数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 130-141

PRIMITIVE C^*-環上の基本作用素について

東北大学　木村文彦 (Fumihiko Kimura)
Mathematical Institute,
Tohoku Univ.

ABSTRACT. The commutant of the range of an elementary operator gives us important informations on the range itself. In this talk, we shall deal with generalized derivations $\delta_{A,B} : X \mapsto AX - XB$ and elementary multiplications $\chi_{A,B} : X \mapsto AXB$ on primitive C^*-algebras. We shall consider the sum and the product of those operators. Furthermore, we shall characterize the relative commutants of the ranges of $\delta_{A,B}$ and $\chi_{A,B}$.

1. 導入

$\mathfrak{A}$ は単位元 I をもつバナッハ環であるとし, $A, B \in \mathfrak{A}$ に対して, 次のふたつの作用素を定める.

$\delta_{A,B}(X) = AX - XB \quad (X \in \mathfrak{A})$; 一般化微分子,

$\chi_{A,B}(X) = AXB \quad (X \in \mathfrak{A})$; 基本掛け算子.

$\delta_{A,B}$ の全体を $GD(\mathfrak{A})$, $\chi_{A,B}$ の全体を $EM(\mathfrak{A})$ と表す. Barra-Pedersen [1] は次のことを証明した. $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ ($\mathfrak{X}$ はバナッハ空間) のとき,

Theorem BP. ([1, Theorem 5.]) *Let A, B, C, and D be in $\mathcal{B}(\mathfrak{X})$.*

1. *If $A \notin \mathbb{C}I$ and $B \notin \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B} \in GD(\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ if and only if $C = aA + cI$ and $D = -aB + dI$ for some scalars a, c and d ;*
2. *If $A \in \mathbb{C}I$ and $B \notin \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B} \in GD(\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ if and only if $C \in \mathbb{C}I$;*
3. *If $A \notin \mathbb{C}I$ and $B \in \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B} \in GD(\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ if and only if $D \in \mathbb{C}I$;*
4. *If $A \in \mathbb{C}I$ and $B \in \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B}$ is always in $GD(\mathcal{B}(\mathfrak{X}))$.*

Corollary BP. ([1, Corollary 2.]) $(\mathfrak{R}(\delta_{A,B}))'$ *is :*

1. *$\mathbb{C}I$, if $A + B \notin \mathbb{C}I$ or if $A + B \in \mathbb{C}I$ and either $A - B \in \mathbb{C}I \setminus \{0\}$ or $(A - B)^2 \notin \mathbb{C}I$;*
2. *$\mathcal{B}(\mathfrak{X})$, if $A + B \in \mathbb{C}I$ and $A - B = 0$;*
3. *$\{a(A-B)+bI \mid a, b \in \mathbb{C}\}$, if $A+B \in \mathbb{C}I$, $A-B \notin \mathbb{C}I$ and $(A-B)^2 \in \mathbb{C}I$.*

これらは, rank 1 射影 の存在および Hahn-Banach の定理を用いて証明されたものである. 本稿では Kadison transitivity (あるいは $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ における, 環

の弱作用素位相での稠密性) を用いることで, これらの定理が primitive C^*-環においても同様に成立することを中心に解説する.

2. 一般化微分子の積・基本掛け算子の和

本稿では, C^*-環といえばすべて単位元 I をもつものとし, C^*-環 $\mathfrak{A}$ の表現といえば, $*$-準同型 $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ で, $\pi(I) = I_{\mathcal{H}}$ であるものをいう.

Definition 1. C^*-環 $\mathfrak{A}$ が primitive であるとは, $\mathfrak{A}$ の faithful (i.e. one-to-one) な既約表現が存在することをいう (このとき $\pi(\mathfrak{A})$ は, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ で weak operator dense である).

Example 1. C^*-環 $\mathfrak{A}$ は simple であれば primitive である ($\mathfrak{A}$ には, pure state ρ が存在する. ρ による GNS 表現 $(\mathcal{H}_\rho, \pi_\rho, \xi_\rho)$ は既約である. また, $\mathfrak{A}$ が simple であれば, π_ρ は faithful である).

simple C^*-環の例として, つぎのようなものがある.

(i) 行列環, II_1 型因子環, 可分 III 型因子環.

(ii) Cuntz 環.

(iii) UHF 環.

(iv) 無理数回転環.

尚, primitive だが simple ではないような C^*-環も存在する. $\mathcal{K}(\mathcal{H}) + \mathbb{C}I_{\mathcal{H}}$ が簡単な例である.

