数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 47-52

J-selfadjoint 行列と作用素単調関数

北星学園大・経済　安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)
Hokusei Gakuen Univ., Fac. of Economics

1. 問題の提起　無限次元のヒルベルト空間の場合には，線形作用素に関して injectivity から bijectivity は導かれず，それに纏わる delicate な議論をしなければならない。しかし，本質的な処は有限次元の場合の考察から理解されるので，以下では議論を $n \times n$ 行列の場合に限定する。

invertible な selfadjoint 行列 H は $\mathcal{H} \equiv \mathbf{C}^n$ 上に sesqui-linear form

$$\langle x, y\rangle_H \stackrel{\text{def}}{=} \langle Hx, y\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{H})$$

を生成する。ここで $\langle x, y\rangle$ は通常の inner product である。H が positive definite でないときは，$\langle x, y\rangle_H$ は indefinite な inner product である。

行列 A に対して，この sesqui-linear form に関して，H-adjoint $A^{\#}$ が

$$\langle Ax, y\rangle_H = \langle x, A^{\#}y\rangle_H \qquad (x, y \in \mathcal{H})$$

で定義される。通常の adjoint すなわち complex transpose A^* を使うと

$$A^{\#} = H^{-1}A^*H$$

と書かれる。$A = A^{\#}$ のとき，すなわち

$$HA = A^*H$$

のとき，A は H-selfadjoint という。これは，HA が selfadjoint のことである。

selfadjoint A, B にたいして順序 $A \geq B$ は，$A - B$ が positive semi-definite なことで定義される。すなわち

$$A \geq B \iff \langle Ax, x\rangle \geq \langle Bx, x\rangle \qquad (x, y \in \mathcal{H}).$$

これに対応して，A, B が H-selfadjoint なとき，（H から導かれる順序）$A \overset{H}{\geq} B$ を

$$A \overset{H}{\geq} B \iff \langle Ax, x\rangle_H \geq \langle Bx, x\rangle_H \qquad (x, y \in \mathcal{H}).$$

で定義しよう。すなわちこれは，$HA \geq HB$ のことである。

$f(t)$ は実軸 $\mathbf{R}$ の（有限または無限）区間 (α, β) で定義された実数値関数とする。selfadjoint A のスペクトル（固有値）（の集合）$\sigma(A)$ がこの区間 (α, β) に含まれるなら，対角化を通じて $f(A)$ が自然に定義される。

もし $f(t)$ が (α, β) を含む複素平面の領域に解析的に拡大できるならば，Riesz-Dunford functional calculus（例えば [日合・柳] 第３章２節を参照）を通じて，$\sigma(A) \subset (\alpha, \beta)$ な行列 A に対して $f(A)$ が定義される。

関数 $f(t)$ が区間 (α,β) で作用素単調 (operator monotone) とは，(次元 n に無関係に) $\sigma(A)$, $\sigma(B)\subset(\alpha,\beta)$ な selfadjoint A, B にたいして，次の命題が成り立つことである：

$$A \geq B \implies f(A) \geq f(B).$$

半区間 $(0,\infty)$ での作用素単調関数のよく知られた例としては

$$t^p \quad (0<p\leq 1), \qquad \log t, \qquad \frac{t}{t+\gamma} \quad (\gamma\geq 0),$$

がある。また，$(-1,1)$ での作用素単調関数としては

$$\frac{t}{1-\lambda t} \qquad (-1<\lambda<1)$$

などがある。(例えば [日合・柳] 第５章１節を参照)

区間 (α,β) での作用素単調関数 $f(t)$ は，この区間を含む複素領域に解析接続できることは知られているので，次のような問題が提起される。

問 題. $f(t)$ が区間 (α,β) で作用素単調，A, B が H-selfadjoint で $\sigma(A)$, $\sigma(B)\subset(\alpha,\beta)$ のとき，次の命題は正しいか：

$$A \overset{H}{\geq} B \implies f(A) \overset{H}{\geq} f(B).$$

この報告の目的は，この問題に肯定的な回答を与えることである。ここで，A が selfadjoint のときは，固有値はすべて real であるが，H-selfajoint のときはこれは必ずしも言えないことを注意しておく。

2. 本質的な問題への還元 H が positive definite のときは，以下のように，すべては trivial である。

$$\begin{aligned} A \overset{H}{\geq} B &\iff H^{\frac{1}{2}}AH^{-\frac{1}{2}} \geq H^{\frac{1}{2}}BH^{-\frac{1}{2}} \\ &\implies H^{\frac{1}{2}}f(A)H^{-\frac{1}{2}} \geq H^{\frac{1}{2}}f(B)H^{-\frac{1}{2}} \\ &\implies f(A) \overset{H}{\geq} f(B). \end{aligned}$$

