数理解析研究所講究録 1257 巻 2002 年 64-75

オイラーの無限解析について

九大・数理学研究院　高瀬正仁（Masahito Takase）
Graduate School of Mathematics
Kyushu Univ.

I．　関数概念の多様性について

1．　19世紀の数学史の調査を進めていく中で次第に大きく浮上してきたのは，関数とは何か，という解析学の根幹をなす問題であった．まず初めにあちこちで遭遇した素朴な疑問をいくつか挙げたいと思う．

アーベルは第一種楕円積分の逆関数に着目し，論文「楕円関数研究」（1827～28年）において，そのような関数の基本的な諸性質（二重周期性など）を書き上げていった．この場合，第一種楕円積分の逆関数はいかなる意味において関数と言いうるのであろうか．また，逆関数という認識が成立する以上，第一種楕円積分はそれ自体がすでに関数でなければならないが，アーベルに先立って楕円積分に楕円関数という名を与えたのはルジャンドルである．では，この命名法はどのような数学的観念に由来するのであろうか．アーベルにもルジャンドルにも関数概念の特別な規定は見られないが，ディリクレの「完全に任意の関数」よりも前の時期のことであり，アーベルやルジャンドルの念頭にあった関数概念を理解するには，おそらくオイラーあたりにさかのぼらなければならないであろうと想像された．

ディリクレはいわゆる「ディリクレの関数」（有理数と無理数に対してそれぞれ異なる定値が対応する関数）に象徴されるような「完全に任意の関数」という概念を提出し，そのような関数を無限三角級数（フーリエ級数）に展開する理論を展開した．リーマンはディリクレの研究を受け，「完全に任意の関数」を対象にして積分の概念を明記した．それはいわゆるリーマン積分と言われるものである．リーマンに先立ってコーシーの解析教程にも同種の積分の概念が見られるが，コーシーが積分の対象として設定した関数はリーマンの関数（すなわちディリクレの「完全に

任意の関数」）とは異なっているように思う．コーシーにはコーシーに固有の関数概念があり，コーシーはそこから出発して独自の解析教程を組み立てたのである．

ところが同じリーマンの論文「アーベル関数の理論」の標題に見られる「アーベル関数」というのは代数関数の積分，すなわち今日通有の用語法によればアーベル積分のことにほかならない．この場面でリーマンが踏襲したのはディリクレの関数ではなく，楕円積分を楕円関数と呼ぶルジャンドルの流儀である．

リーマンのアーベル関数論は一複素変数関数の一般理論に支えられて成立するが，複素関数論の根底を築いたと言われるリーマンの論文「一個の複素変化量の関数の理論の一般理論の基礎」（1951年）に目をやると，今日のいわゆる解析関数の概念規定が登場する．リーマンの議論に追随していくと，リーマンの出発点はオイラーの関数概念のようであり，変化量の変域を複素数域に広げたうえで，独自の観点から限定条件を課していって解析関数の概念に到達する（リーマンはそれを単に「関数」という名で呼んでいる）．この関数はディリクレのいう「完全に任意の関数」とは違うし，「アーベル関数」という場合の関数とも異なっているが，さらに議論の歩を進めていってリーマン面の概念を導入すると，「リーマン面上の関数」に出会う．これはディリクレの関数の延長線上に把握される関数で，「リーマン面から複素数域への（解析性を備えた）一価対応」である．またいわゆる一意化の問題が考察される場面では，リーマン面とリーマン面の間の対応関係，すなわち「抽象的に設定された幾何学的な場と場の間の（等角性を備えた）写像」の概念も現われる．

リーマンの世界では「関数」という言葉は三通りの意味合いで使い分けられているようであり，しかも抽象の度合いが高まるにつれて，次第にディリクレの「完全に任意の関数」が基礎概念の位置を占めていくように思う．「完全に任意の関数」は一般性が高く，多様性を包摂する概念としては都合がよいのであろう．

ラグランジュの著作『解析関数の理論』（1797年）などを参照すると，ラグランジュもまた独自の関数概念をもっていたことがわかる．オイラー，ラグランジュ，ルジャンドル，コーシー，ディリクレ，アーベル，リーマンと（それにガウス，ヤコビ，ヴァイエルシュトラスも），多くの数学者がさまざまな意味合いにおいてそれぞれ関数を語り，ときおり新たな概念規定を提案した．それらは相互によく似てはいるが，同一物とにわかに断定することはためらわれ，「関数」という言葉のかもす全体のイメージは茫洋としてとらえがたい感じがするのは否めないのではある

