数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 37-41

AB と BA のスペクトルについて

長　宗雄（神奈川大工），古谷　正（新潟大教育人間科学）

Banach 空間 X 上の有界線形作用素 A, B に大して

$$(*) \qquad \sigma(AB) - \{0\} = \sigma(BA) - \{0\}$$

であることは良く知られている．最近 Aluthge 変換などのことで $\sigma(AB) = \sigma(BA)$ となっていれば嬉しい．これについては, 次のことが判る．

定理 1. A がもし $0 \in \sigma(A)$ のとき $0 \in \sigma_a(A) \cap \sigma_a(A^*)$ となっていれば

$$\sigma(AB) = \sigma(BA).$$

ここでは (*) についての李　紹寛先生の研究を紹介する．彼の研究は二つの作用素の n-tuples $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n), \mathbf{B} = (B_1, ..., B_n)$ に対して $\mathbf{AB} = (A_1B_1, ..., A_nB_n), \mathbf{BA} = (B_1A_1, ..., B_nA_n)$ とおくとき

$$(?) \quad \sigma(\mathbf{AB}) - \{\mathbf{0}\} = \sigma(\mathbf{BA}) - \{\mathbf{0}\}.$$

まず，二つの作用素の n-tuples $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n), \mathbf{B} = (B_1, ..., B_n)$ に対して，この pair が criss-cross commute であるとは

$$A_iB_kA_j = A_jB_kA_i \text{ and } B_iA_kB_j = B_jA_kB_i \quad (\forall i, j, k \in \{1, ..., n\})$$

のときを言う．それで，次の定理が成り立つ．

定理 2（李　紹寛）．二つの作用素の n-tuples $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n), \mathbf{B} = (B_1, ..., B_n)$ に対して，この pair が criss-cross commute であれば

$$\sigma(\mathbf{AB}) - \{\mathbf{0}\} = \sigma(\mathbf{BA}) - \{\mathbf{0}\}$$

である．ここで $\sigma(\mathbf{T})$ は n-tuple $\mathbf{T}=(T_1,...,T_n)$ の Taylor spectrum である．

この問題は歴史的には V. Wrobel が 1986 年の Math. Ann. での論文で二つの作用素の n-tuples $\mathbf{A}=(A,...,A), \mathbf{B}=(B_1,...,B_n)$ について $\mathbf{AB}$ と $\mathbf{BA}$ がともに可換な n-tuples であるという条件で同じ結果を示している．

そして，李　紹寛先生の結果が 92 年に出て，R. Harte がいろいろな joint spectrum に拡張している．そして等号の研究が [1] でされている．

$n=2$ のときの李　紹寛先生の結果の証明：

定理 2'（李　紹寛）．二つの作用素の tuples $\mathbf{A}=(A_1,A_2), \mathbf{B}=(B_1,B_2)$ に対して，この pair が criss-cross commute であれば

$$\sigma(\mathbf{AB})-\{\mathbf{0}\} \;=\; \sigma(\mathbf{BA})-\{\mathbf{0}\}$$

である．

証明：$(z_1,z_2)\neq(0,0)$ に対して

$$(z_1,z_2)\notin\sigma(\mathbf{AB}) \iff (z_1,z_2)\notin\sigma(\mathbf{BA})$$

を示す．ここで $z_1=1, z_2=0$ または 1 と仮定してよい．

(1) $$0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\delta_1} \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \xrightarrow{\delta_2} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

ただし
$$\begin{cases} \delta_1(x) = -(A_2B_2-z_2)x\oplus(A_1B_1-1)x \\ \\ \delta_2(x\oplus y) = (A_1B_1-1)x+(A_2B_2-z_2)y. \end{cases}$$
criss-cross commute と δ_1 の第一成分の $-$ より，$\delta_2(\delta_1(x))=0$ が出る．

(2) $$0 \longrightarrow \mathcal{H} \xrightarrow{\delta^1} \mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \xrightarrow{\delta^2} \mathcal{H} \longrightarrow 0,$$

ただし
$$\begin{cases} \delta^1(x) = -(B_2A_2-z_2)x\oplus(B_1A_1-1)x \\ \\ \delta^2(x\oplus y) = (B_1A_1-1)x+(B_2A_2-z_2)y. \end{cases}$$

$$(1) : \quad \text{exact} \Longrightarrow (2) : \quad \text{exact}$$

を示す.

(i) $\delta^1(x) = 0$ とする. i.e., $-(B_2A_2 - z_2)x = (B_1A_1 - 1)x = 0$.
このとき $(B_1A_1 - 1)x = 0$ であるので

$$A_1(B_1A_1 - 1)x = (A_1B_1 - 1)A_1x = 0$$

従って $-A_1(B_2A_2 - z_2)x = -(A_1B_2A_2 - z_2A_1)x = -(A_2B_2 - z_2)A_1x = 0$,
よって $A_1x \in \ker(\delta_1) = \{0\}$ よって $A_1x = 0$ and $B_1A_1 = x$.
従って $\ker(\delta^1) = \{0\}$.