次の定理については, 例えば [3, pp.331] などを参照されたい.

Kadison transitivity Theorem.

$\mathfrak{A}$ を C^*-環, $\pi : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ を既約表現とする. $\{\eta_1, \cdots, \eta_n\}$ が $\mathcal{H}$ の有限個のベクトル, $\{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$ が $\mathcal{H}$ の一次独立なベクトルであるとき, $\pi(A)\xi_j = \eta_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ を満足する $A \in \mathfrak{A}$ が存在する.

以下, $\mathfrak{A}$ は primitive C^*-環とする. 主結果は次である.

Theorem 1. *Let $A, B, C,$ and D be in $\mathfrak{A}$.*

1. *If $A \notin \mathbb{C}I$ and $B \notin \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B} \in GD(\mathfrak{A})$ if and only if $C = aA + cI$ and $D = -aB + dI$ for some scalars a, c and d ;*
2. *If $A \in \mathbb{C}I$ and $B \notin \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B} \in GD(\mathfrak{A})$ if and only if $C \in \mathbb{C}I$;*
3. *If $A \notin \mathbb{C}I$ and $B \in \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B} \in GD(\mathfrak{A})$ if and only if $D \in \mathbb{C}I$;*
4. *If $A \in \mathbb{C}I$ and $B \in \mathbb{C}I$, then $\delta_{C,D}\delta_{A,B}$ is always in $GD(\mathfrak{A})$.*

Theorem 2. *Let $A, B, C,$ and D be in $\mathfrak{A}$.*

1. *If $A \neq 0$ and $B \neq 0$, then $\chi_{C,D} + \chi_{A,B} \in EM(\mathfrak{A})$ if and only if $C = \alpha A$ for some scalar α or $D = \beta B$ for some scalar β ;*
2. *If $A = 0$ or $B = 0$, then $\chi_{C,D} + \chi_{A,B}$ is always in $EM(\mathfrak{A})$.*

まず, 三つの補題を示す. これらの補題により Theorems 1,2 を見通し良く証明することができる.

Lemma 1. *Let A and B be in $\mathfrak{A}$, then $\chi_{A,B}=0$ if and only if $A=0$ or $B=0$.*

証明：

($\Leftarrow$) は明らか. ($\Rightarrow$) を示す. 仮定より, $AXB=0$ ($\forall X\in\mathfrak{A}$) だから,

$$\pi(A)\pi(X)\pi(B)\xi=0 \quad (\forall X\in\mathfrak{A},\ \forall\xi\in\mathcal{H}). \tag{1}$$

$B\neq 0$ とする. π の単射性より, $\pi(B)\neq 0$. 従ってある $\xi_0\in\mathcal{H}$ に対して, $\pi(B)\xi_0\neq 0$. $\eta\in\mathcal{H}$ を任意に固定する. Kadison transitivity により, $\pi(X_\eta)\pi(B)\xi_0=\eta$ を満足する $X_\eta\in\mathfrak{A}$ が存在する. 従って (1) より,

$$\pi(A)\eta=\pi(A)\pi(X_\eta)\pi(B)\xi_0=0 \quad (\forall\eta\in\mathcal{H}).$$

つまり, $\pi(A)=0$. π の単射性から $A=0$.

□

Lemma 2. *Let A,B,C, and D be in $\mathfrak{A}$, and let $A\neq 0$ and $B\neq 0$. Then $\chi_{C,D}=\chi_{A,B}$ if and only if there exists a nonzero scalar α such that $C=\alpha A$ and $D=\alpha^{-1}B$.*

証明：

($\Leftarrow$) は明らか. ($\Rightarrow$) を示す. $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在して, $C=\alpha A$ となることを示せば十分である (実際このとき, $\chi_{A,B-\alpha D}=0$. 仮定から $A\neq 0$ なので, Lemma 1 より $B=\alpha D$. 従って, $D=\alpha^{-1}B$). さて仮定より,

$$\pi(C)\pi(X)\pi(D)\xi=\pi(A)\pi(X)\pi(B)\xi \quad (\forall X\in\mathfrak{A},\ \forall\xi\in\mathcal{H}). \tag{2}$$

$B\neq 0$ としたので, ある $\xi_0\in\mathcal{H}$ に対して $\pi(B)\xi_0\neq 0$.

