数理解析研究所講究録 1260 巻 2002 年 1-23

完備Riemann多様体上のcoarse幾何とDirac熱作用素*

上村　新吾[†]
慶應義塾大学大学院理工学研究科数理
Shingo KAMIMURA
Division of Mathematics
Graduate School of Science and Technology
Keio University

2002年1月15日

1 Introduction

閉多様体上の楕円型擬微分作用素に対する Atiyah-Singer の指数定理([1]) の拡張は、これまで様々な方向へ向けて様々な方法論に基づいてなされてきた。特にRoeは解析的指数に対する作用素環論的な考察を経て、Atiyah-Singer の指数定理を完備 Riemann 多様体にまで拡張した ([20])。Roe の指数定理においては特に空間が非コンパクトあるいは奇数次元の場合が重要である。

しかしこのときの一般化された指数はもはや位相的不変量ではなく、空間の無限遠の状況に左右されるものとなってしまった。Roe はこのことを説明するために coarse 構造と呼ばれる計量空間上のある意味での長域的構造を導入した。

今回は講演者自身の結果や問題意識をいくつか織り交ぜながら、Roe の coarse 指数定理の入門的な解説を行う。

---

*京大数理研研究集会『幾何学的力学系理論とその周辺』のための講究録。

[†]kamimura@math.keio.ac.jp

Coarse 指数定理の定式化は Connes の非可換幾何 ([6]) と Roe の coarse 幾何 ([20, 21]) というふたつの大きな枠組みの交わりにおいてなされる。大雑把に言うとまず前者の枠組みにおいては、空間 M に付随するある複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}(M)$ 上に M の幾何構造を反映させた作用素環

$$\mathcal{A}(M) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}(M))$$

を構成し（ここに $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体のなす C^*-環）、$\mathcal{A}(M)$ の解析的あるいは代数的構造と M の幾何的構造の対応を見ることになる。($\mathcal{H}(M)$ を経由しない場合もある。)。また後者においては計量空間の coarse 構造と呼ばれるある種の長域的な構造 (long-range, large-scale or delocalized structure)、あるいは無限遠の構造を見ることになる（したがって coarse 圏においては、有界集合上で起きていることは無視される)。

この coarse 圏における不変量としては、代数的位相幾何における Alexander-Spanier コホモロジー ([22]) の delocalized 版とでも言われるべき coarse コホモロジーが、新たなコホモロジー理論として登場する。coarse コホモロジーから Alexander-Spanier コホモロジーへは自然な準同型が存在するが、これが coarse 指数定理において幾何的不変量を与えることになる。

そしてこのふたつの幾何を結び付けるものとしては、完備 Riemann 多様体上の Dirac 熱作用素というものが極めて重要である。完備性の仮定から、解析的には完備 Riemann 多様体上の Dirac 作用素が本質的自己随伴作用素であるということが従い、また幾何的には計量連結性すなわち最短線が距離を実現するということが従うのだが、これらの事実はあとで見るように coarse 指数定理の定式化には不可欠なものとなる。

以下、定式化の粗筋を述べる。コンパクト Riemann 多様体上の楕円型擬微分作用素の Fredholm 指数は Atkinson の定理を経由して作用素環論的に捉え直すことが出来るのであるが、このときの作用素の Fredholm 指数はコンパクト作用素全体のなす C^*-環 $\mathcal{K}$ の K_0-群 $K_0(\mathcal{K})$ に値を取るという形で再定義される。実はこの $\mathcal{K}$ に対しては一見指数理論とは全く関係のないふたつの解釈を与えることが出来る ([20])。

ひとつは、Dirac 熱作用素をある種の functional calculus map を経由して近似しているような有界線形作用素全体からなる C^*-環として見れるということ。もうひとつは、核関数の台が対角集合の近傍に局在化しているような積分作用素（制御作用素）全体のなす $*$-代数 $Cont^*(M)$ の C^*-閉包として見れるということである。

そしてこの議論は非コンパクトな場合にも適用出来、そのようなC^*-環$C^*_{cont}(M)$をRoe代数と呼ぶ。

勿論Mがコンパクトのときは常に$C^*_{cont}(M) = \mathcal{K}$となっているのであるが、$M$が非コンパクトのときはそのそもDirac熱作用素がコンパクト作用素ではないので$C^*_{cont}(M) = \mathcal{K}$とはならない。このことからRoe代数は空間のなんらかの無限遠の情報を反映した作用素環であると考えられる。

完備非コンパクトRiemann多様体上のDirac熱作用素は先にも述べたようにもはやコンパクト作用素ではないので、言わんやtrace classなどでは尚更ない。したがってなんらかの意味でtraceの代用物なり一般化が必要になってくるのであるが、ここでConnesの巡回理論を使うことになる。巡回理論においては作用素のtraceはde Rham currentの非可換版とでも言うべき形で一般化されるのであるが、この一般化traceたちは我々の文脈においてはcoarseコホモロジーにより径数付けられることになる。その結果として、coarseコホモロジーの次元分だけ多くの指数定理が出来上がることになる。したがってそこから意味のある指数定理が取り出せるかどうかは、coarseコサイクルの選び方いかんにかかってくる。

2　解析的指数の作用素環論的考察

Atiyah-Singerの指数定理における解析的指数を、作用素環の枠組みにおいて捉え直すことから始める。まずはAtiyah-Singerの指数定理を簡単に復習しておこう。

2.1　Atiyah-Singerの指数定理

Theorem 2.1.1 (Atiyah-Singer[1]) まず、Mを閉Riemann多様体、E, FをM上のHermiteベクトル束、

$$D : W^r(E) := \overline{C^\infty(E)}^{\|\cdot\|_{W^r}} \longrightarrow W^{r-d}(F) := \overline{C^\infty(F)}^{\|\cdot\|_{W^{r-d}}}$$

をd階の楕円型擬微分作用素のSobolev拡張とする。次に、このDに対して、a-ind(D)及びt-ind(D)を

$$a\text{-ind}(D) := \dim(\ker(D)) - \dim(\operatorname{coker}(D))$$

$$t\text{-ind}(D) := \langle \pi_!(ch^*([\sigma_D])) \cup td(T^*M \otimes \mathbf{C}), [M] \rangle$$