2． 今日の数学では抽象的な「一価対応」をもって関数と見る流儀が広く行なわれているが，このアイデアの淵源はおそらくディリクレの「完全に任意の関数」であろう．このような極端に抽象的な見地に立脚すれば，それ以前に現われた多種多様な関数概念はたしかにみな等しく関数の名で呼ぶことが可能になるが，その代わり数学者たちが「関数」の名のもとにとらえようとしていた数学的実体の姿は希薄になってしまう．そこで本稿ではオイラーの数学的世界に現われた三通りの関数概念を回想し，無限解析におけるオイラーの構想の解明を試みたいと思う．

Ⅱ． オイラーの三つの関数概念

1． 「関数」という言葉の使用例はライプニッツにさかのぼると言われるが，明確な形で関数概念を規定した最初の人物はオイラーである．いわゆる「オイラーの三部作」，すなわち『無限解析序説』（全二巻．1748年）『微分計算教程』（1755年）『積分計算教程』（全三巻．1768～1770年）はニュートン，ライプニッツ以来の無限小解析を集大成した作品として名高いが，根幹に据えられて全体を支えているのは「関数」の概念であり，関数という基本概念の上に全理論を構成しようとしたところにオイラーの独創が認められるように思う．

具体的に関数概念が登場するのは，三部作全体の序説の位置を占める作品『無限解析序説』の第１章「関数に関する一般的な事柄」の冒頭においてであり，いくつかの定量と一個の変化量とを用いて組み立てられる「解析的表示式」として関数概念が規定されている．オイラーの言葉をそのまま写すと，

> ある変化量の関数というのは，その変化量といくつかの数，すなわち定量を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表示式のことをいう．

とされ，関数の例として，

$$a+3z,\ az-4zz,\ az+b\sqrt{aa-zz},\ c^z$$

などが挙げられた．ここで z はある変化量を表わし，a，b，c はみな定量である．すなわちこれらは「一個の変化量 z の関数」にほかならない．

変化量の個数が増えても状勢は同様に進行し，『無限解析序説』第5章では「いくつかの変化量の関数」というものが規定される．

オイラーの念頭には解析的表示式というもののイメージは明瞭に描かれていたことと思われるが，概念規定は見られないから，書き留められた諸例を通じてかろうじて推測するほかはない．この不備はオイラーの関数概念の曖昧さとしてしばしば指摘される事柄である．

概念規定に続いて，オイラーは関数を代数関数と超越関数に二分した．代数関数というのは，代数的演算，すなわち加減乗除という四演算に「冪根を開く演算」とを併せた基本五演算のみを用いて組み立てられる関数のことである．上記の例で言えば，$a+3z$，$az-4zz$，$az+b\sqrt{aa-zz}$ は代数関数の例である．超越関数というのは，その組み立てにあたって超越的演算，すなわち代数的演算以外の何らかの演算が要請される関数のことであり，c^z はその一例である．ただし超越的演算というものの一般的な概念規定は見られないから，ここでもまた幾分かの曖昧さは免れない．しかしこのような局面で重要なのはオイラーが概念規定の試みを通じてとらえようとしていた数学的実体の姿を理解することなのであり，しばしば出現するある種の曖昧さなどは特に問題にするにはあたらないと思う．

オイラーはさらに代数関数を有理関数と非有理関数に分け，有理関数を整関数と分数関数に分けた．一価関数と多価関数への分類や偶関数と奇関数への分類も提案されているが，これらは別の視点からの分類法である．オイラーが挙げている例で言うと，逆正弦関数 $\arcsin z$ は無限多価関数の一例であり，しかも超越関数でもある．

