数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 14-22

Löwner-Heinz の不等式についての一注意

不二越工業高等学校 中村 登 (Noboru Nakamura)
元富山大学 泉野 佐一 (Saichi Izumino)

1. Löwner-Heinz の不等式とその一証明

$A, B \in B(H)$ を Hilbert 空間 H 上の (有界線形) 作用素とする. Löwner-Heinz の不等式は

(LH) $0 \leq A \leq B$ ならば $A^p \leq B^p \quad \forall p \in [0,1]$

というものであり, この拡張としての Furuta 不等式 (例えば [8]) はよく知られている. 本講演では, これの作用素平均 (operator mean) を用いた一証明及び, これに関連した事柄について 2, 3 述べたい.

さて (LH) の証明であるが Löwner [14], Heinz [10] 以来多くの証明が示されているが, 特に有名なものとして

•Pedersen [17] の証明 —— がある. これは spectral radius $r(\cdot)$ を用いる方法で, これの次の性質:

(i) $r(AB) = r(BA)$

(ii) $r(A) \leq \|A\|$, 特に $A = A^*$ ならば $r(A) = \|A\|$

を使うものである. 彼の証明は実質的には, $p = 1/2$ の場合を示したもの:

(LH2) $0 \leq A \leq B$ ならば $A^{1/2} \leq B^{1/2}$

の証明である. つまり

$$\text{(LH)} \iff \text{(LH2)} \quad \text{(同等の命題)}$$

ということである. (LH2) を繰り返し用いて

$$p = k/2^n, n = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, \ldots, 2^n - 1$$

に対して (LH) が成り立つことを示し, さらに $p \mapsto A^p - B^p$ のノルム連続性を用いて, すべての $p \in [0,1]$ について (LH) が成り立つことを示すことになる. (LH2) $\Longrightarrow$ (LH) のこの手法は [11] ([7], [15], [18], etc.) などに述べられているものである. なお, Furuta text book [9] によれば, 次もい

$$\text{(LH2)} \iff \|A^{1/2}B^{1/2}\| \le \|AB\|^{1/2} \quad \text{for} \quad A,\ B \ge 0.$$

(LH) のいま一つの証明として注目されるものとして
●Ando の幾何平均 (geometric mean) を用いる証明 —— がある. Ando lecture note [1] では $A, B \ge 0$ に対してこれの幾何平均 $A\#B$ は次のように定義される:

$$A\#B = \max\left\{X \ge 0; \begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \ge 0\right\}.$$

このとき
(1) $A\#B = A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}$ (A が可逆のとき)
(2) $A \le B,\ C \le D$ のとき $A\#C \le B\#D$ (単調性)
がいえて, これから (LH2), (LH) は得られるというものである.
ここでは, 作用素平均を用いるいま一つ別の証明を示したい. その前によく知られた次の定義を記す:
算術平均 (arithmetic mean)

$$A\nabla B = \frac{1}{2}(A+B)$$

調和平均 (harmonic mean)

$$A\,!\,B = \left\{\frac{1}{2}(A^{-1}+B^{-1})\right\}^{-1} (= 2A(A+B)^{-1}B)$$

($A,\ B$ の少なくとも一方が可逆であればよい)

一般には $A\,!\,B$ は $s\text{-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(A+\varepsilon)\,!\,(B+\varepsilon)$ (強作用素収束) として定義される.
このとき $\nabla, !$ の単調性や不等式 $\nabla \ge !$ などは簡単な計算でわかる:
(3) $A \le B,\ C \le D$ ならば $A\nabla C \le B\nabla D,\quad A\,!\,C \le B\,!\,D$
(4) $A\nabla B \ge A\,!\,B$
J. I. Fujii [5], [6] で作用素の算術調和平均が導入された. そこでこれを用いる手法, つまり
●算術調和平均を用いる証明 —— を示したい. $A \ge 0$ に対して,

$$A_1 = 1,\ B_1 = A,$$
$$A_{n+1} = A_n\nabla B_n,\ B_{n+1} = A_n\,!\,B_n \quad (n \ge 1)$$

とおく. 各 n に対して $A_nB_n = B_nA_n$, また (3), (4) から

$$A_nB_n = A_{n-1}B_{n-1} = \cdots = A_1B_1 = A,$$
$$A_2 \geq \cdots \geq A_n \geq B_n \geq \cdots \geq B_2,$$
$$A_{n+1} - B_{n+1} \leq 1/2(A_n - B_n) \leq 1/2^{n-1}(A_2 - B_2).$$