と定義する。このとき、

$$a\text{-ind}(D) = t\text{-ind}(D)$$

が成り立つ。

ここに $[\sigma_D] \in K^0(T^*M)$ は D の主表象 σ_D が決める T^*M の K-コホモロジー類、

$$ch^0 : K^0(T^*M) \longrightarrow H^{even}_{dR,c}(T^*M; \mathbf{Q})$$

は偶数次のコホモロジー Chern 指標、$\pi_!$ は射影

$$\pi : T^*M \longrightarrow M$$

の Gysin 準同型、td は零切断

$$\iota : M \longrightarrow T^*M \otimes \mathbf{C}$$

による Chern 指標欠損を表す Todd 類のことである[1]。

2.2 Fredholm 作用素（の指数）と C^*-環（の K_*-理論）

閉 Riemann 多様体上の楕円型擬微分作用素の Sobolev 拡張は、parametrix の存在により Fredholm 作用素である。まず Fredholm 作用素の定義を述べる。ただし今回は有界なものしか扱わない。

Definition 2.2.1 (Fredholm 作用素) $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が

$$\mathrm{ran}(F) : closed$$

及び

$$\dim(\ker(F)),\ \dim(\mathrm{coker}(F)) < \infty$$

を満たすとき、F を Fredholm 作用素であると言う。

この定義を C^*-環の言葉に翻訳する。その前に C^*-環の定義を述べておく。作用素環論の入門的な解説書としては [8] を挙げておく。

Definition 2.2.2 (C^*-環) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の $*$-部分環 $\mathcal{A}$ が作用素ノルムに関して閉じているとき、$\mathcal{A}$ を C^*-環と言う。

---

[1] これは本質的には偶数次元の指数定理である。奇数次元の指数定理を含めた一般の場合については [2] を参照。

Remark 2.2.3 (Gel'fand-Naĭmark の定理) 作用素環論においては $\mathcal{H}$ を持ち出さずにより抽象的に C^*-環を定義するのが普通であるが、そのようにして定義された C^*-環も結局は上記で定義したものと等距離 $*$-同型、すなわち C^*-環として同型になる。

Example 2.2.4 (C^*-環の例) $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 自身は定義より明らか。また $\mathcal{H}$ 上のコンパクト作用素全体 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ も重要である。ちなみに $\dim(\mathcal{H}) = \aleph_0$ のときは、$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ における唯一の非自明な閉イデアルである。このときの $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ は、C^*-環の帰納系

$$M_n(\mathbf{C})\ (= \mathcal{B}(\mathbf{C}^n)) \hookrightarrow \begin{pmatrix} M_n(\mathbf{C}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset M_{n+1}(\mathbf{C})\ (= \mathcal{B}(\mathbf{C}^{n+1}))$$

の帰納極限 C^*-環

$$M_\infty(\mathbf{C}) = \varinjlim M_n(\mathbf{C})$$

としても得られる。この帰納系はあとで C^*-環の K_0-関手を定義するときにも使う。

また可換な例としては、局所コンパクト Hausdorff 空間 M 上の無限遠で消える連続関数全体

$$C_0(M) := \{\ f \in C(M) \mid f(\infty) = 0\ \}$$

が重要である。このときは上限ノルムが C^*-ノルムを与え、作用素としては $L^2(M)$ 上の掛け算作用素として実現される。

Theorem 2.2.5 (Atkinson) $F \in \mathcal{B}$（以下 $\mathcal{H}$ は省略する）が Fredholm 作用素であるということは、C^*-環の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

において

$$\pi(F) \in GL_1(\mathcal{Q})$$

であることと同値である。ここに $\mathcal{Q} := \mathcal{B}/\mathcal{K}$ は Calkin 環と呼ばれる商 C^*-環で、

$$\|\pi(A)\|_{\mathcal{Q}} := \inf\{\ \|A + K\|_{\mathcal{B}}\ ;\ K \in \mathcal{K}\ \}$$

がその C^*-ノルムを与える。

次に Fredholm 指数が C^*-環の K_*-群の言葉に翻訳出来ることを見よう。まずは Fredholm 指数の定義から述べよう。

Definition 2.2.6 (Fredholm 指数) Fredholm 作用素 $F \in \mathcal{B}$ に対してその Fredholm 指数を

$$\mathrm{ind}(F) := \dim(\ker(F)) - \dim(\mathrm{coker}(F))$$

で定義する。

そしてこの Fredholm 指数の重要な性質として次のようなものがある。

Proposition 2.2.7 (Fredholm 指数の homotopy 不変性 I) $\mathcal{F}$ を $\mathcal{H}$ 上の Fredholm 作用素全体とする。$\mathcal{F}$ には $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ から相対位相を入れておく。

$$\mathrm{ind}(F_1) = \mathrm{ind}(F_2) \Longleftrightarrow F_1 \overset{p.c.}{\sim} F_2 \ in\ \mathcal{F}$$

ここに $p.c.$ は、弧状連結を表す。

この性質を Atkinson の定理の延長線上で考えることが出来る。すなわち、

Proposition 2.2.8 (Fredholm 指数の homotopy 不変性 II) 位相群の帰納系

$$GL_n(\mathcal{Q}) \hookrightarrow \begin{pmatrix} GL_n(\mathcal{Q}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subset GL_{n+1}(\mathcal{Q})$$

の帰納極限位相群を

$$GL_\infty(\mathcal{Q}) := \varinjlim GL_n(\mathcal{Q})$$

とすると、

$$F_1 \overset{p.c.}{\sim} F_2 \ \ in\ \mathcal{F} \ \Longleftrightarrow \pi(\underrightarrow{F_1}) \overset{p.c.}{\sim} \pi(\underrightarrow{F_2}) \ \ in\ GL_\infty(\mathcal{Q})$$

が成り立つ。

このことから結局、$\pi_0(GL_\infty(\mathcal{Q}))$ を考えればよいということになり、実はこれが $K_1(\mathcal{Q})$ の定義そのものなのである。したがってここが Fredholm 作用素の本質的な棲家であると言える。

ではどうやってそこからFredholm指数

$$\mathrm{ind}(F) = \dim(\ker(F)) - \dim(\mathrm{coker}(F))$$

という数を取り出すのか？それを視覚化するためには、C^*-環の短完全系列からK_*-群の長完全系列に話しを進めなければならない。その前にC^*-環のK_*-関手の定義をしておこう。