Case 1. $\pi(B)\xi_0$ と $\pi(D)\xi_0$ が一次独立である場合：

(2) に ξ_0 を代入して Kadison transitivity を用いれば, $C=A$ を得る. すると上で見たことから, $D=B$. しかしこれは $\pi(B)\xi_0$ と $\pi(D)\xi_0$ が一次独立であるという仮定に反する. つまり Case 1 は起こり得ない. //

Case 2. $\pi(B)\xi_0$ と $\pi(D)\xi_0$ が一次従属である場合：

Case 2-1. $\pi(D)\xi_0=0$ の場合：

(2) より,

$$\pi(A)\pi(X)\pi(B)\xi_0=0 \quad (\forall X\in\mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より $A=0$. これは仮定に反する. //

Case 2-2. $\pi(D)\xi_0\neq 0$ の場合：

$\pi(D)\xi_0=\alpha\pi(B)\xi_0$ ($\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$) と表せる. (2) に代入すると,

$$\pi(A-\alpha C)\pi(X)\pi(B)\xi_0=0 \quad (\forall X\in\mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より, $A=\alpha C$. よって $C=\alpha^{-1}A$. α^{-1} を改めて α とおけば, $C=\alpha A$ が得られる. //

Lemma 3. *Let A and B be in $\mathfrak{A}$, then $\chi_{A,B} \in GD(\mathfrak{A})$ if and only if $A \in \mathbb{C}I$ or $B \in \mathbb{C}I$.*

証明：

($\Leftarrow$) は明らか. ($\Rightarrow$) を示す. $\chi_{A,B} = \delta_{C,D}$ $(C, D \in \mathfrak{A})$ と表されるとする. このとき, $AXB = CX - XD$ $(\forall X \in \mathfrak{A})$ だから,

$$\pi(A)\pi(X)\pi(B)\xi = \pi(C)\pi(X)\xi - \pi(X)\pi(D)\xi \quad (\forall X \in \mathfrak{A},\ \forall \xi \in \mathcal{H}). \tag{3}$$

$B \notin \mathbb{C}I$ であるとする. このとき $\pi(B) \notin \mathbb{C}I_{\mathcal{H}}$. 従って $\xi_0 \in \mathcal{H}$ で, ξ_0 と $\pi(B)\xi_0$ が一次独立であるものが存在する.

このときまず, $C = A + \alpha I$ $(\alpha \in \mathbb{C})$ と表せることを証明する.

Case 1. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0\}$ が一次独立のとき：

(3) に ξ_0 を代入して Kadison transitivity を用いれば, $A = C - I$. つまり, $C = A + I$. //

Case 2. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0\}$ が一次従属のとき：

ξ_0 と $\pi(B)\xi_0$ は一次独立だから, $\pi(D)\xi_0 = \alpha\xi_0 + \beta\pi(B)\xi_0$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ と表せる. (3) に代入すると,

$$\pi(A + \beta I)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = \pi(C - \alpha I)\pi(X)\xi_0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より, $A + \beta I = C - \alpha I$. つまり, $C = A + (\alpha + \beta)I$. //

さて, これより任意の $X \in \mathfrak{A}$ に対して,

$$\begin{aligned} AXB &= CX - XD \\ &= (A + \alpha I)X - XD \\ &= AX - X(D - \alpha I) \end{aligned}$$

だから, $X(D - \alpha I) = AX(I - B)$. つまり,

$$\chi_{I,D-\alpha I} = \chi_{A,I-B}. \tag{4}$$

いま示したいことは, $A \in \mathbb{C}I$ である. $A = 0$ であれば $A \in \mathbb{C}I$ だから, $A \neq 0$ の場合を考える. $B \notin \mathbb{C}I$ としたので, $I - B \neq 0$. (4) と Lemma 2 より, $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して, $I = \gamma A$. よって $A = \gamma^{-1} I \in \mathbb{C}I$.

□

Theorems 1,2 の証明に入る. まずは, Theorem 2 から証明する.

Theorem 2 の証明：

Theorem 2 の 1 の ($\Rightarrow$) を証明する (($\Leftarrow$) および 2 は自明である). $\chi_{C,D} + \chi_{A,B} = \chi_{E,F}$ $(E, F \in \mathfrak{A})$ とする.

$$\pi(C)\pi(X)\pi(D)\xi + \pi(A)\pi(X)\pi(B)\xi = \pi(E)\pi(X)\pi(F)\xi \quad (\forall X \in \mathfrak{A},\ \forall \xi \in \mathcal{H}). \tag{5}$$

Step 1. $E = aA + cC$ $(a, c \in \mathbb{C})$ であることを示す.