したがって $\{A_n\}, \{B_n\}$ $(n \geq 2)$ は同一の極限に強作用素収束する.
$A_nB_n = A$ から, 極限は $A^{1/2}$, つまり

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n = A^{1/2}.$$

同様に $B(\geq A)$ に対して

$$A_1' = 1,\ B_1' = B,$$
$$A_{n+1}' = A_n' \nabla B_n',\ B_{n+1}' = A_n' \,!\, B_n' \ (n \geq 1)$$

とおく. すると先と同様に

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n' = s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n' = B^{1/2}.$$

ところが (3) から各 $n \geq 1$ に対し

$$A_n \leq A_n',\ B_n \leq B_n'$$

がいえて, これの極限として

$$A^{1/2} \leq B^{1/2}$$

を得る.

要するに (LH) の証明のために (LH2) の一証明を示したということである. この算術調和平均による証明は極めて簡単な作用素平均不等式を用いるものであり, また, これは作用素の平方根 (square root) の

(1) 存在性 (existence)

(2) 単調性 (monotonicity)

を同時に示すものとなっている. さらに単調性を用いて, 実は一意性も示すことができる. 実際, 上記のように得られる作用素を $A^{1/2}$, $B^{1/2}$ のかわりにそれぞれ X_A, X_B と書くと,

(i) $A \leq B$ ならば $X_A \leq X_B$ (単調性)

(ii) $X_A \in \{A\}''$ (X_A は A と可換な作用素と可換)

(iii) $Y \geq 0,\ Y^2 = A$ ならば $Y \in \{A\}'$, つまり $YX_A = X_AY$

(iv) A が可逆ならば $X_A = Y$, つまり A の平方根は一意的

などがいえ, これから一般の $A \geq 0$ に対しても平方根の一意性を示すこ

とができる.

先の (LH) の証明を, (LH2) を繰り返し用いて $p = k/2^n$ の指数 p について示す方法とは別に、直接 $p = k/n$ の形の指数 p について証明することもできる. それは n 次の基本対称式 (elementary symmetric function), つまり

$$e_{n,0} = 1,\quad e_{n,k} = e_{n,k}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

を用いるものである. これの商を順次

$$q_{n,k}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{e_{n,k}/{}_nC_k}{e_{n,k-1}/{}_nC_{k-1}} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

と定める. 例えば $n = 3$ として, x_1, x_2, x_3 を作用素 1, 1, A と置き変えて

$$A_1 = q_{3,1}(1, 1, A),\ B_1 = q_{3,2}(1, 1, A),\ C_1 = q_{3,3,}(1, 1, A),$$
$$A_{m+1} = q_{3,1}(A_m, B_m, C_m),\ B_{m+1} = q_{3,2}(A_m, B_m, C_m),$$
$$C_{m+1} = q_{3,3}(A_m, B_m, C_m) \quad (m \ge 1)$$

とおけば, いわば3個の作用素についての算術調和平均として $\{A_m\}, \{B_m\}, \{C_m\}$ ができ, これが同一の極限 $A^{1/3}$ に強作用素収束する. さらにこのとき $q_{3,k}$ の単調性を用いて, これから $A \le B$ から $A^{1/3} \le B^{1/3}$ を示すこともできる. [2] では可換性を仮定しない一般の場合について基本対称式の商が論じられている.

2. Kubo-Ando 理論と作用素平均の混成

前章に述べたことに関し, Kubo-Ando [13] の作用素平均の理論について2, 3附言したい. 2項演算

$$\sigma : (A, B) \in B(H)_+ \times B(H)_+ \mapsto A\sigma B \in B(H)_+$$

が次の (i) - (iv) を満たすとき, 作用素平均と呼ばれる.

(i) $A \le B,\ C \le D$ ならば $A\sigma C \le B\sigma D$
(ii) $C(A\sigma B)C \le CAC\sigma CBC$
(iii) $A_n \downarrow A,\ B_n \downarrow B$ ならば $A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B$ (強作用素収束)
(iv) $I\sigma I = I$

作用素平均 σ に対して, $f(x) = \hat{\sigma}(x) = 1\sigma x (= I\sigma xI)$ によって $f(x)$ を定義すると, f は $[0,\infty)$ 上の非負作用素単調関数 (operator monotone function), つまり $A \leq B$ ならば $f(A) \leq f(B)$ なる関数となり, 対応 : $\sigma \mapsto f = \hat{\sigma}$ は作用素平均の全体から $f(1) = 1$ となる非負作用素単調関数全体への 1 対 1 対応を与えることが知られている. (この f は σ の表現関数 (representing function) と呼ばれている.) 作用素平均 σ に対して,

●転置 (transpose) $\quad \sigma' : A\sigma' B = B\sigma A$
$\qquad \sigma = \sigma'$ のとき,σ は対称 (symmetric).
●随伴 (adjoint) $\quad \sigma^* : A\sigma^* B = (A^{-1}\sigma B^{-1})^{-1}$ $(A, B$ は可逆として$)$
●双対 (dual) $\quad \sigma^{\perp} : \sigma^{\perp} = (\sigma')^*$

が定義され, 各々がまた作用素平均となる.

