについては Chasle(1860) がいまだに基本的である．

また，近年のマホーニィの研究によれば，エウクレイデスの『ポリスマタ』は特定の数学問題の解法を第一に目指すものではなく，むしろある数学的情況の与件（データ）の解析のための技法を確立して，その情況によって定まる問題の性格と解の方向性を決めようとするものであった．何よりも『ポリスマタ』は問題分類のために役立つものであったように思われる．問題分類は解析の領域に属するものであった．マホーニィ(1982)，78–87 頁参照．また，ヒースやヴェルエックも，テクストの復元の様々な試みの歴史を含む広範囲な議論を展開している．Cf. Heath(1981), I, pp. 431–438; Pappus of Alexandria(1982), Vol.I, pp. lxxvi–lxxviii.

[*40] *MP*, VII, pp. 268f.

[*41] *MP*, VII, pp. 270f.

同様な議論によって，点AからECとEDに平行線が引かれれば，矩形AB×CDとAD×BC，また，AC×BDとAD×BCは互いに与えられた比にあることが証明されるであろう．Q.E.D.

この証明における作図は，点Aから ED に平行に AFG が引かれること，そして，比 $\frac{AB \times CD}{AC \times BD}$ が，与えられた比 $\frac{AF}{AG}$ と同じにとられることである．残りの比に関しても同様である．

Porisma [4′] 与えられた点A，Bから，位置において与えられた2直線AE，BFが引かれ，それぞれが第3の直線CDと交わるとする．そして，3本の直線がすべて図形ACDBの外に位置する与えられた円に接するとすれば，3つの和AC+CD+DBが与えられる．

逆に，もしそれらの和が与えられるならば，直線CDは与えられた円に接する．[*42]

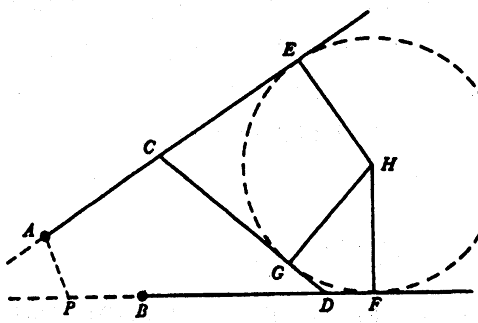

図 6: Porisma [4′]

〔証明〕Cas 1[*43] 円が中心をHとし，3直線AE，BF，CDとE，F，Gで接するように描かれるとせよ．HE，HG，HFが等しいから，CEとCGは等しく，DFとDGも等しくなる．したがって，それらを合わせて，CE+DFはCDに等しくなる．そこで，それぞれにAC+BDを加えれば，AE+BFとAC+CD+DBは等しくなる．ところが，AE+BFは与えられていたから，したがって，AC+CD+DBも与えられる．Q.E.D.

ニュートンが古代人の幾何学的解析の痕跡を捜し出すひたむきさは，ギリシャ人の数学的発見の秘密を理解しようとした彼の1670–80年代の試み以上にさらに徹底したものだった．

4.3 『幾何学3巻』の第1巻，第2巻

序論を終えたニュートンは，次の第1巻で，エウクレイデスの幾何学の内容やパッポスによる古典的な軌跡の分類などについて論じている．前者の前提は機械学に関係するが，それはただ，その基礎である直線と円の正確な作図を仮定しているだけのものから，「立体軌跡」やシッソイド，コンコイド，円積曲線などの複雑な曲線上を運動する直線として分類することなどにも言及している．

また，機械学の役割に関する予備的考察の草稿では，「機械学はその理論的な面ではステイタスは低い」かもしれないが，それはむしろ「すべての源泉であり」，「幾何学においては，その複雑な手細工による諸操作を前提にすることだけが必要である」としたうえで，「機械学が精確に測量することができるならば，幾何学をそこで遂行することが許される」とする．というのも，「幾何学はあらゆる原理によって流れ出るのであり，決して他の方からそれ自身に戻ることはないからである」とニュートンは述べている．そして，続く