仮定から, $B \neq 0$ だから, ある $\xi_0 \in \mathcal{H}$ に対して $\pi(B)\xi_0 \neq 0$.

Case 1. $\{\pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0, \pi(F)\xi_0\}$ が一次独立である場合：

(5) に ξ_0 を代入して Kadison transitivity を用いれば, $E = A + C$ が得られる. //

Case 2. $\{\pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0, \pi(F)\xi_0\}$ が一次従属である場合：

自明でない一次関係式

$$a\pi(B)\xi_0 + b\pi(D)\xi_0 + c\pi(F)\xi_0 = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{C},\ (a, b, c) \neq (0, 0, 0))$$

が成立している. $\pi(B)\xi_0 \neq 0$ だから, b と c のうち少なくとも一方は 0 でない.

Case 2-1. $b \neq 0$ の場合：

$$\pi(D)\xi_0 = -\frac{a}{b}\pi(B)\xi_0 - \frac{c}{b}\pi(F)\xi_0.$$

(5) に代入して整理すると,

$$\pi\left(A - \frac{a}{b}C\right)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = \pi\left(E + \frac{c}{b}C\right)\pi(X)\pi(F)\xi_0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}). \tag{6}$$

Case 2-1-1. $\pi(B)\xi_0$ と $\pi(F)\xi_0$ が一次独立であるとき：

(6) において Kadison transitivity を用いれば, $A - (a/b)C = E + (c/b)C$. すなわち, $E = A - ((a + c)/b)C$. //

Case 2-1-2. $\pi(B)\xi_0$ と $\pi(F)\xi_0$ が一次従属であるとき：

Case 2-1-2-1. $\pi(F)\xi_0 = 0$ の場合：

(6) より,

$$\pi\left(A - \frac{a}{b}C\right)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より, $A = (a/b)C$. $a = 0$ とすると $A \neq 0$ の仮定に反するから, $a \neq 0$. よって $C = (b/a)A$. つまり, この場合は定理の主張が成り立っているので, 考慮から除外してよい. //

Case 2-1-2-2. $\pi(F)\xi_0 \neq 0$ の場合：

$\pi(F)\xi_0 = d\pi(B)\xi_0$ $(d \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ と表せる. (6) に代入して整理すると,

$$\pi\left(A - dE - \frac{a + cd}{b}C\right)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より, $dE = A - ((a + cd)/b)C$. $d \neq 0$ だから, $E = d^{-1}A - ((a + cd)/bd)C$. //

Case 2-2. $c \neq 0$ の場合：

$$\pi(F)\xi_0 = -\frac{a}{c}\pi(B)\xi_0 - \frac{b}{c}\pi(D)\xi_0.$$

(5) に代入して整理すると,

$$\pi\left(C + \frac{b}{c}E\right)\pi(X)\pi(D)\xi_0 + \pi\left(A + \frac{a}{c}E\right)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}). \tag{7}$$

Case 2-2-1. $\pi(B)\xi_0$ と $\pi(D)\xi_0$ が一次独立であるとき：

(7) において Kadison transitivity を用いれば, $C+A+((a+b)/c)E=0$. すなわち, $((a+b)/c)E=-A-C$. $a+b=0$ であれば, $C=-A$ となり, 定理の主張が成り立っている. $a+b\neq 0$ であれば, $E=-(c/(a+b))A-(c/(a+b))C$. //

Case 2-2-2. $\pi(B)\xi_0$ と $\pi(D)\xi_0$ が一次従属であるとき：

Case 2-2-2-1. $\pi(D)\xi_0=0$ の場合：

(7) より,

$$\pi\Big(A+\frac{a}{c}E\Big)\pi(X)\pi(B)\xi_0=0 \quad (\forall X\in\mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より, $A=-(a/c)E$. $A\neq 0$ だから $a\neq 0$ であり, $E=-(c/a)A$. //

Case 2-2-2-2. $\pi(D)\xi_0\neq 0$ の場合：

$\pi(D)\xi_0=d\pi(B)\xi_0$ $(d\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ と表せる. (7) に代入すると,

$$\pi\Big(dC+A+\frac{a+bd}{c}E\Big)\pi(X)\pi(B)\xi_0=0 \quad (\forall X\in\mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より, $dC+A+((a+bd)/c)E=0$. $a+bd=0$ であれば, $dC=-A$ であり, $A\neq 0$ だから ($d\neq 0$ であり), $C=-d^{-1}A$. よって定理の主張が成り立っている. $a+bd\neq 0$ のときは, $E=-(c/(a+bd))A-(cd/(a+bd))C$. //

以上により, 定理の主張が ($C=\alpha A$ として) 成立するか, もしくは $E=aA+cC$ が成り立っていることがわかった.