3 つの平均 σ, τ, ρ について, $(\sigma)\tau(\rho)$ が

$$A(\sigma)\tau(\rho)B = (A\sigma B)\tau(A\rho B)$$

によって定義される.

ところで先の J. I. Fujii の算術調和平均の手法に戻り, 出発点を (少し一般化して)

$$A_1 = A\nabla B, \quad B_1 = A \,!\, B$$

とし, 順次

$$A_{n+1} = A_n\nabla B_n, \quad B_{n+1} = A_n \,!\, B_n \ (n \geq 1)$$

とおく. このとき, $A_n = A\sigma_n B$, $B_n = A\tau_n B$ とかくと, 上記の関係は

$$\sigma_1 = \nabla, \quad \tau_1 = \,!\,,$$
$$\sigma_{n+1} = (\sigma_n)\nabla(\tau_n), \quad \tau_{n+1} = (\sigma_n) \,!\, (\tau_n) \quad (n \geq 1)$$

と表される. そしてこのとき,

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} A_n = s\text{-}\lim_{n\to\infty} B_n = A\# B$$

が成り立つことが知られており, このことは

$$A(\nabla \times \,!\,)B = A\# B$$

あるいは

$$(*) \qquad \nabla \times \,! = \#$$

と記されている. もっと一般には, 2 つの作用素平均に対して $\sigma \times \tau$ が定義

され, これは σ と τ の混成 (composition) と呼ばれている. ただし, σ, τ の少なくとも一方が trivial でないとの仮定がいる. ($A\omega_l B = A$, $A\omega_r B = B$ で定義される ω_l, ω_r は trivial と呼ばれる.)

ここで, 作用素平均の混成について, 2, 3の事柄を記す.

命題 2.1 (cf. [13]) σ と τ の少なくとも一方が trivial でないとき, 次が成り立つ.

(1) $\sigma = \sigma', \tau = \tau'$ ならば $\sigma \times \tau = \tau \times \sigma$

(2) $(\sigma \times \tau)' = \tau' \times \sigma'$

(3) $(\sigma \times \tau)^* = \sigma^* \times \tau^*$

(4) $(\sigma \times \tau)^\perp = \tau^\perp \times \sigma^\perp$

実は $\nabla^\perp = !$ であり, これから (*) は $\nabla \times \nabla^\perp = \#$ を意味する. より一般的なこととして次が知られている.

定理 2.2 (cf. [13]) σ が trivial でないとき

$$\sigma \times \sigma^\perp = \#$$

作用素平均の混成の例として, 次はよく知られているものである.

定理 2.3 (eg. [16])

$$\nabla \times \# = \gamma \qquad (\text{Gauss 平均}).$$

$$\hat{\gamma}(x) = 1\gamma x = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + x^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta \right\}^{-1}.$$

命題 2.1 を用いると次の事がわかる.

系 2.4 $\quad ! \times \# = \gamma^\perp$

作用素平均の混成の変形とも考えられる次のものがある.

$$A_1 = A\sigma B, \ B_1 = A_1 \tau B$$

$$A_{n+1} = A_n \sigma B_n, \quad B_{n+1} = A_{n+1} \tau B_n \ (n \geq 1)$$

あるいはこれを

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \tau_1 = (\sigma_1)\tau(\omega_r)$$

$$\sigma_{n+1} = (\sigma_n)\tau(\tau_n), \ \tau_{n+1} = (\sigma_{n+1})\tau(\tau_n) \quad (n \geq 1)$$

と表すこともできる．このときも，前述の混成と同様に

$$(X :=) w\text{-} \lim_{n\to\infty} A_n = w\text{-} \lim_{n\to\infty} B_n$$

が成り立つことが知られている．ただし，σ と τ の少なくとも一方が trivial でないとする．なお，このときの収束は弱作用素収束である．いまこの極限を

$$A(\sigma \tilde{\times} \tau)B$$

と記すことにする．これはやはり一つの作用素平均であり，次のことがいえる：

命題 2.5 σ と τ の少なくとも一つは trivial でないとき

(1) $\sigma \tilde{\times} \tau = \sigma \times \rho, \quad \rho = (\sigma)\tau(\omega_\tau)$