Definition 2.2.9 (C^*-環のK_0-関手) 単位的C^*-環$\mathcal{A}$に対して、位相群の帰納系

$$M_n(\mathcal{A})\ (= M_n(\mathbf{C})\otimes\mathcal{A}) \hookrightarrow \begin{pmatrix} M_n(\mathcal{A}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \subset M_{n+1}(\mathcal{A})\ (= M_{n+1}(\mathbf{C})\otimes\mathcal{A})$$

の帰納極限位相群

$$\varinjlim M_n(\mathcal{A}) = \mathcal{K}\otimes\mathcal{A} \quad \textbf{(2.2.4)}$$

として出てくるテンソル積C^*-環の中の射影元全体を

$$P(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$$

とおく。このとき、その連結成分全体のなす可換モノイド

$$\pi_0(P(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A})$$

のGrothendieck群

$$G(\pi_0(P(\mathcal{K}\otimes\mathcal{A}))$$

を、単位的C^*-環$\mathcal{A}$のK_0-群と言う。

$\mathcal{A}$が非単位的C^*-環の場合は、その単位化C^*-環$\mathcal{A}^{+1}$ [2]が自然に誘導するC^*-環の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A}^{+1} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C} \longrightarrow 0$$

---

[2]非単位的C^*-環$\mathcal{A}$の単位化C^*-環$\mathcal{A}^{+1}$は、ベクトル空間としては

$$\mathcal{A}^{+1} := \mathcal{A}\oplus\mathbf{C}$$

であり、これに積を

$$(A,\lambda)(B,\mu) := (AB+\lambda B+\mu A, \lambda\mu), \quad A,B\in\mathcal{A}, \ \lambda,\mu\in\mathbf{C}、$$

対合を

$$(A,\lambda)^* := (A^*,\bar{\lambda})、$$

C^*-ノルムは、(A,λ)をBanach環$\mathcal{A}$上の有界線形作用素だと思ってやることにより、

$$\|(A,\lambda)\|_{\mathcal{A}^+} := \sup\{\|AB+\lambda B\|_{\mathcal{A}} \ \ s.t. \ \ \|B\|_{\mathcal{A}}\leq 1\}$$

で定めてやる。このとき$(0,1)$が$\mathcal{A}^{+1}$の乗法単位元になる。

が分裂することから、π の K_0-関手

$$\pi_0 : K_0(\mathcal{A}^{+1}) \longrightarrow K_0(\mathbf{C})$$

の核で $\mathcal{A}$ の K_0-群を定義する。

$$K_0(\mathcal{A}) := \ker(\pi_0)$$

Definition 2.2.10 (C^*-環の K_1-関手) $\mathcal{A}$ が単位的 C^*-環のときは

$$K_1(\mathcal{A}) := \pi_0(GL_\infty(\mathcal{A})) = \pi_0(U_\infty(\mathcal{A})) \quad \textbf{(2.2.8)}、$$

$\mathcal{A}$ が非単位的のときは、K_0 のときと同様に π の K_1-関手で定義する。

$$K_1(\mathcal{A}) := \ker(\pi_1) \quad \textbf{(2.2.9)}$$

では K_*-群の長完全系列を見てみよう。C^*-環の短完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{\iota} \mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \longrightarrow 0$$

は、その K_*-群の長完全系列を誘導する。しかし位相的 K-理論同様に Bott 周期性[3]が言えてしまうので、結局 6 項完全系列に収まる。

$$\begin{tikzcd}
K_0(\mathcal{K}) \arrow[r, "\iota_*"] & K_0(\mathcal{B}) \arrow[r, "\pi_*"] & K_0(\mathcal{Q}) \arrow[d, "\partial_{exp}"] \\
K_1(\mathcal{Q}) \arrow[u, "\partial_{ind}"] & K_1(\mathcal{B}) \arrow[l, "\pi_*"] & K_1(\mathcal{K}) \arrow[l, "\iota_*"]
\end{tikzcd}$$

ここで ∂_{ind} は、Fredholm 作用素 $F \in \mathcal{B}$ に対して $\ker(F)$ 及び $\mathrm{coker}(F)$ への射影をそれぞれ P, Q とすると、

$$\partial_{ind} : K_1(\mathcal{Q}) \ni [\pi(F)] \longmapsto [P] - [Q] \in K_0(\mathcal{K})$$

[3] C^*-環 $\mathcal{A}$ に対して、その懸垂

$$S\mathcal{A} := C_0(\mathbf{R}; \mathcal{A}) = C_0(\mathbf{R}) \otimes \mathcal{A}$$

は再び C^*-環となる。これを用いて一般の K_n-群を

$$K_n(\mathcal{A}) := K_0(S^n \mathcal{A})$$

と定義すると、$K_1(\mathcal{A})$ は本文の定義と一致し、更に、

$$K_{n+2}(\mathcal{A}) = K_n(\mathcal{A})$$

が成り立つ (Bott 周期性)。

で与えられるのもである。

このことより

$$\mathrm{ind}(F) = \mathrm{Tr}(\partial_{ind}([\pi(\underset{\longrightarrow}{F})]))$$

であることが判る。それで、この準同型（実は同型）は index map と呼ばれている。

作用素環の K-理論に関しては [4] も参照されたい。

2.3 Dirac 熱作用素の super trace

では与えられた F に対して $\ker(F)$ 及び $\mathrm{coker}(F)$ への射影は具体的にどのような形をしているのだろうか？

偶数次元閉 Riemann 多様体 M 上の Clifford 束 S 上の Dirac 作用素 D は、次数付け作用素

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

により、

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}, \quad where\ D^\pm : C^\infty(S^\pm) \to C^\infty(S^\mp)$$

と分裂していた。このとき、先の射影の具体的表示は Dirac 熱作用素が与えていたことを思い出そう。すなわち

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}(D^+) &= \dim(\ker(D^+)) - \dim(\mathrm{coker}(D^+)) \\ &= \dim(\ker(D^+)) - \dim(\ker(D^-)) \end{aligned}$$

において、$\ker(D^+)$ 及び $\ker(D^-)$ への射影をそれぞれ P^+ 及び P^- とすると、

$$\lim_{t\to+\infty} \epsilon e^{-tD^2} = \begin{pmatrix} P^+ & 0 \\ 0 & -P^- \end{pmatrix}$$