Step 2. $F=bB+dD$ $(b,d\in\mathbb{C})$ であることを示す.

$\chi_{C,D}+\chi_{A,B}=\chi_{E,F}$ より,

$$CX^*D+AX^*B=EX^*F \quad (\forall X\in\mathfrak{A}),$$
$$D^*XC^*+B^*XA^*=F^*XE^* \quad (\forall X\in\mathfrak{A}).$$

従って,

$$\pi(D^*)\pi(X)\pi(C^*)\xi+\pi(B^*)\pi(X)\pi(A^*)\xi=\pi(F^*)\pi(X)\pi(E^*)\xi \quad (\forall X\in\mathfrak{A},\ \forall\xi\in\mathcal{H}). \tag{8}$$

Step 1 と全く同じ議論をすれば, 定理の主張が ($D=\beta B$ として) 成立するか, もしくは $F=bB+dD$ が成り立つことがわかる.

Step 3.

$E=aA+cC$, $F=bB+dD$ とする.

$$CXD+AXB=(aA+cC)X(bB+dD) \quad (\forall X\in\mathfrak{A}).$$

整理すると,

$$CX\{(1-cd)D-bcB\}=AX\{(ab-1)B+adD\} \quad (\forall X\in\mathfrak{A}). \tag{9}$$

(つまり, $\chi_{C,(1-cd)D-bcB}=\chi_{A,(ab-1)B+adD}$.)

Case 1. $(ab-1)B + adD \neq 0$ の場合：

$A \neq 0$ の仮定と合わせて Lemma 2 を用いると, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が
$C = \alpha A$ であることがわかる. //

Case 2. $(ab-1)B + adD = 0$ の場合：

$ad \neq 0$ であれば, $D = ((1-ab)/ad)B$ となり, 定理の主張が成り立
で $ad = 0$ とする. $a = 0$ または $d = 0$. $a = 0$ とすると, $0 = (ab-1)B$
$-B$. これは $B \neq 0$ の仮定に反する. 従って $d = 0$. (9) に $(ab-1)B+$
$d = 0$ を代入すると,

$$CX(D - bcB) = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

すなわち, $\chi_{C,D-bcB} = 0$ であるから, Lemma 1 より, $C = 0$ もしくは
である. //

以上により, $C = \alpha A$ もしくは $D = \beta B$ となって, 定理の主張
れた.

Theorem 1 を証明するのに先立って, 次の Theorem 3 を証明する
理を経由することで, Theorem 1 の証明が大幅に簡略化される.

Theorem 3. *Let $A, B, C,$ and D be in $\mathfrak{A}$.*

1. *If $A \notin \mathbb{C}I$ and $B \notin \mathbb{C}I$, then $\chi_{C,D} + \chi_{A,B} \in GD(\mathfrak{A})$ if an*
$C = aA + cI$, $D = -a^{-1}B + dI$ for some scalars a, c and d with a

2. *If $A \in \mathbb{C}I$ or $B \in \mathbb{C}I$, then $\chi_{C,D} + \chi_{A,B} \in GD(\mathfrak{A})$ if and only*
or $D \in \mathbb{C}I$.

Theorem 3 の証明：

1 から示そう. ($\Leftarrow$) は容易にわかる. ($\Rightarrow$) を証明する. $\chi_{C,D} +$
$\delta_{E,F}$ $(E, F \in \mathfrak{A})$ とする.

$$CXD + AXB = EX - XF \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

まず, 次が成り立つことから示す.

$$(*) \quad E = \alpha C + A + \beta I \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}).$$

Step 1. $(*)$ の証明：

(10) より,

$$\pi(C)\pi(X)\pi(D)\xi + \pi(A)\pi(X)\pi(B)\xi = \pi(E)\pi(X)\xi - \pi(X)\pi(F)\xi \quad ($$

仮定から, $B \notin \mathbb{C}I$ だから, $\pi(B) \notin \mathbb{C}I_{\mathcal{H}}$. 従って, ある $\xi_0 \in \mathcal{H}$ に対
と $\pi(B)\xi_0$ が一次独立になる.