多価性を有限に限定すると代数関数が認識される．オイラーの記述に追随すると，変化量 z の二価関数というのは，二次方程式

$$Z^2-PZ+Q=0$$

を通じて定められる変化量 Z のことである．ここで P と Q は z の一価関数を表わす．この場合には，根の公式により

$$Z=\frac{1}{2}P\pm\sqrt{\frac{1}{4}P^2-Q}$$

と表示されるから，Z はたしかに代数関数である．同様に，z の三価関数というのは，三次方程式

$$Z^3-PZ^2+QZ-R=0$$

により定められる変化量 Z のことである．ここで P，Q，R は z の一価関数を表わ

す．　多価性の程度を上げてzの四価，五価・・・関数も同様に規定されるが，このように規定される多価関数には代数関数という名を与えるのが真に相応しい．ところがこの本来の意味での代数関数がオイラー自身が規定した意味，すなわち「代数的演算で組み立てられる」という意味においてもなお代数関数でありうるか否かは明らかではなく，ここで新たに困難な問題が発生するのである．

三次と四次の代数方程式はつねに代数的に解けるから，三価関数と四価関数はオイラーの意味において代数関数である．もし代数方程式の根の公式が成立するなら，五価以上の多価性をもつ関数もやはりオイラーの言う代数関数であることになる．それはオイラーの真意の所在を明示する数学的状勢であり，おそらくオイラーはこの言明の可能性を心に描いて，代数方程式の代数的解法を追い求めたのであろう．

超越関数c^zなども例に挙げられてはいるが，それはそれとしてオイラーが解析的表示式という概念でとらえようとしたのは，主としてオイラー自身の言う多価関数，すなわち代数関数だったと見てよいであろう．だが，この試みは失敗し，オイラーは一般の代数方程式の根の公式を発見することはできなかった（存在しないからである）．そのためにオイラーは他の関数概念を提案しなければならなかったのである．

2．　「オイラーの三部作」の第二番目の作品『微分計算教程』（1755年）の序文を参照すると，**第二の関数概念**が目に留まる．

> ある量が他の量に依存しているとして，その依存の様式は，後者の量が変化するなら前者もまた変化を受けるというふうになっているとしよう．このとき前者の量は，後者の量の関数という名で呼ばれる習わしである．この名称はもっとも広く開かれていて，そこには，ある量が他の量を用いて決定される様式がことごとくみな包摂されている．そこで，xは変化量を表わすとすると，どのような仕方でもよいからxに依存する量，すなわちxを用いて定められる量はすべて，xの関数と呼ばれるのである．
>
> （オイラー全集，第Ⅰシリーズ，第10巻，４頁）

この概念規定の守備範囲はきわめて広く，変化量xに依存する量は，その依存の

様式がどのようであってもつねに「xの関数」と呼ぶことにすると言われている．解析的表示式はもとよりこの第二の関数の仲間であり，代数方程式を通じてxに依存する変化量，すなわちxの代数関数もまたこの新たな意味合いにおいてxの関数である．

代数関数を離れて円関数，指数関数，対数関数のような超越関数に移行すると，一般に超越関数はいかなる意味において関数でありうるか，という問題が発生する．オイラーは指数関数c^zを解析的表示式の例に挙げているが，対数関数は指数関数の逆関数として取り上げられていて（『無限解析序説』第一巻，第6章「指数量と対数」），別段，何らかの解析的表示式から出発しているというわけではない．円関数，すなわち正弦，余弦，正接等の三角関数はといえば，これらはまず初めに円の観察を通じて認識される超越的な量として認識されるのであり，出発点は解析的表示式なのではない（『無限解析序説』，第一巻，第8章「円から生じる超越量」）．

指数関数のような単純な表示式を解析的表示式の仲間に入れることにしたとしても，対数関数や円関数をもそのように見るのはむずかしい．しかし第二の広範な関数概念を採用すれば，解析で出会う超越量はことごとくみな関数の範疇におさまるであろう．解析的表示式が代数関数をとらえるための装置であったのに対し，第二の関数概念は，代数関数をも含めて広く超越関数を包摂するために案出された概念上の装置だったのである．具体的な数値計算のためには無限級数展開や無限積展開を使えばよく，連分数展開も有効である．

3．　『無限解析序説』が刊行されたのと同じ1748年には，オイラーは暗々裡にもうひとつの関数概念（年代順で見れば第二番目に数えるのが至当だが，本稿では**第三の関数**と数えることにする）を提出した．それはリーマンの論文「三角級数による関数の表示可能性について」（1854年）の序文で紹介されている関数であり，第二の関数の萌芽と見られる概念である．

