数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 32-36

ノルムに関する三角不等式の等号条件について

茨城大・工学部　　中本　律男 (Ritsuo Nakamoto)
Faculty of Engineering, Ibaraki University
山形大・工学部　　高橋　眞映 (Sin-Ei Takahasi)
Department of Basic Technology,
Applied Mathematics and Physics, Yamagata University

1. ノルム空間において、最も基本的な不等式の一つは三角不等式である：ノルム空間の元 x, y に対して、

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{1}$$

不等式 (1) がどんな条件で等号が成立するかと言う問題について考える。例えば、内積空間においては、Cauchy-Schwarz の不等式より、ある $\lambda \geq 0$ に対して、$x = \lambda y$ または、$y = \lambda x$ を満たすときに限ることがわかる。

我々が興味を持っているのは（有界線形）作用素の場合であるが、次のことが知られている：

定理 A. (Abranovich-Aliprantis-Burkinshaw [1]). T を一様に凸なバナッハ空間上の作用素とする。このとき、等式 $\|1+T\| = 1 + \|T\|$ が成立する必要十分条件は $\|T\|$ が T の近似固有値になることである。

最近、ヒルベルト空間上の作用素について次のことが証明された：

定理 B. (Barraa-Boumazour [2]) A, B をあるヒルベルト空間上の作用素とする。このとき、等式 $\|A+B\| = \|A\| + \|B\|$ が成立する必要十分条件は

$$\|A\|\|B\| \in \overline{W(A^*B)}, \tag{2}$$

が成立することである。ここで、$\overline{W(T)}$ は作用素 T の数値域 $W(T)$ の閉包を表す。

一般に、作用素 T が $\|T\| \in \overline{W(T)}$ を満たせば $\|T\|$ は T の 近似固有値になっていることが知られている。実は、もっと強く 正規近似固有値 (λ が T の正規近似固有値とは、ヒルベルト空間の元の列 $\{x_n\}(\|x_n\| = 1)$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \|(T-\lambda)x_n\| = 0$, $\lim_{n\to\infty} \|(T-\lambda)^* x_n\| = 0$ を満たすときを言う [5,6]) になっている。

もし、作用素 A^*B が条件 (2) を満たせば $\|A^*B\| = \|A\|\|B\|$ が成立することになり $\|A\|\|B\|$ が A^*B の 正規近似固有値となる。このことは、1 と A^*B で生成された C^*-環上に character χ が存在して

$$\chi(A^*B) = \|A\|\|B\|$$

を満たすことと同じである ([7])。

2. 定理 B における条件 (2) はヒルベルト空間上の作用素のなす環上に state f が存在して、

$$f(A^*B) = \|A\|\|B\|$$

を満たすことと同値である (cf. [3])。このことにより、定理 B の C^*-版 として次が得られる：

定理 1. $\mathcal{A}$ を単位元を持つ C^*-環 とする。このとき、$\mathcal{A}$ の元 a, b に対して、等式 $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$ が成立する必要十分条件は $\mathcal{A}$ 上の state f が存在して $f(a^*b) = \|a\|\|b\|$ を満たすとき、同じことであるが、$\|a\|\|b\| \in W(a^*b)$ を満たすことである ([3])。

ここで、$\mathcal{A}$ の元 c に対して $W(c) = \{f(c); f : \text{state on } \mathcal{A}\}$ とする。

証明。必要性。三角不等式で等号が成立しているとする。
$(a+b)^*(a+b) \geq 0$ なので $\mathcal{A}$ 上の state f が存在して

$$f((a+b)^*(a+b)) = \|(a+b)\|^2 (= (\|a\| + \|b\|)^2)$$

すなわち、

$$f(a^*a + a^*b + b^*a + b^*b) = \|a\|^2 + 2\|a\|\|b\| + \|b\|^2$$

を満たす。

$f(a^*a) \leq \|a\|^2, f(b^*b) \leq \|b\|^2, |f(a^*b+b^*a)| \leq 2\|a\|\|b\|$ は常に成立しているので上記の等号より $f(a^*b) = \|a\|\|b\|$ を得る。