Case 1. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0, \pi(F)\xi_0\}$ が一次独立である場合：

(11) に ξ_0 を代入し, Kadison transitivity を用いれば, $C + A =$
なわち, $E = C + A + I$. //

Case 2. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0, \pi(F)\xi_0\}$ が一次従属である場合：

自明でない一次関係式

$$\alpha\xi_0 + \beta\pi(B)\xi_0 + \gamma\pi(D)\xi_0 + \delta\pi(F)\xi_0 = 0$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C},\ (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \neq (0,0,0,0))$ が成立している. ξ_0 と $\pi(B)\xi_0$ は一次独立だから, γ と δ のうち少なくとも一方は 0 でない.

Case 2-1. $\gamma \neq 0$ であるとき：

$$\pi(D)\xi_0 = -\frac{\alpha}{\gamma}\xi_0 - \frac{\beta}{\gamma}\pi(B)\xi_0 - \frac{\delta}{\gamma}\pi(F)\xi_0.$$

文字を置き直して,

$$\pi(D)\xi_0 = \alpha\xi_0 + \beta\pi(B)\xi_0 + \gamma\pi(F)\xi_0.$$

これを (11) に代入して整理すると,

$$\pi(\alpha C - E)\pi(X)\xi_0 + \pi(A + \beta C)\pi(X)\pi(B)\xi_0 + \pi(\gamma C + I)\pi(X)\pi(F)\xi_0 = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}). \tag{12}$$

Case 2-1-1. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(F)\xi_0\}$ が一次独立であるとき：

(12) で Kadison transitivity を用いれば,

$$\alpha C - E + A + \beta C + \gamma C + I = 0.$$

つまり, $E = (\alpha + \beta + \gamma)C + A + I$. //

Case 2-1-2. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(F)\xi_0\}$ が一次従属であるとき：

ξ_0 と $\pi(B)\xi_0$ は一次独立だから,

$$\pi(F)\xi_0 = k\xi_0 + l\pi(B)\xi_0 \quad (k, l \in \mathbb{C})$$

と表せる. これを (12) に代入して整理すると,

$$\pi((\alpha+\gamma k)C - E + kI)\pi(X)\xi_0 + \pi(A + (\beta+\gamma l)C + lI)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = 0 \ (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より,

$$(\alpha + \gamma k)C - E + kI + A + (\beta + \gamma l)C + lI = 0.$$

つまり,

$$E = (\alpha + \beta + \gamma(k + l))C + A + (k + l)I.$$

//

Case 2-2. $\delta \neq 0$ であるとき：

$$\pi(F)\xi_0 = -\frac{\alpha}{\delta}\xi_0 - \frac{\beta}{\delta}\pi(B)\xi_0 - \frac{\gamma}{\delta}\pi(D)\xi_0.$$

文字を置き直して,

$$\pi(F)\xi_0 = \alpha\xi_0 + \beta\pi(B)\xi_0 + \gamma\pi(D)\xi_0.$$

これを (11) に代入して整理すると,

$$\pi(C + \gamma I)\pi(X)\pi(D)\xi_0 + \pi(A + \beta I)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = \pi(E - \alpha I)\pi(X)\xi_0 = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

Case 2-2-1. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0\}$ が一次独立であるとき：

(13) で Kadison transitivity を用いれば，$C+\gamma I+A+\beta I=E-\alpha I$. つまり，$E=C+A+(\alpha+\beta+\gamma)I$. //

Case 2-2-2. $\{\xi_0, \pi(B)\xi_0, \pi(D)\xi_0\}$ が一次従属であるとき：

ξ_0 と $\pi(B)\xi_0$ は一次独立だから，

$$\pi(D)\xi_0 = k\xi_0 + l\pi(B)\xi_0 \quad (k, l \in \mathbb{C})$$

と表せる．これを (13) に代入して整理すると，

$$\pi(kC-E+(\alpha+\gamma k)I)\pi(X)\xi_0+\pi(lC+A+(\beta+\gamma l)I)\pi(X)\pi(B)\xi_0 = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

Kadison transitivity より，

$$kC - E + (\alpha + \gamma k)I + lC + A + (\beta + \gamma l)I = 0.$$

つまり，

$$E = (k+l)C + A + (\alpha + \beta + \gamma(k+l))I.$$

//

以上で，まず (*) の証明が終わった．

Step 2.