となっていたのであった。

元々は $0 < t < \infty$ に対して

$$a\text{-}\mathrm{ind}(D^+) = \mathrm{Tr}(\epsilon e^{-tD^2})$$

が成り立つのであったが ([16])、上述の考察から $t = \infty$ でも正しいと言

さて、コンパクト Riemann 多様体上の Dirac 熱作用素は有界線形作用素であり、特に compact 作用素である。

$$e^{-tD^2} \in \mathcal{K}$$

この有界線形作用素であるという部分に関しては、多様体を完備非コンパクト Riemann 多様体にしても変わらないのであるが、後半の性質は残念ながら失われてしまう。そこでは $\mathcal{K}$ に代わり得るものとして Roe 代数というものを導入するのであるが、ここで一旦、解析的指数に対する考察を中断する。Introduction で指摘したように、空間の長域的構造に対する考察が必要だからである。

3 Coarse 幾何

長域的幾何学ということであるならば、取り分け Gromov の擬等長幾何学[4]（あるいは幾何学的群論）が有名であろう ([9])。これと coarse 幾何学との関係については, 付録および [12] に譲ることにする。いずれの場合も計量空間 (metric space) を対象とし、例えばコンパクト Riemann 多様体 (M,g) に対して、その普遍 Riemann 被覆 $(\widetilde{M},\tilde{g})$ と語計量を入れた基本群 $(\pi_1(M),d_w)$ とを同型とみなすような幾何学である。

3.1 Coarse 構造

Definition 3.1.1 (coarse 写像) $(M,d),(M',d')$ を計量空間とする。写像

$$f : M \longrightarrow M'$$

は、

$$^{\forall}B \subset M' : \text{有界} \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset M : \text{有界} \quad (\text{計量的固有性})$$

および

$$^{\forall}\delta > 0, ^{\exists}\delta' > 0 \ s.t.$$

$$d(x,y) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),f(y)) < \delta' \quad (\text{一様拡大性})$$

を満たすとき、coarse 写像と言う[5]。

[4]擬等長という日本語は一応、quasi-isometry の訳語ということになっている。

[5]計量的固有性は、位相空間の間の連続写像が固有である（コンパクト集合の引き戻しが再びコンパクト集合になる）ということを、計量の言葉で言い換えたものである。また、一様拡大性の定義と一様連続性の定義とは似て非なるものであることに注意。

Example 3.1.2 $\mathbf{R}^2$ のノルム写像は coarse 写像であるが、座標射影は coarse 写像にはならない。

Definition 3.1.3 (coarse 同値) 集合 S から計量空間 (M,d) への写像

$$f,g:S\longrightarrow(M,d)$$

が close であるとは、

$$\sup_{x\in S}\{d(f(x),g(x))\}<\infty$$

が成り立つときを言う。特にふたつの coarse 写像 f,g が close であるとき、f と g は coarse 同値であると言い、$f\sim g$ と書く。

Definition 3.1.4 (coarse 同型) 計量空間 $(M,d),(M',d')$ が coarse 同型であるとは、

$${}^{\exists}f:M\longrightarrow M',\ f':M'\longrightarrow M:\text{coarse 写像 } s.t.$$

$$f'\circ f\sim id_M,\ f\circ f'\sim id_{M'}$$

と出来るときを言う。

Remark 3.1.5 直径が有限な計量空間は一点と coarse 同型である。

計量の定める位相構造は、実は計量の情報を著しく損っている。一方 coarse 構造は計量に関しては次のような意味で位相構造と双対的と言える。つまり、

Remark 3.1.6 (位相構造と coarse 構造) 計量空間 (M,d) に対して、

$$d^n(x,y):=\min\{d(x,y),1/n\}$$

なる計量が同じ位相構造を定めるのに対して、

$$d_n(x,y):=\max\{d(x,y),n\}\quad(x\neq y)$$

なる計量は同じ coarse 構造を定める。

言うまでもなく、前者はホモトピーに他ならない。一方、後者はホモトピーで切り落としてしまった非有界な外側は残し、有界な内側の方を無視している。つまり、位相構造が計量の短域的構造を取り出して来るのに対して、coarse 構造の方は計量の長域的構造を取り出して来ていると言える。これが計量に関して coarse な（粗い）構造（粗計構造）と言われる所以である。

3.2 Coarse cohomology

位相構造との比較から、coarse 構造というのは計量構造のうち scale の小さい部分を切り落としたものだ、ということが直観的に了解出来たと思われる。coarse 構造上でコホモロジー理論を展開する際にもこの直観が重要となる。

つまり coarse コホモロジーとは一言で言えば、Alexander-Spanier コホモロジーの計量に関する双対的な対応物である、ということになる。

Definition 3.2.1 (制御集合 (controlled set)) 計量空間 (M, d) の $(n+1)$-重直積空間 M^{n+1} における部分集合 S が制御集合であるとは、M^{n+1} における各第 i 座標射影たち

$$\pi_i : M^n \ni (x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \longmapsto x_i \in M \quad (0 \leq i \leq n)$$

の S への制限たち $\pi_i|_S$ が互いに close であることと定義する。

Definition 3.2.2 (Alexander-Spanier コホモロジー) (M, d) を計量空間とする。M^{q+1} から $\mathbf{R}$ への関数で台が制御集合になっているもの全体のなす $\mathbf{R}$ 上の線形空間 $CA^q(M)$ をコチェイン群とし、

$$(\delta_A^q \varphi)(x_0, \ldots, x_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \varphi(x_0, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{q+1})$$

を $CA^q(M)$ から $CA^{q+1}(M)$ へのコバウンダリー作用素とするコチェイン複体のコホモロジーを Alexander-Spanier コホモロジーと言い、$HA^*(M)$ と書く。これはまさに計量空間の短域的構造しか見ていないようなコホモロジーである。

Remark 3.2.3 (位相的 Alexander-Spanier コホモロジー ([22])) 実は Alexander-Spanier コホモロジーはもっと一般に位相空間 M に対して定義される。そのときは制御集合の代わりに局所零という概念を用意する。ここに関数 $\varphi : M^{q+1} \longrightarrow \mathbf{R}$ が局所零であるとは、M のある開被覆 $\mathcal{U}$ があって、φ が

$$\mathcal{U}^{q+i} := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^{q+1} \subset M^{q+1}$$