[*42] *MP*, VII, pp. 275f.
[*43] Porisma [4′] の証明には Cas 2 もある．

ニュートンの言明は，1680年代以降の彼の数学的活動の基本姿勢から発せられたものと言ってよいであろう．

> もし，最近の幾何学者たちの権威が我々に反対して立ち向かうにしても，しかし古代人の権威の方がもっと偉大である．[*44]

さらに第2巻では，「古代人たちはそれらの作図を前提として，幾何学に直線と円と円錐曲線だけを受け入れた．しかし，彼らはまた，“機械的”曲線もこれらが役に立つことが示されるとして，認めることを何ら忌避することはなかった」という指摘から始まり，ニュートンはエウクレイデスやアポロニオスに基づく様々な軌跡の作図問題を扱い，最後の部分で，古代人たちはそのような軌跡を解析によって発見し，それからそれらの交点によって問題の作図を合成したということについて論じている．

5　おわりに

晩年の研究とはいえ，純粋幾何学研究におけるニュートンの執拗ともいえる技巧的努力の背後に込められたテーマは，一体何だったのだろうか．それは，ギリシャ人たちがニュートンや彼の同時代人にとって有用な，代数的および解析的な技法と同等なものをすでに開発していたということを示そうとしただけではなく，そのことを通じて，自己の数学スタイルを古代ギリシャの数学者，とりわけパッポスの様式に復帰させ，「古代の知恵」を復興させようとした自己の一般的思想傾向とも適合的な数学思想を構築しようとする遠大な試みであったのかもしれない．『幾何学3巻』(1693年頃) と『プリーンキピア』(1687年) では，その執筆年代は前後するが，このような壮大なニュートンの数学思想の流れの中に『プリーンキピア』という大傑作が位置していると思われるのである．

主要参考文献略号

***Corres*, I–VII.** Isaac Newton, *The Correspondence of Isaac Newton*, eds. H. W. Turnbull, J. F. Scott, A. R. Hall and L. Tilling, 7 vols. (Cambridge: Cambridge University Press, 1959–77).

***MP*, I–VIII.** Isaac Newton, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, ed. D. T. Whiteside, 8 vols. (Cambridge: Cambridge University Press, 1967–81).

RSW. R. S. Westfall, *Never at Rest: A Biography of Isaac Newton* (Cambridge: Cambridge University Press, 1980).〔田中一郎・大谷隆昶訳『アイザック・ニュートン』I, II（平凡社，1993年）.〕

[*44] *MP*, VII, p. 342.

参考文献

Chasle, Michel. *Les trois livres de porismes d'Euclide*(Paris, 1860).

Guicciardini, Niccolò. "Did Newton use his calculus in the *Principia* ?," *Centaurus*, **40**(1998), pp. 303–344.

Heath, Sir Thomas. *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. (Oxford, 1921; repr., New York: Dover, 1981).

Kitcher, Philip. "Fluxions, Limits, and Infinite Littleness: A Study of Newton's Presentation of the Calculus," *Isis*, **64**(1973), pp. 33–49.

Lai, Tyrone. "Did Newton Renounce Infinitesimals ?," *Historia Mathematica*, **2**(1975), pp. 127–136.

Malet, Antoni. "Barrow, Wallis, and the Remarking of Seventeenth Century Indivisibles," *Centaurus*, **39**(1997), pp. 67–92.

Pappus of Alexandria. *La Collection Mathématique*, traduite par Paul VerEecke (1933; Paris: A. Blanchard, 1982).

Pemberton, Henry. *A View of Sir Isaac Newton's Philosophy* (London: S. Palmer, 1728).

斎藤 憲 『ユークリッド「原論」の成立——古代の伝承と現代の神話』(東京大学出版会, 1997年).

高橋秀裕 「ニュートン数学思想の形成」(東京大学大学院総合文化研究科博士論文, 1999年).

デカルト, ルネ. 『幾何学』(原 亨吉訳),『デカルト著作集』第1巻 (白水社, 1973年).

マホーニィ, マイケル. 「ギリシアの幾何学的解析のもう一つの見方」(佐々木 力訳), 佐々木力編訳『歴史における数学』(勁草書房, 1982年) 所収, 30–94頁.