得られた $E=\alpha C+A+\beta I$ を (10) に代入する．

$$\begin{aligned} CXD + AXB &= (\alpha C + A + \beta I)X - XF \\ &= \alpha CX + AX + \beta X - XF. \end{aligned}$$

整理して，

$$CX(D-\alpha I) + AX(B-I) = X(\beta I - F) \quad (\forall X \in \mathfrak{A}). \qquad (14)$$

つまり，$\chi_{C,D-\alpha I} + \chi_{A,B-I} = \chi_{I,\beta I-F} \in EM(\mathfrak{A})$. 仮定から，$A \neq 0$, $B \neq I$ であるので，Theorem 2 より，$C = \gamma A$ ($\gamma \in \mathbb{C}$) もしくは，$D - \alpha I = \delta(B - I)$ ($\delta \in \mathbb{C}$) が成立する．

Case 1. $C = \gamma A$ である場合：

(14) に代入して整理すると，

$$AX\{\gamma(D-\alpha I) + B - I\} = X(\beta I - F) \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

つまり，$\chi_{A,\gamma(D-\alpha I)+B-I} = \chi_{I,\beta I-F}$.

Case 1-1. $F = \beta I$ である場合：

$\chi_{A,\gamma(D-\alpha I)+B-I} = 0$. $A \neq 0$ および Lemma 1 から，$\gamma(D-\alpha I)+B-I=0$. $B \neq I$ より，$\gamma \neq 0$ であり，$D = -\gamma^{-1}B + (\alpha+\gamma^{-1})I$. //

Case 1-2. $F \neq \beta I$ である場合：

Lemma 2 より，$\epsilon \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ が存在して，$A = \epsilon I \in \mathbb{C}I$. これは仮定に矛盾するので，この case は起こらない．//

Case 2. $D - \alpha I = \delta(B - I)$ である場合：

このときまず，$D = \delta B + (\alpha - \delta)I$.

(14) に代入して整理すると，

$$(\delta C + A)X(B - I) = X(\beta I - F) \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

つまり，$\chi_{\delta C+A,B-I} = \chi_{I,\beta I-F}$.

Case 2-1. $F = \beta I$ である場合：

$\chi_{\delta C+A,B-I} = 0$. $B \neq 0$ および Lemma 1 から，$\delta C + A = 0$. $A \neq 0$ より $\delta \neq 0$ であって，$C = -\delta^{-1}A$. //

Case 2-2. $F \neq \beta I$ である場合：

Lemma 2 より，$\epsilon \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して，$\delta C + A = \epsilon I$. $A \notin \mathbb{C}I$ だから $\delta \neq 0$ であって，$C = -\delta^{-1}A + \delta^{-1}\epsilon I$. //

以上で，1 の ($\Rightarrow$) の証明を終わる．

2 の ($\Leftarrow$) は容易である．2 の ($\Rightarrow$) を証明する．

$A = aI$ ($a \in \mathbb{C}$) であるとする．$\chi_{C,D} + \chi_{A,B} = \delta_{E,F}$ ($E, F \in \mathfrak{A}$) とすると，

$$CXD = EX - X(F + aB) \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

つまり，$\chi_{C,D} = \delta_{E,F+aB} \in GD(\mathfrak{A})$. Lemma 3 より，$C \in \mathbb{C}I$ もしくは $D \in \mathbb{C}I$.

$B = bI$ ($b \in \mathbb{C}$) とした場合も同様である．

以上で，Theorem 3 の証明をすべて終わる．

□

Theorem 1 の証明：

4 および，1-3 の ($\Leftarrow$) は計算すればすぐにわかる．

いま，$\delta_{C,D}\delta_{A,B} = \delta_{E,F}$ ($E, F \in \mathfrak{A}$) だとする．

$$CAX - CXB - AXD + XBD = EX - XF,$$

$$CXB + AXD = (CA - E)X - X(-BD - F) \quad (\forall X \in \mathfrak{A}).$$

つまり，$\chi_{C,B} + \chi_{A,D} = \delta_{CA-E,-BD-F} \in GD(\mathfrak{A})$.

2 の ($\Rightarrow$)：

Theorem 3 の 2 より，$C \in \mathbb{C}I$. //

3 の ($\Rightarrow$)：

同様に，$D \in \mathbb{C}I$. //

1 の ($\Rightarrow$)：

$D \in \mathbb{C}I$ の場合，Theorem 3 の 2 より，$C \in \mathbb{C}I$. よって ($a = 0$ として) 定理の主張が成り立つ．

$D \notin \mathbb{C}I$ の場合，Theorem 3 の 1 より，

$$C = aA + cI, \ B = -a^{-1}D + dI.$$

従って，$D = -aB + adI$ となり，定理の主張が成り立つ．//

3. 一般化微分子および基本掛け算子の値域の可換子環

以上の定理 (および補題) のひとつの応用として, $\chi_{A,B}$ および $\delta_{A,B}$ の値域の relative commutant を計算する.