上で消えるときをいう。

Remark 3.2.4 $HA^*(M)$ は $\check{H}^*(M)$ や $H^*_{dR}(M)$ と同型である。

これに対して対角集合とは横断的な方向において同様なことをやってやれば、長域的な構造を反映したコホモロジーが得られるのではないか?と考えるのは自然であろう。

Definition 3.2.5 (coarse cohomology) M^{q+1} から $\mathbf{R}$ への関数で、その台を任意の制御集合で切り落としたものが相対コンパクトになっているようなものを $CX^{q+1}(M)$ と書く。

$CX^*(M)$ と δ_X^* (これは Alexander-Spanier コバウンダリー作用素と同じものであるが、敢えて記号を取り直した) からなるコチェイン複体から得られるコホモロジーを、coarse コホモロジーと言い、$HX^*(M)$ と書く。

coarse コホモロジーは、coarse 不変量である。

Remark 3.2.6 先の定義において、CA^* や CX^* のコチェインに対しては何の正則性も課されていなかった。実は、smooth, continuous, Borel といった正則性のもとで得られるコホモロジーたちは、正則性を課さなかったときのものと全て同型になる。

Definition 3.2.7 (位相的指標) $HX^q(M)$ の台を任意の制御集合 S で切り落としてやることにより[5]、$HA_c^q(M)$ すなわち $H_{dR,c}^q(M)$ への準同型が得られる。この準同型を位相的指標と言い、χ^t と書く。すなわち χ^t は、

$$\chi^S : CX^q(M) \ni \varphi \longmapsto \varphi|_S \in CA_c^q(M)$$

と

$$\chi^{dR} : CA_c^q(M) \cong \widehat{\bigotimes_{q+1}} C_c^\infty(M) \ni f_0 \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_q \longmapsto$$

$$f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_q \in \Omega^q(M)$$

の合成である。

---

[5] この言い方は誤解を招くと思われる。正確な記述は煩雑になるので要点だけを述べる。制御集合 S の代わりに空間の良い被覆 $\mathcal{U}_i$ をひとつ取り、$\mathcal{U}_i$ に対するコンパクト台を持つ実係数コホモロジーを $H_c^*(\mathcal{U}_i; \mathbf{R})$ とする。そして S を動かす代わりに良い被覆の帰納極限

$$\varinjlim H_c^*(\mathcal{U}_i; \mathbf{R})$$

を取る。これがコンパクト台を持つ実係数 Čech コホモロジー $\check{H}_c^*(M; \mathbf{R})$ であり、これは多様体の場合は $HA_c^*(M; \mathbf{R})$ や $H_{dR,c}^*(M; \mathbf{R})$ と同型となる。ちなみに射影極限の方は $HX^*(M; \mathbf{R})$ 自身と関係してくる。

4 Roe代数とcoarse指数

以後、簡単のため話しをDirac作用素に限る。

Definition 4.0.8 (Roe代数) Mを完備Riemann多様体、SをDirac束とする。このとき$L^2(S)$上の有界線形C^∞級積分作用素で、その核関数の台が制御集合であるものを制御作用素と言う。

制御作用素の全体は$*$-代数をなすが、それを$Cont^*(M)$と書く。そして$Cont^*(M)$のC^*-閉包をRoe代数と言い、$C^*_{cont}(M)$と書く。

Roe代数のK_*-群はcoarse不変量である。

Remark 4.0.9 (コンパクトRiemann多様体上のRoe代数) コンパクトRiemann多様体MのRoe代数$C^*_{cont}(M)$は$\mathcal{K}(L^2(S))$に他ならない。よって、Dirac熱作用素はRoe代数に含まれる。

実は一般の完備Riemann多様体上のDirac熱作用素も、Roe代数に含まれることが以下のようにして解る。**Introduction**も参照。

Proposition 4.0.10 (有限伝播性 [5]) M, S, Dを上記の通りとする。このときM上の波動作用素$e^{\sqrt{-1}tD}$は有限伝播性を有する。すなわちある定数$c > 0$が存在し任意のtに対して、

$$\mathrm{supp}(s_t) \subset N_{c|t|}(\mathrm{supp}(s_0))$$

ここに、初期条件$s_0 \in C_c^\infty(S)$に対して$s_t := e^{\sqrt{-1}tD}s_0$である。つまり、時間発展は一定である。

Proposition 4.0.11 (functional calculus map[19]) 先の有限伝播性により、$\mathcal{S}(\mathbf{R})$上のFourier反転公式を使った次のfunctional calculus map

$$\rho_{odd} : \mathcal{F}^{-1}(C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}})) \longrightarrow Cont^*(M)$$

$$f \longmapsto \rho_{odd}(f) := f(D) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\xi) e^{\sqrt{-1}\xi D} d\xi$$

が存在し[6]、更にC^*-環の準同型

$$\overline{\rho_{odd}} : C_0(\mathbf{R}) \longrightarrow C^*_{cont}(M)$$

[6]ここで逆Fourier変換$\mathcal{F}^{-1}$に対して、$\mathcal{F}^{-1}(C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}})) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \mid \hat{f} \in C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}})\}$であり、包含関係$\mathcal{F}^{-1}(C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}})) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset C_0(\mathbf{R})$において、前の2つは最後のものに上限ノルムに関して稠密に入っている。

にまで拡張する。偶数次元の場合は、

$$\overline{\rho_{even}} : C_0(\mathbf{R})\times_\alpha \mathbf{Z}_2 \cong \mathcal{E}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathcal{O}\otimes\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow C^*_{cont}(M)$$

が、$f_e, f_\epsilon \in \mathcal{F}^{-1}(C_c^\infty(\widehat{\mathbf{R}}))$ に対して

$$\rho_{even}(f_e U_e + f_\epsilon U_\epsilon) \ := \ f_e(D)e + f_\epsilon(D)\epsilon,$$

で定義される[7]。

Definition 4.0.12 (coarse 指数) 先の functional calculus map を K_*-群に持ち上げたものも同じ記号で書き、それを指数準同型と言う。
$K_0(C_0(\mathbf{R})\times_\alpha \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}, K_1(C_0(\mathbf{R})) = \mathbf{Z}$ のそれぞれの生成元 P_g, U_g の像を D の coarse 指数 c-ind(D) を定義する。すなわち、

$$c\text{-ind}(D) := \begin{cases} \overline{\rho_{even}}(P_g) \in K_0(C^*_{cont}(M)) \\ \overline{\rho_{odd}}(U_g) \in K_1(C^*_{cont}(M)). \end{cases}$$