H が indefinite のときは，

$$H = GJG, \quad G \equiv |H|^{\frac{1}{2}}$$

と書こう。ここで，G は positive definite で，J は(indefinite) selfadoint involution である。

$$A \overset{H}{\geq} B \iff J\cdot GAG^{-1} \geq J\cdot GBG^{-1}$$

$$f(GAG^{-1}) \; = \; G \cdot f(A) \cdot G^{-1}, \quad f(GBG^{-1}) \; = \; G \cdot f(B) \cdot G^{-1}$$

であるから，H 自身が selfadjoint involution のとき，すなわち $H = J$ のときに，問題が解決されればよい。

問題の回答を次の形で述べられる。

Ł　1.　$f(t)$ が区間 (α, β) で作用素単調で，行列 A, B が

$$\sigma(A),\ \sigma(B) \; \subset \; (\alpha, \beta)$$

を満たすとき，次の命題が成り立つ：

$$JA \; \geq \; JB \quad \Longrightarrow \quad J \cdot f(A) \; \geq \; J \cdot f(B).$$

A, B の代わりに，適当な $\rho > 0$ と real γ をとり，$\rho(A+\gamma)$, $\rho(B+\gamma)$ の変形を考えれば，区間 (α, β) として$(-1, 1)$ の場合を考えればよいことが判る。

既に述べたように，区間 $(-1, 1)$ で作用素単調な $f(t)$ はこの区間を含む複素領域に解析接続されるが，もっと詳しく次のことが知られている。(例えば [日合・柳] 第 5 章 1 節を参照)

Ł1.　区間 $(-1, 1)$ で作用素単調な関数 $f(t)$ は

$$f(t) \; = \; f(0) \; + \; \int_{-1}^{1} \frac{t}{1 - \lambda t} dm(\lambda) \qquad (-1 < t < 1)$$

と積分表示される。ここで $m(\cdot)$ は $(-1, 1)$ の有限正測度である。

この積分表示から，定理 1 の証明では，作用素単調関数 $f(t)$ としては

$$\frac{t}{1 - \lambda t} \qquad (-1 < \lambda < 1)$$

の形の 1 次分数関数を考えれば十分である。さらに $\lambda \neq 0$ のとき

$$A(I - \lambda A)^{-1} \; = \; -\frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda}(I - \lambda A)^{-1}$$

であるから，次の定理が証明されればよい。

Ł　2.　行列 A, B は

$$\sigma(A),\ \sigma(B) \; \subset \; (-1, 1)$$

を満たし，$JA \geq JB$ であるとき

$$-1 < \lambda < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad J(I - \lambda A)^{-1} \leq J(I - \lambda B)^{-1},$$

$$0 < \lambda < 1 \qquad \Longrightarrow \qquad J(I - \lambda A)^{-1} \geq J(I - \lambda B)^{-1}.$$

3. 定理 2 の証明 行列 A の inertia とは，以下のように定義される非負な整数の三つ組 $(\pi_-(A), \pi_0(A), \pi_+(A))$ のことである：

$$\pi_-(A) \equiv \text{左開半平面にある } A \text{ の固有値の個数},$$

$$\pi_0(A) \equiv \text{虚軸上にある } A \text{ の固有値の個数},$$

$$\pi_+(A) \equiv \text{右開平面にある } A \text{ の固有値の個数。}$$

ここで，固有値は（代数的）重複度を込めて数えるものとする。

A が selfadjoint のときは，$\pi_\pm(A)$ はそれぞれ A の正（負）の固有値の数であり，$\pi_0(A)$ は $\ker(A)$ の次元である。そして，A が selfadjoint で T が invertible のとき，A と T^*AT は同じ inertia を持つ，すなわち

$$\pi_-(T^*AT) = \pi_-(A), \quad \pi_0(T^*AT) = \pi_0(A), \quad \pi_+(T^*AT) = \pi_+(A).$$

次の結果は inertia 定理として知られている。(例えば [Horn -Johnson] Chap.2 §1 を参照)

補 題 2. 行列 A が虚軸上に固有値を持たない，すなわち $\pi_0(A) = 0$ ，必要十分条件は，invertible selfajoint H で

$$HA + A^*H > 0$$

を満たすものがある。このような H はどれも A と同じ inertia を持つ。

補 題 3. S, T が invertible selfadjoint で積 ST の固有値がすべて正であれば，S と T は同じ inertia を持つ。

(証明) $\pi_-(ST) = \pi_0(ST) = 0$ であるから，上の補題 2 より positive definite な H があり，

$$H \cdot ST + TS \cdot H > 0$$

となる。これは

$$(H^{\frac{1}{2}}SH^{\frac{1}{2}}) \cdot (H^{-\frac{1}{2}}TH^{-\frac{1}{2}}) + (H^{-\frac{1}{2}}TH^{-\frac{1}{2}}) \cdot (H^{\frac{1}{2}}SH^{\frac{1}{2}}) > 0$$