(ii) $x \oplus y \in \ker(\delta^2)$ とする. i.e., $(B_1A_1 - 1)x + (B_2A_2 - z_2)y = 0$.
このとき

$$(A_1B_1 - 1)A_1x + (A_2B_2 - z_2)A_1y = 0$$

より, $A_1x \oplus A_1y \in \ker(\delta_2)$. ここで $\ker(\delta_2) = \mathrm{im}(\delta_1)$ より

$$\exists u \in \mathcal{H} \ ; \ A_1x = -(A_2B_2 - z_2)u \text{ and } A_1y = (A_1B_1 - 1)u.$$

$v = B_1u - y$ とおく. このとき

$$-(B_2A_2 - z_2)v = -(B_2A_2 - z_2)B_1u + (B_2A_2 - z_2)y$$

$$= -B_1(A_2B_2 - z_2)u - (B_1A_1 - 1)x = B_1A_1x - B_1A_1x + x = x.$$

$$(B_1A_1 - 1)v = (B_1A_1 - 1)B_1u - (B_1A_1 - 1)y$$

$$= B_1(A_1B_1 - 1)u - B_1A_1y + y = y.$$

よって $x \oplus y \in \mathrm{im}(\delta^1)$.

(iii) $\mathrm{im}(\delta_2) = \mathcal{H}$ であるので $\forall x \in \mathcal{H}$ に対して $\exists x^i_j \in \mathcal{H}$ $(i, j = 1, 2)$;

$$\begin{cases} A_1 x = (A_1 B_1 - 1)x_1^1 + (A_2 B_2 - z_2)x_2^1 \\ A_2 x = (A_1 B_1 - 1)x_1^2 + (A_2 B_2 - z_2)x_2^2. \end{cases}$$

そこで

$$\begin{cases} y_1 = -x + B_1 x_1^1 + B_2 x_1^2 \\ y_2 = -x + B_1 x_2^1 + B_2 x_2^2 \end{cases}$$

とおく.

$$\begin{aligned} &(B_1A_1 - 1)y_1 + (B_2A_2 - z_2)y_2 \\ &= -(B_1A_1 - 1)x + (B_1A_1 - 1)B_1x_1^1 + (B_1A_1 - 1)B_2x_1^2 \\ &\quad -(B_2A_2 - z_2)x + (B_2A_2 - z_2)B_1x_2^1 + (B_2A_2 - z_2)B_2x_2^2 \\ &= -(B_1A_1 - 1)x + B_1\Big((A_1B_1 - 1)x_1^1 + (A_2B_2 - z_2)x_2^1\Big) \\ &\quad -(B_2A_2 - 1)x + B_2\Big((A_1B_1 - 1)x_1^2 + (A_2B_2 - z_2)x_2^2\Big) \\ &= -(B_1A_1 - 1)x + B_1A_1x - (B_2A_2 - z_2)x + B_2A_2x \\ &= (1 + z_2)x. \end{aligned}$$

$z_2 = 0$ or 1 であるので $1 + z_2 \neq 0$ よって $\mathrm{im}(\delta^2) = \mathcal{H}$.

$(i), (ii), (iii)$ により (2) は exact. よって

$$\sigma(\mathbf{AB}) - \{\mathbf{0}\} = \sigma(\mathbf{BA}) - \{\mathbf{0}\}$$

は示された.

[1] では等号となる場合について、次のような結果がある.

定理3. $\mathbf{A} = (A, ..., A), \mathbf{B} = (B_1, ..., B_n)$: criss-cross commuting. If A is normal, then $\sigma(\mathbf{AB}) = \sigma(\mathbf{BA})$.

定理4. $\mathbf{A} = (A_1, ..., A_n), \mathbf{B} = (B_1, ..., B_n)$: criss-cross commuting. If there exist $a_1, ..., a_n$ such that $\sum a_i A_i$ is invertible, then $\sigma(\mathbf{AB}) = \sigma(\mathbf{BA})$.

参考文献

[1] M. Chō, R. Curto and T. Huruya, N-tuples of operators satisfying $\sigma_T(\mathbf{AB}) = \sigma_T(\mathbf{BA})$, Linear Algebra Appl. to appear.

[2] R. Curto, On the connectedness of invertible n-tuples, Indiana Univ. Math. J. 29(1980), 393-406.

[3] R. Curto, The spectra of elementary operators, Indiana Univ. Math. J. 32(1983), 193-197.

[4] R. Harte, On criss-cross commutativity, J. Operator Th. 37(1997), 303-309.

[5] S. Li, On the commuting properties of Taylor's spectrum, Chinese Sci. Bull. 37(1992), 1849-1852.

[6] S. Li, Taylor spectral invariance for crisscross commuting pairs on Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 124(1996), 2069-2071.

[7] A. McIntosh, A. Pryde and W. Ricker, Comparison of joint spectra for certain classes of commuting operators, Studia Math. 88(1987), 23-36.

[8] J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, Acta Math. 125(1970), 172-191.

[9] F.-H. Vasilescu, On pairs of commuting operators, Studia Math. 62(1978), 203-207.

[10] V. Wrobel, Multi-dimensional spectral theory of bounded linear operators in locally convex spaces, Math. Ann. 275(1986), 409-423.