まず, $\chi_{A,B}$ について, その値域の relative commutant

$$(\mathfrak{R}(\chi_{A,B}))' \cap \mathfrak{A} = \{C \in \mathfrak{A} \mid CY = YC \ (\forall Y \in \mathfrak{R}(\chi_{A,B}))\}$$

を計算できる.

Corollary 1. *Let $\mathfrak{A}$ be a primitive C^*-algebra and let A and B be in $\mathfrak{A}$, then $(\mathfrak{R}(\chi_{A,B}))' \cap \mathfrak{A}$ is :*

1. $(\ker R_A \cap \ker L_B) + \mathbb{C}I$, *if $A \neq 0$ and $B \neq 0$;*
2. $\mathfrak{A}$, *if $A = 0$ or $B = 0$.*

Especially, if A be right-invertible and $B \neq 0$ or if B is left-invertible and $A \neq 0$, then $(\mathfrak{R}(\chi_{A,B}))' = \mathbb{C}I$.

証明：

2 は trivial. 1 を証明する. まず最初に,

$$C \in (\mathfrak{R}(\chi_{A,B}))' \cap \mathfrak{A} \Leftrightarrow \chi_{CA,B} = \chi_{A,BC}$$

であることに注意する. $C \in (\mathfrak{R}(\chi_{A,B}))' \cap \mathfrak{A}$ とせよ.

Case 1. $BC = 0$ である場合：

$C \in \ker L_B$. また, $\chi_{CA,B} = \chi_{A,BC} = 0$ であり, $B \neq 0$ だから, Lemma 1 より, $CA = 0$. つまり $C \in \ker R_A$. 従って, $C \in \ker R_A \cap \ker L_B$. //

Case 2. $BC \neq 0$ である場合：

$A \neq 0$ と合わせて Lemma 2 より, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ が存在して, $CA = \alpha A$ かつ $B = \alpha^{-1}BC$. よって, $C - \alpha I \in \ker R_A \cap \ker L_B$. //

故に, $(\mathfrak{R}(\chi_{A,B}))' \cap \mathfrak{A} \subseteq (\ker R_A \cap \ker L_B) + \mathbb{C}I$. 逆向きの包含関係は, 容易にわかる.

□

$\delta_{A,B}$ について, その値域の relative commutant

$$(\mathfrak{R}(\delta_{A,B}))' \cap \mathfrak{A} = \{C \in \mathfrak{A} \mid CY = YC \ (\forall Y \in \mathfrak{R}(\delta_{A,B}))\}$$

も計算できる (次の Corollary 2 の証明は, primitive C^*-環の中心が trivial であることを用いる以外, Barraa-Pedersen [1, Corollary 2] によるものと全く同じであるので, 省略する.)

Corollary 2. *Let $\mathfrak{A}$ be a primitive C^*-algebra and let A and B be in $\mathfrak{A}$, then $(\mathfrak{R}(\delta_{A,B}))' \cap \mathfrak{A}$ is :*

1. $\mathbb{C}I$, *if $A + B \notin \mathbb{C}I$ or if $A + B \in \mathbb{C}I$ and either $A - B \in \mathbb{C}I \setminus \{0\}$ or $(A - B)^2 \notin \mathbb{C}I$;*

2. $\mathfrak{A}$, *if* $A+B \in \mathbb{C}I$ *and* $A-B=0$;
3. $\{a(A-B)+bI \mid a,b \in \mathbb{C}\}$, *if* $A+B \in \mathbb{C}I$, $A-B \notin \mathbb{C}I$ *and* $(A-B)^2 \in \mathbb{C}I$.

REFERENCES

[1] M. Barraa and S. Pedersen, *On the product of two generalized derivations*, Proc. Amer. Math. Soc., **127** (1999), pp. 2679–2683.

[2] L. A. Fialkow, *A note on the range of the operator* $X \to AX - XB$, Illinois J. Math., **25** (1981), pp. 112–124.

[3] R. V. Kadison and J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, Volume I.

[4] F. Kimura, *Range commutants of elementary operators on primitive* C^**-algebras*, preprint.

[5] M. Mathieu, *Elementary operators on prime* C^**-algebras, I*, Math. Ann., **284** (1989), pp. 223–244.

[6] ———, *Elementary operators on prime* C^**-algebras, II*, Glasgow Math. J., **30** (1988), pp. 275–284.

[7] J. P. Williams, *On the range of a derivation*, Pacific J. Math., **38** (1971), pp. 273–279.