と同じなので，補題 2 により selfajoint $H^{\frac{1}{2}}SH^{\frac{1}{2}}$ と $H^{-\frac{1}{2}}TH^{-\frac{1}{2}}$ は同じ inertia を持つ。さらに S, T の selfajoint 性を使って $H^{\frac{1}{2}}SH^{\frac{1}{2}}$ と S, および $H^{-\frac{1}{2}}TH^{-\frac{1}{2}}$ と T は同じ inertia を持つことが判る。結局 S と T は同じ inertia を持つ。(証明終)

補 題 4. ([Smul'jan] を参照) S, T が invertible selfadjoint で，同じ inertia をもつとき

$$S \geq T \implies S^{-1} \leq T^{-1}.$$

(定理 2 の証明) まづ A, B の J-selfadjoint 性より，$J - \lambda AJ$, $J - \lambda BJ$ は selfadjoint である。仮定 $\sigma(A)$, $\sigma(B) \subset (-1, 1)$ より，

$$\sigma((J - \lambda AJ)J) = \sigma(I - \lambda A) \subset \mathbf{R}_+ \backslash \{0\}$$

$$\sigma((J - \lambda BJ)J) = \sigma(I - \lambda B) \subset \mathbf{R}_+ \backslash \{0\}$$

であるから，補題 2 より，$J-\lambda AJ$, J, $J-\lambda BJ$ は同じ inertia を持つ。

$JA \geq JB$ なら，$-1<\lambda<0$ にたいして

$$J-\lambda AJ \geq J-\lambda BJ$$

したがって，補題 4 により

$$\begin{aligned} J(I-\lambda A)^{-1} &= (J-\lambda AJ)^{-1} \\ &\leq (J-\lambda BJ)^{-1} = J(I-\lambda B)^{-1} \end{aligned}$$

同じようにして，$0<\lambda<1$ なら，

$$J(I-\lambda A)^{-1} \geq J(I-\lambda B)^{-1}.$$

(証明終)

4. 応用

簡単のため，引き続いて H として selfadjoint involution J を考えよう。

どの行列 S にたいして $S^*S \geq 0$ であり，$\sigma(S^*S) \subset \mathbf{R}_+$ となる。したがって modulus $|S| \equiv (S^*S)^{\frac{1}{2}}$ が定義できるわけである。ここで $t^{\frac{1}{2}}$ が $(0,\infty)$ での作用素単調関数であることから

$$S^*S \geq T^*T \implies |S| \geq |T|$$

となる。

これらの状況の J-類比を考えてみよう。$S^\# S$ は J-selfadjoint になるが，一般には $S^\# S \overset{J}{\geq} 0$ ではないし，$\sigma(S^\# S) \subset \mathbf{R}_+$ も保証されない。したがって $(S^\# S)^{\frac{1}{2}}$ は一般には，うまく定義できない。

行列 S が

$$\langle x,x\rangle \geq \langle Sx,Sx\rangle \qquad (x\in\mathcal{H})$$

を満たすとき，すなわち $I \geq S^*S$ のとき，S は contraction とよばれる。これとの類比から，

$$\langle x,x\rangle_J \geq \langle Sx,Sx\rangle_J \qquad (x\in\mathcal{H}).$$

のとき，すなわち $I \overset{J}{\geq} S^\# S$ のとき，S を J-contraction とよぼう。

次のことが知られている。

補題 5. ([Krein - Smul'jan] を参照)　S が invertible な J-contraction ならば，$\sigma(S^\# S) \subset \mathbf{R}_+\backslash\{0\}$.

したがって，invertible な J-contraction S にたいしては，Riesz-Dunford functional calculus を通して J-modulus $\mathbf{|}\,S\,\mathbf{|} \overset{def}{=} (S^\# S)^{\frac{1}{2}}$ を定義できる。$\mathbf{|}\,S\,\mathbf{|}$ は J-selfadjoint であり，$\sigma(\mathbf{|}\,S\,\mathbf{|}) \subset \mathbf{R}_+$ である。

定理 1 を使うと，次が示される。

定理 3. J が (indefinite) selfadjoint involution で，S, T は共に invertible な J-contraction であるとき，次の命題が成り立つ：

$$S^{\#}S \overset{J}{\geq} T^{\#}T \quad \Longrightarrow \quad |S| \overset{J}{\geq} |T|.$$

上の定理では S, T の invertible を仮定したが，invertible でない J-contraction に対しても J-modulus が自然に定義でき，定理 3 は invertible の条件なしで成り立つ。

5. 文献.

[1] 日合文雄・柳 研二郎　「ヒルベルト空間と線型作用素」1995 牧野書店

[2] R. Horn - Ch. Johnson, Topics in Matrix Analysis, 1991 Cambridge Univ. Press

[3] M.G. Krein - Ju.L. Smul'jan, J - polar representation of plus operators, Mat. Issled. 1(1966), no. 1, 172–210 (英訳) Amer. Math. Soc. Transl. (2) 85(1969), 115–143.

[4] Ju.L. Smul'jan, On inequalities between Hermitian operators, Mat. Zametki 49(1991), no. 4, 138–141 (英訳) Math. Notes 49(1991), no. 3–4, 423–425.