ここに、$C_0(\mathbf{R}) \times_\alpha \mathbf{Z}_2$ の射影作用素 $1/(1+x^2)\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して

$$P_g := \left[\frac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \in K_0(C_0(\mathbf{R}) \times_\alpha \mathbf{Z}_2)$$

が、また $C_0(\mathbf{R})$ のユニタリー作用素 $(x+\sqrt{-1})/(x-\sqrt{-1}) - 1$ に対して

$$U_g := \left[\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}} - 1\right] \in K_1(C_0(\mathbf{R}))$$

がそれぞれ生成元となる。幾何学的には、

$$\frac{1}{1+x^2}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$$

[7]ここに、$C_0(\mathbf{R})\times_\alpha \mathbf{Z}_2$ は $C_0(\mathbf{R})$ に対して次数付け作用素 ϵ の存在を反映させた接合積 C^*-環である。これは、二次巡回群 $\mathbf{Z}_2 := \{e, \epsilon\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ の $C_0(\mathbf{R})$ 上の群環 $C_0(\mathbf{R})[\mathbf{Z}_2]$ における積を、通常の畳み込み積 $*$ で考える代わりにそれを作用

$$\alpha : \mathbf{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(C_0(\mathbf{R}))$$

で捻った α-接合積 $*_\alpha$ で考えたものである。このとき、この接合積 C^*-環は $\mathbf{Z}_2$ のユニタリー表現 U から来ていると思えるのだが、接合積の入門的な解説は [8] に譲る。また、$\mathcal{E}, \mathcal{O}$ は $C_0(\mathbf{R})$ の偶関数全体と奇関数全体のことである。

は、x を $\mathbf{R}$ 上の線形変換と見なしたときの x の $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ におけるグラフ射影であり、

$$\frac{x+\sqrt{-1}}{x-\sqrt{-1}}$$

は $\mathbf{R}$ から $\mathbf{C}$ への写像度 $+1$ の Cayley 写像に他ならない。

Definition 4.0.13 (巡回コホモロジー) Connes は任意の $(C^*$-$)$ 代数 $\mathcal{A}$ に対して trace の一般化を試み、巡回コホモロジー $HC^*(\mathcal{A})$ を導入した。それは trace を巡回的多重線形汎関数として捉え直すことにより得られる。コホモロジーの次数付けは線形汎関数の多重性で付けてやる。代数上の多重線形写像のコホモロジーとしては Hochschild コホモロジー ([14]) が知られているが、標語的には巡回コホモロジーとは「Hochschild コホモロジー＋巡回不変性」ということになる。つまり、巡回不変性

$$\tau(A_q, A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}) = (-1)^q \tau(A_0, A_1, \ldots, A_{q-1}, A_q)$$

を満たす $\mathcal{A}$ 上の $(q+1)$ 重線形汎関数全体のなすコチェイン群を $CC^{q+1}(\mathcal{A})$、コバウンダリー作用素を

$$(\delta_C^q \tau)(A_0, \ldots, A_{q+1}) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \tau(A_0, \ldots, A_i A_{i+1}, \ldots, A_{q+1})$$

$$+ (-1)^{q+1} \tau(A_{q+1}A_0, A_1, \ldots, A_q)$$

と定義した複体 $(CC^*(\mathcal{A}), \delta_C)$ のコホモロジー群 $HC^*(\mathcal{A})$ として得られる。ちなみに $HC^0(\mathcal{A})$ の元は

$$\tau(BA) = \tau(AB)$$

を満たしていることに注意しよう。

Definition 4.0.14 (巡回的指標) $\varphi \in HX^q(M)$ に対して次のような $C^*_{cont}(M)$ 上の巡回コチェイン（trace の一般化）を

$$\tau_\varphi(A_0, \ldots, A_q) := \int_{M^{q+1}} k_{A_0}(x_0, x_1) \cdots k_{A_q}(x_q, x_0) \varphi(x_0, \ldots, x_q) dx_0 \cdots dx_q$$

で定める。ここで φ を τ_φ に対応させる写像、

$$\chi^c : HX^q(M) \to HC^q(C^*_{cont}(M))$$

を巡回的指標と言う。

Definition 4.0.15 (φ-coarse 指数) これを用いて D の $\varphi \in HX^q(M)$ による coarse 指数 $c\text{-ind}_\varphi(D)$ を以下のように定義する。

$$c\text{-ind}_\varphi(D) := \langle c\text{-ind}(D), \chi^c(\varphi)\rangle$$

$$:= \begin{cases} \tau_\varphi(c\text{-ind}(D), \ldots, c\text{-ind}(D)) & \text{if } q, \dim M : even \\ \tau_\varphi(c\text{-ind}(D)^{-1} - 1, c\text{-ind}(D) - 1, & \\ \quad \ldots, c\text{-ind}(D)^{-1} - 1, c\text{-ind}(D) - 1) & \text{if } q, \dim M : odd \end{cases}$$

ここに $\langle , \rangle$ は Connes の pairing と呼ばれるものであるが、このままでは殆ど計算不可能である。

5 Coarse 指数定理とその応用

以上の準備のもとに、以下の coarse 指数定理が成り立つ。Atiyah-Singer のものと比較されたい。また、応用に関しては講演者の結果である。

5.1 Coarse 指数定理

Theorem 5.1.1 (Coarse 指数定理 [20]) これまでの設定のもとに次が成り立つ。

$$c\text{-ind}_\varphi(D) = c_q\langle \chi^t(\varphi) \cup \pi_!(ch^*(\sigma_D)) \cup td(M), [M]\rangle$$

ここに、左辺の c_q は $\varphi \in HX^q(M)$ の次数によって決まる定数であり、具体的には

$$c_q = \frac{(q/2)!}{q!(2\pi i)^{q/2}} \quad \text{if } q,\ \dim M : even$$

$$c_q = \frac{\{(q+1)/2\}!}{q!(2\pi i)^{(q+1)/2}} \quad \text{if } q,\ \dim M : odd$$