このリーマンの論文は全部で13個の節で構成されているが，冒頭の三つの節（第1～3節）には，

「任意に与えられた関数の，三角級数による表示可能性に関する問題の歴史」

という小見出しが附せられて，フーリエ級数論の形成史が回想されている．しかも第1節の標題は，

「オイラーからフーリエまで．1753年のダランベールとベルヌイによる振動弦

の問題の解決の有効性をめぐる論争における問題の起源．オイラー，ダランベール，ラグランジュの見解」

という長大なもので，リーマンの数学史家としての力量をよく示しているように思う．オイラーの第三の関数概念はここに登場する．

オイラーはベルリン学士院紀要の次巻においてこのダランベールの研究を新たに描写して，関数 $f(z)$ が満たさなければならない諸条件の本質を正しく認識したが，これはオイラーの本質的な功績だった．彼は，問題の性質により，弦の運動は，もしある瞬間において弦の形状と各点の速度（したがって y と $\frac{\partial y}{\partial t}$ ）が与えられるならば完全に定められることを注意した．そうしてもしこれらの二つの関数が任意に描かれた曲線を通じて定められる様子を思い浮かべるならば，そのことからつねに，単純な幾何学的構成によりダランベールの関数 $f(z)$ がみいだされることを示した．

（1990年版のリーマン全集，261頁）

ここで言及されているオイラーの論文は「弦の振動について」という標題の論文で，オイラー全集，第IIシリーズ「力学・天文学著作集」（全31巻，32冊），第10巻，63～77頁に収録されている．原論文は1748年のベルリン科学学士院紀要（1750年刊行）69～85頁に掲載されたということで，フランス文で書かれているが，これにはさらにラテン文の原典があり，それを翻訳したものである．その原典はオイラー全集II－10，50～62頁に収録されているが，初出は新学術年報1749年，512～527頁ということである．

オイラーの第三の関数概念では関数値を算出する計算規則は放棄され，与えられているのはただ，ある変化量に対応して定まるもうひとつの変化量という数学的状勢のみにすぎない．この関数は「完全に任意の関数」というディリクレの関数概念の淵源と見られるであろう．さらにもう一歩を踏み込めば，対応関係にあるふたつの量は変化量である必要もなく，「変化しない量」と見て，そのような量の集まりと集まりの間の対応関係が規定されている状勢を思い浮かべてもさしつかえないであろう．あるいはさらに一般化を押し進め，何かしら抽象的な「もの」の集まりの間の対応関係を設定し，ただ一価性のみを要請すれば即座に今日の「一価対応」という関数概念が得られるであろう．

「オイラーの三部作」という形で具体的に組み立てられた解析教程において，オイラーは「変化量とその無限小変分」の範疇を離れたわけではなく，主役は依然として変化量であり続けている．既知の変化量を元手にして新たな変化量を認識する手立てとして関数概念が提案され，第一の関数と第二の関数が語られた．「変化量とその無限小変分」の世界においてなら第二の関数と第三の関数は実質的に同一物であり，1748年の時点で獲得された第三の関数のアイデアを敷衍して，オイラーは1755年の『微分計算教程』の段階で第二の関数概念を明確に述べたのである．

オイラーの関数概念というと1748年の第一の関数（解析的表示式）のみが際立って有名だが，同じ1748年にはすでに第三の関数も現われている．関数というものが要請される場面の特性に応じて，そのつど適合する概念が提案されているわけであり，どの数学的状況もきわめて具象的である．一価対応という今日の抽象的な関数概念は言わば大きな風呂敷のようなもので，何かしら固有の意味がそれ自体に備わっているわけではない．そこには多種多様な具象性が包み込まれていること，真価はそれらの個々の具象にこそあることに注意を喚起したいと思う．