十分性は逆をたどればよい。

一方、バナッハ 空間において次のことが成立する。、

定理 2. X をバナッハ空間とし、X^* を共役空間とする。このとき、X の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対して、等号 $\|x_1 + \cdots + x_n\| = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$ が成立する必要十分条件は X^* の単位球 X_1^* の端点 f が存在して $f(x_i) = \|x_i\| \quad (i = 1, \cdots, n)$ を満たすことである。

註 1. 定理2において、$\|x_1+\cdots+x_n\| = \|x_1\|+\cdots+\|x_n\|$ が成立する必要十分条件は X^* の元 $f(\|f\| = 1)$ が存在して $f(x_i) = \|x_i\| \quad (i = 1, \cdots, n)$ を満たすことであることが分かる。ここでは、簡単のため二つの元 x, y の場合の証明を与える。

必要性。Hahn-Banach の定理より、X^* の元 $f(\|f\| = 1)$ が存在して、

$$f(x + y) = \|x + y\| = \|x\| + \|y\|$$

を満たす。しかし、一般に、$|f(x)| \leq \|x\|, |f(y)| \leq \|y\|$ なので自動的に $f(x) = \|x\|, f(y) = \|y\|$ となる。

十分性は明らかである。

一般に、単位元を持つバナッハ環 $\mathcal{A}$ の元 a に対してその数値域 $V(a)$ は

$$V(a) = \{f(a); f(1) = 1, f \in \mathcal{A}_1^*\}.$$

で定義されている ([4])。

そこで、定理 2 の結果として、定理 A, B に対応して、

系 1. 単位元を持つバナッハ環 $\mathcal{A}$ の元 a に対して、等号 $\|1+a\| = 1+\|a\|$ が成立する必要十分条件は $\|a\|$ が $V(a)$ に属することである。

系 1 で $\mathcal{A}$ が C^*-環のときは、線形汎関数は自己共役なものがとれるので結果的に state になる。従って、

系 2. 単位元を持つ C^*-環の元 a に対して、等号 $\|1+a\| = 1 + \|a\|$ が成立する必要十分条件は $\|a\|$ が数値域 $W(a)$ に属することである。

定理 1, 2 を考慮すれば、

定理 3. $\mathcal{A}$ を単位元を持つ C^*-環とする。このとき、$\mathcal{A}$ の元 a, b に対して次の (i)-(iii) は互いに同値である。

(i) $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$.

(ii) $\mathcal{A}$ 上の state f が存在して $f(a^*b) = \|a\|\|b\|$ を満たす。

(iii) $\mathcal{A}$ 上のノルム 1 の線形汎関数 g が存在して、$g(a) = \|a\|, g(b) = \|b\|$ を満たす。

証明は (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i) とすれば自然とでる。(ii) $\Rightarrow$ (iii) は state f に対して

$$g(x) = \frac{1}{\|a\|} f(a^*x)$$

と置けばよい。

参考文献

[1] Y.A. Abranovich, C.D.Aliprantis and O. Burkinshaw, *The Daugavet equation in uniformly convex Banach spaces*, J. Func. Anal, 97(1991), 215-230.

[2] M. Barraa and M. Boumazgour, *Inner derivations and norm equality*, to appear in Proc. Amer Math. Soc., (Article electronically published on May 25, 2001).

[3] S.K. Berberian and G.H. Orland, *On the closure of the numerical range of an operator*, Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967), 499-503.

[4] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, 1973.

[5] M. Fujii and R. Nakamoto, *On normal approximate spectrum.II*, Proc. Japan Acad., 48(1972), 297-301.

[6] S. Hildebrandt, *Über den numeriche Wertebereich eines Operators,* Math. Ann., 163(1966), 230-247.

[7] I. Kasahara and H.Takai, *Approximate propervalues and characters of C^*-algebra,* Proc. Japan Acad., 48(1972), 91-93.

[8] R. Nakamoto and S-E. Takahasi, *Norm equality condition in triangular inequality,* Sci. Math. Japonicae Online 8(2001), 367-370.