となっている。

証明は局所指数定理を使う ([7])。

5.2 Coarse 指数定理の応用

Theorem 5.2.1 (自明ベクトル束に対する積公式 [11]) N を偶数次元閉 Riemann 多様体、$M := N \times \mathbf{R}^r$ を N 上の自明ベクトル束、D_M, D_N をそ

れぞれ M 及び N 上の Dirac 作用素とする。このとき次の積公式が成り立つ。

$$c\text{-ind}_{\varphi_N}(D_M) = c\text{-ind}_{\varphi_g}(D_{\mathbf{R}^r})\cdot a\text{-ind}(D_N),$$

ここに φ_N は N の M における Poincaré 双対 $pd(N)$、右辺の a-ind は通常の Fredholm 指数である。また φ_g は $HX^r(\mathbf{R}^r)$ の生成元であり、

$$c\text{-ind}_{\varphi_g}(D_{\mathbf{R}^r}) = c_r$$

である。

証明では当然、$M := N\times\mathbf{R}^r$ と $\mathbf{R}^r$ が coarse 同型であるということを使うのだが、取り分け次のふたつの補題が重要。あとは代数的位相幾何の初等的事実を使う。また、この定理は [19] における主定理の一般化である。

Lemma 5.2.2 (M 上の位相的指標) M 上の位相的指標は同型である。

$$\chi^t : HX^r(M) \xrightarrow{\cong} H^r_{dR,c}(M)$$

Lemma 5.2.3 ($HX^r(\mathbf{R}^r)$ の生成元) $HX^r(\mathbf{R}^r)$ の生成元 φ_g は、$HX^1(\mathbf{R}^1)$ の生成元

$$\phi_g(x_0,x_1) = \begin{cases} 0, & for\ x_0 \geq 0, x_1 \geq 0 \\ 1, & for\ x_0 < 0, x_1 > 0 \\ 0, & for\ x_0 \leq 0, x_1 \leq 0 \\ -1, & for\ x_0 > 0, x_1 < 0 \end{cases}$$

の r 回のカップ積 $\cup^r\phi_g$ となっている。一般に、$\phi\in CX^p(M), \psi\in CX^q(N)$ のカップ積 $\varphi\cup\psi \in CX^{p+q}(M\times N)$ は、

$$(\varphi\cup\psi)((x_0,y_0),...,(x_{p+q},y_{p+q})) := \varphi(x_0,...,x_p)\psi(x_p,...,x_{p+q})$$

と定義され、これはコホモロジーのレベルでも意味を持つ。ちなみに ϕ_g は、Heaviside 関数 $h(x) := 0\ (x<0),\ 1\ (0\leq x)$ を仮想的なポテンシャルとして持つ。つまり $h\notin CX^0(\mathbf{R})$ ではあるが、$\delta_X h = \phi_g$ となっている。

このように $\mathbf{R}^n$ 上の coarse コホモロジーの生成元は非常に綺麗な特異性を持っている。一方、$\mathbf{R}^n$ 上には Riesz 変換という典型的な特異積分作用素がある。次の定理はこの両者を関係付けるものである。

Theorem 5.2.4 ($HX^n(\mathbf{R}^n)$ **の生成元と Riesz 変換** [11])

$$(R_i f)(x) := \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{2}{\sqrt{-1}\mathrm{vol}(S^n)}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{|x_i-y_i|}{|x-y|^{n+1}}f(y)dy$$

$$\mathrm{vol}(S^n) = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma((n+1)/2)$$

を $L^2(\mathbf{R}^n)$ 上の Riesz 変換[8] c_i を $\mathbf{R}^n$ 上の標準的な Clifford 作用とする。このとき Clifford-Riesz 変換 $F := \sum c_i R_i$ [9]に対して、

$$c\text{-ind}_{\varphi_g}(D_{\mathbf{R}^n}) = \langle \tau_{\sigma(F)}, c\text{-ind}(D_{\mathbf{R}^n})\rangle$$

ここに $\tau_{\sigma(F)}$ は Fredholm 加群 $(Cont^*(\mathbf{R}^n), F, L^2(\mathbf{R}^n))$ 上の標準的な巡回 cocycle である。

---

[8] ここで定義した Riesz 変換は、[23] などで扱われている通常の Riesz 変換とは $\sqrt{-1}$ 倍だけズレていることに注意。上記の場合、$\hat{}$ で Fourier 変換を表すことにすると、

$$\widehat{R_i f}(\xi) = \xi_i/|\xi|\widehat{f(\xi)} \quad (\sigma(R_i) = \xi_i/|\xi|)$$

となることから、R_i はノルム 1 の自己随伴作用素で平行移動と可換であることが解る。更に

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^2 = 1.$$

が成り立つ。

[9] 実は

$$D_{\mathbf{R}^n} = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{(n)}\frac{1}{\sqrt{-1}}\frac{\partial}{\partial x_i} \quad on \quad L^2(\mathbf{R}^n)\otimes\mathbf{C}^{[n/2]}$$

に対して $F = \mathrm{sgn}(D_{\mathbf{R}^n})$ となっている。ここに、$\mathrm{sgn}(x) := x/|x|$ $(x\in\mathbf{R})$ は符号関数である（ただし、$\mathrm{sgn}(0) = 1$ とする）。また、γ-行列は次のようにして決める。まず $\nu = 2^{[n/2]}$ とおく。$n = 1$ すなわち $\nu = 1$ のときは、

$$\gamma_1^{(1)} := 1_{1\times 1}$$

とする。n が奇数のときは、帰納的に

$$\gamma_i^{(n+2)} := \begin{pmatrix} 0_{\nu\times\nu} & \gamma_i^{(n)} \\ \gamma_i^{(n)} & 0_{\nu\times\nu}\end{pmatrix} \quad for \quad 1\le i\le n$$

$$\gamma_{n+1}^{(n+2)} := \begin{pmatrix} 0_{\nu\times\nu} & -\sqrt{-1}1_{\nu\times\nu} \\ \sqrt{-1}1_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu}\end{pmatrix}, \quad \gamma_{n+2}^{(n+2)} := \begin{pmatrix} 1_{\nu\times\nu} & 0_{\nu\times\nu} \\ 0_{\nu\times\nu} & -1_{\nu\times\nu}\end{pmatrix}$$