［註記．多変数の解析関数の一般概念は一価対応の範疇にはおさまらない．］

Ⅲ．　曲線と関数

1．　任意に描かれた曲線を関数と見るというオイラーの第三の関数のアイデアは，抽象的な一価対応という関数概念の母胎だが，逆に一価対応としての関数のグラフを描けば，非常に一般的な意味合いにおける曲線が現われる．「関数」という言葉を最初に使用したのはライプニッツと言われているが，ニュートンやライプニッツのころの初期の無限小解析にはオイラーにおけるような関数の概念はまだ存在しなかったという．おそらく初めに究明の対象として設定されたのは曲線それ自体だったのであり，ライプニッツなどは曲線に接線を引いたり，極大点や極小点を決定する方法を探究して微分計算を発見したのであろう．

初めにあったのは曲線であり，曲線には円，楕円，双曲線，放物線のような代数曲線と，サイクロイド，アルキメデスの螺旋（らせん），ベルヌイの対数螺旋のような超越曲線がある．曲線の中には関数がひそんでいて，代数曲線の中には代数関

数がひそんでいる．それを取り出して記述しようとしたのが**解析的表示式**という関数だったのである．それと同様に超越曲線の中には超越関数がひそんでいる．しばらくオイラーの『無限解析序説』第２巻から，関数と曲線の関係をめぐるオイラーの発言を拾いたいと思う．

２．　次に挙げる言葉には，曲線の性質を（第三の）関数に帰着させるという，オイラーの無限解析の根幹をなす考えが表明されている．典拠は『無限解析序説』第２巻，第１章「曲線に関する一般的な事柄」である．

> **多くの曲線が点の連続的な運動により機械的に描かれていき，そのようにして曲線全体が全体として目に見えるように与えられる**ことがある．だが，それはそれとしてここでは主として，**それらの曲線の解析的源泉，すなわちはるかに広範な世界に向かうことを許し，しかも計算を遂行するうえでもずっと便利な源泉を関数と見て，その視点から考察を加えていきたいと思う．**そうするとxの任意の関数はある種の線を与えることになる．その線はまっすぐかもしれないし，曲がっているかもしれない．逆に，曲線を関数に帰着させていくことが可能になる．そこで曲線上の各々の点Mから直線RSに向かって垂線MPを降ろして区間APを作り，それを変化量xで明示することにすることにするとき，そのような状勢のもとでつねに線分MPの長さを表示するxの関数が得られる．曲線の性質はそのようなxの関数を通じて記述されるのである．
>
> （オイラー全集Ｉ－９，８頁）

次の言葉では代数曲線と超越曲線の区分けが語られている．

> このようにして曲線の認識は関数へと帰着されるから，すでに以前目にしたような種々の関数の種類に応じて，それに見合う分だけの種類のいろいろな曲線が存在することになる．そこで関数の分類の仕方に応じて曲線もまた代数曲線と超越曲線へと適切に区分けされる．すなわち，**ある曲線が代数的であるというのは，向軸線yがその切除線xの代数関数であることをいう．**あるい

は，曲線の性質は座標 x と y の間に成立するある代数方程式で表わされるのであるから，この種の曲線は**幾何学的**とも呼ばれる習わしである．他方，**ある曲線が超越的であるというのは，その性質が x と y の間に成立する超越的な方程式で表わされること，言い換えるとその方程式から y が x の超越関数として認識されることをいう**．これが，連続曲線の際立った区分けであり，これにより連続曲線は代数曲線であるか，あるいは超越曲線であるかのいずれかであることになる．

（オイラー全集Ｉ－９，13頁．オイラーの言う「連続曲線」とは，あるひとつの関数のグラフとして描かれる曲線のことである．「向軸線」「切除線」という用語は幾分特異な印象を与えるが，とりあえずそれぞれ直行座標系における x 軸と y 軸のことと理解しておけばよい．）

『無限解析序説』第２巻，第21章には「超越的な曲線」という標題が附されている．次の引用文で語られているのは再度，超越関数の視点から把握された超越曲線である．

これまでのところではわれわれの議論の対象は代数曲線であった．代数曲線には，軸上に任意の切除線を取るとき，それに対応する向軸線が切除線の代数関数を用いて書き表わされるという性質，言い換えると，同じことになるが，切除線と向軸線との間の関係が代数方程式を用いて書き表わされるという性質が備わっている．これよりおのずと明らかになるように，もし向軸線の値が切除線の代数関数として表示されえないなら，その曲線は代数曲線の仲間には数えられない．代数的ではない曲線は超越的と呼ぶ慣わしになっている．それゆえ超越曲線は，**その切除線と向軸線の間の関係が代数方程式では書き表わされないような曲線が超越的と言われる**，という言い方で規定される．したがって**向軸線 y が切除線 x の超越関数と等値される場合，その曲線は超越関数の範疇に算入しなければならない** のである．

（オイラー全集Ｉ－９，287頁）

続いて超越関数の例として対数関数と逆三角関数が挙げられる．それらのグラフを作ると超越曲線が描かれるが，超越曲線，したがって超越関数の範疇ははるかに

広範であることが指摘される.