(2) $(\sigma \tilde{\times} \tau)^* = \sigma^* \tilde{\times} \tau^*$

これに関して次が知られている．

命題 2.6 (cf. [12])

$$1(\nabla \tilde{\times} \#)x = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\cos^{-1}\frac{1}{x}} & (x > 1) \\[2ex] 1 & (x = 1) \\[2ex] \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\log \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}} & (0 < x < 1) \end{cases}$$

上記を少し書き換えた次がいえる．

系 2.7

(1) $$x(\#)(\nabla \tilde{\times} \#)(\nabla)y = \frac{x-y}{\pi - 4\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{y}{x}}} \qquad (x,\ y > 0,\ x \neq y)$$

(2) $$x(\nabla)(\nabla \tilde{\times} \#)(\#)y = \frac{x-y}{\log x - \log y} \qquad (x,\ y > 0,\ x \neq y)$$

$\nabla\tilde{\times}$! については 次が得られる.

命題 2.8

$$1(\nabla\tilde{\times}\ !\ )x = \frac{1+x}{2}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\frac{1-x}{2x}\right\}}{\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{4}\right)^k\cdot\frac{1-x}{x}\right\}}\quad (x>0).$$

略証: $a_1 = 1,\ b_1 = x,\ a_{n+1} = a_n\nabla b_n,\ b_{n+1} = a_{n+1}\ !\ b_n,\ r_n = \frac{a_n}{b_n},\ \rho_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ とおくと, $r_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = r_n/4+3/4\ (n\geq 1)$ を得て, これから $(n \geq 1$ のとき)

$$r_{n+1} = 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n(r_1-1),\ \rho_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{r_n}\right) = \frac{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{r_1-1}{2}}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot(r_1-1)}.$$

さらに, $a_{n+1} = \rho_{n+1}\ldots\rho_2\cdot a_1,\ 1(\nabla\tilde{\times}\ !\ )x = \lim_{n\to\infty} a_n$ を用いて, 求める関係式を得る。

参考文献

[1] T. ANDO, *Topics on operator inequalities*, Lecture notes, Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.

[2] W. N. ANDERSON, JR., T. D. MORLEY and G. E. TRAPP, *Symmetric function means of positive operators*, Linear Alg. and Appl., 60 (1984), 129-143.

[3] N. N. CHAN and MAN KAM KWONG, *Hermitian matrix inequalities and a conjecture*, Amer. Math. Monthly, 92(1985), 533-541.

[4] J. DIXMIR, *Sur une inégalité de E. Heinz*, Math. Ann., 126 (1953), 75-78.

[5] J. I. FUJII, *Arithmetic-geometric mean of operators*, Math. Japon., 23 (1979), 667-669.

[6] J. I. FUJII, *On geometric and harmonic means of positive operators*, Math. Japon., 24 (1979), 203-207.

[7] M. FUJII and T. FURUTA, *Löwner-Heinz, Cordes and Heinz-Kato inequalities*, Math. Japon., 38 (1993), 73-78.

[8] T. FURUTA, *$A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$*, Proc, Amer. Math. Soc. 101 (1987), 85-88.

[9] T. FURUTA, *Invitation to Linear Operators, From matrices to bounded linear operators on a Hilbert space*, Taylor and Francis, New York, 2001.

[10] E. HEINZ, *Beitrage zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann., 123 (1951), 415-438.

[11] T. KATO, *Notes on some inequalities for linear operators*, Math. Ann., 125 (1952), 208-212.

[12] F. KUBO, *Theory of Operator Means*, 1991 (doctorate thesis).

[13] F. KUBO and T. ANDO, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., 246 (1980), 205-224.

[14] K. LÖWNER, *Über monotone Matrixfunktionen*, Math. Z., 38 (1938), 177-216.

[15] MAN KAW KWONG, *Inequalities for powers of nonnegative Hermitian operators*, Proc. Amer. Math. Soc., 51 (1975), 401-406.

[16] J. E. COHEN and R. D. NUSSBAUM, *Arithmetic-geometric means of positive matrices*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 101 (1987), 209-219.

[17] G. K. PEDERSEN *Some operator monotone functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 36 (1972), 309-310.

[18] T. YOSHINO *Note on Heinz's Inequality*, Proc. Japan Acad., 64, Ser. A (1988), 325-326.