と決める。n が偶数のときは、

$$\gamma_i^{(n)} := \gamma_i^{(n+1)} \quad for \quad i = 1,\ldots,n+1$$

A Large-scale Geometry

第3節の冒頭で述べたように、コンパクトRiemann多様体の普遍Riemann被覆とその語計量付きの基本群とを対等に扱う幾何学として、Roeのcoarse幾何学の他にGromovの擬等長幾何学（幾何学的群論[10]）がある。これらは密接に関係しているし、実際に相互参照し合っている[11]。

Definition A.0.5 (擬等長写像) $(M,d),(M',d')$を計量空間とする。写像

$$f: M \longrightarrow M'$$

は、

$$\exists \mu > 0, \sigma \geq 0 \ s.t.$$

$$\frac{1}{\mu}d(x,y) - \sigma \leq d'(f(x),f(y)) \leq \mu d(x,y) + \sigma \quad \forall x,y \in M$$

を満たすとき、(μ,σ)-擬等長写像であると言う。

これは等長写像と違い、一般に連続でも単射でもない[12]。しかしfが概全射、すなわち

$$\exists r > 0 \ s.t. \ M' \subset N_r(f(M))$$

となっていれば、ある$\mu' > 0, \sigma' \geq 0$に対する(μ',σ')-擬等長写像

$$f': M' \longrightarrow M$$

が存在する。これをfの概逆写像と言い、このときM, M'は擬等長同型であると言う。

しつこいようだが、コンパクトRiemann多様体の基本群と普遍Riemann被覆は、互いに擬等長同型かつcoarse同型である[13]。coarse同型との違いを一言で言えば、擬等長ならばcoarse同型であるが逆は必ずしも正しくない、ということだろう。例えば、$\mathbf{H}^n$と$\mathbf{R}^n$は擬等長ではないがcoarse

---

[10]幾何学的群論に至る経緯については、Mostow([17])やMargulis([15])なども合わせて参照されたい。

[11]どうでもいいことだが、large-scale geometry関連の論文では、著者達が相互参照し合っているにも拘らず、rough-isometry, pseudo-isometry, quasi-isometry, coarse-isometryなどのterminologyが未だに統一されていない（する気もないらしい）。

[12]coarse写像の場合も、一般には連続でも単射でもないという点では同じである。

[13]コンパクト多様体の基本群は全て有限生成である。生成系をひとつ決めれば語計量が定まるが、擬等長類やcoarse型は生成系の取り方によらない。

型は一致する[14]。これは残念なことかもしれない。しかし、Roe の coarse 幾何は C^*-環論と相性がよい。この場合の C^*-環論とは、群や空間を直接考える代わりに、その上の群環や核関数環を考えるということである。

実は、積分作用素の台の概念を一般の有界線形作用素に拡張することにより、Roe 代数は一般の計量空間に対しても定義出来る。したがって、語計量付きの群に対しても、群環から核関数のなす代数へと発想を切り換えることにより Roe 代数が得られる。実際、コンパクト Riemann 多様体の普遍 Riemann 被覆の Roe 代数と語計量付きの基本群の Roe 代数とは、少なくとも K_*-群のレベルでは一致する。

このことは何を意味するのであろうか？例えば、coarse 理論、作用素環論および指数理論を使った Brooks 型の定理の可能性が挙げられる[15]。実際、被約群 C^*-環を使って従順群の概念が完全群[16]という概念に拡張され、それは Roe 代数の言葉に翻訳される[17]。

参考文献

[1] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators I*, Ann. Math., **87**(1968), 484-530.

[2] P. Baum and R.G. Douglas, *K homology and index theory*, 117-173 in Operator algebras and applications, Proc. Sympos. Pure Math. **38**, AMS (1982).

[3] B. Blackadar, *K-theory for operator algebras. Second edition*, MSRI Publ. **5**, Cambridge (1998).

[4] R. Brooks, *The fundamental group and the Laplacian*, Comment. Math. Helv., **56**(1981), 581-598.

[5] E. H. Chernoff, *Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations*, J. Funct. Anly. **12** (1973), 401-414.

[14]一般に n 次元 Hadamard 多様体（完備単連結な非正曲率 Riemann 多様体）は全て、$\mathbf{R}^n$ と coarse 同型になる。

[15]Brooks の定理自身は [4] を参照。上記の試論については [12] を参照。

[16]ここで言う完全は exact の訳語であり、perfect のそれではないことは言うまでもない。完全群については [13] を参照。

[17]被約群 C^*-環の完全性と Roe 代数の核型性については [18] を参照。

[6] A. Connes, *Noncommutative differential geometry*, IHES **62** (1985), 257-360.

[7] A. Connes and H. Moscovici, *Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology **29** (1990), 345-388.

[8] P.A. Fillmore, *A user's guide to operator algebras*, John Wiley and Sons, (1996).

[9] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, LMS Lect. Notes **182**, Cambridge, (1993).

[10] S. Kamimura, *Coarse geometry and index theory*, to appear in Prog. Theor. Phys. supplement **144**.

[11] S. Kamimura, *Some remarks on the Roe index theorem*, preprint.

[12] S. Kamimura, *Dirac operators on universal Riemannian coverings and Roe algebras on fundamental groups*, preprint.

[13] E. Kirchberg and S. Wassermann, *Exact groups and continuous bundles of C^*-algebras*, Math. Ann. **315** (1999), 169-203.

[14] J-L. Loday, *Cyclic Homology*, GMW **301**, Springer-Verlag (1992).

[15] G.A. Margulis, *Discrete subgroups semisimple Lie groups*, Springer-Verlag (1991).

[16] H.P. McKean and I.M. Singer, *Curvature and the eigenvalues of the Laplacian*, J. Diff. Geom. **1** (1967), 43-69.

[17] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symmetric spaces*, Ann. Math. Studies, **78**, Princeton (1973).

[18] N. Ozawa, *Amenable actions and exactness for discrete groups*, CRAS **300**(2000), 691-695.

[19] J. Roe, *Partioning noncompact manifolds and the dual Toeplitz problem*, 187-228 in Operator algebras and applications Vol.1, LMS Lect. Notes **135** Cambridge, (1989).

[20] J. Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Memoires of AMS **497** (1993).

[21] J. Roe, *Index theory, coarse geometry and topology of manifolds.* CBMS **90**, AMS (1996).

[22] E. H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill, (1966).

[23] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton, (1970).