> 先行する諸節で説明を加えてきたのは主に二種類の超越量である．一方には対数量が包摂され，もう一方には円弧，言い換えると角が包摂されている．それゆえ，もし向軸線 y が切除線 x の対数に等しいか，あるいは，その正弦または余弦または正接が切除線 x で表わされて，$y=\log x$ または $y=\arc\sin x$ または $y=\arc\cos x$ または $y=\arc\tan x$ となるなら，あるいはまたこの種の値が x と y の間の方程式の中に顔を出すだけでもすでに，その曲線は超越的である．これらの曲線はごくわずかな種類の超越曲線にすぎない．実際，これらのほかにもなお，無数の超越的表示式が存在する．それらの出所については無限解析の中で立ち入って説明がなされるであろう．このような次第で，**超越曲線の数は代数曲線の数をはるかに凌駕する** のである．
>
> （オイラー全集Ｉ－９，287頁）

ここに引いたいくつかの引用によりおのずと明らかなように，無限解析におけるオイラーの真意は，曲線それ自体を関数のグラフと見る視点を導入するところに認められる．オイラーは関数から出発し，さまざまな数学的状勢の要請に応えて関数概念の守備範囲を次々と広げていった．そうして関数を対象にして微分計算と積分計算の規則を確立し，無限小計算の体系を作り（『無限解析序説』第１巻），その成果を適用して曲線の諸性質の究明へと向かっていった（『無限解析序説』第２巻）．

３．　オイラーの第三の関数や，そこから抽出されたディリクレの「完全に任意の関数」の概念に見られるように，関数概念に一般化を許していくと変化量の概念は放棄され，関数を主役に据えて解析教程を組み立てなければならない事態に直面する．その場合，微分，積分の対象は変化量ではなくて関数であり，「関数の微分」「関数の積分」という概念に明確に定義を与え，諸定義から出発して理論構成をめざしていくことになる．これは解析教程におけるオイラーの流儀から新たに発生した特異な数学的状勢であり，この要請に応えて，「微積分の厳密化」と言われる複雑な経過が19世紀全般を通じて進行した.

曲線の方面に視線を向けると，円，楕円，双曲線，放物線，サイクロイド，アルキメデスの螺旋（らせん），ベルヌイの対数螺旋のような既知の曲線を対象とする

場合には，接線や弧長など，曲線に固有の量の意味は先天的に定まっている．だが，関数概念が一般化されて関数のグラフを曲線と見るという立場を採用すると，曲線の仲間もまた極端に広がって，接線や弧長の意味も定かではなくなってしまう．そこでここでもまた基本的諸概念の「定義」が要請されることになる．

こうして今日の解析教程に通有の構成様式が提案された．無限小解析はオイラーの三部作の段階で関数概念が登場したが，全体の枠組みは依然として「変化量とその微分」のままであった．オイラーを踏襲したラグランジュやコーシーの解析教程では関数概念が主役の座を占めて，関数の微分，関数の積分の定義が始点になった．この路線はなお伸展し，やがて変化量の概念は完全に消失し，「全く任意の関数」を対象とする今日の解析教程の出現を見た．そうしてその「全く任意の関数」の概念を示唆した最初の人物もまたオイラーである．曲線から関数へ．変化量から関数へ．無限小解析のこの二通りの変容過程の結節点に位置する人物が，同じ一人の数学者オイラーなのであった．

参考文献

1．　高瀬正仁『dxとdyの解析学　オイラーに学ぶ』，平成12年（2000年），日本評論社．

2．　オイラー『オイラーの無限解析』，高瀬正仁（訳），平成13年（2001年），海鳴社．『無限解析序説』第一巻の翻訳書．

【平成13年（2001年）11月30日】