数理解析研究所講究録 1260 巻 2002 年 48-61

数理解析研究所 研究集会「幾何学的力学系理論とその周辺」

2002 年 1 月 16 日講演

n 次元トーラス上磁場中の並進対称性の射影表現[1]

谷村省吾 (京都大学 工学研究科)

Shogo Tanimura

Department of Engineering Physics and Mechanics, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan

e-mail:tanimura@kues.kyoto-u.ac.jp

荷電粒子の力学

一様磁場中の荷電粒子の力学は並進不変か？という問題を考える．答えは，ユークリッド空間上であれば，磁場中荷電粒子の力学は並進不変であり，可積分であるが，トーラス上では，その力学は並進不変ではなく，可積分でもない．つまり，系の局所的な構造はまったく同じであるにもかかわらず，下にある多様体のトポロジーの影響だけで，力学系の性質が大きく変わってしまう．量子力学系ではこの違いはもっと顕著で，磁場中荷電粒子の量子力学は，ユークリッド空間上では連続並進対称性を持つが，トーラス上では離散並進対称性しか持たない．つまり，トポロジーに起因して，ある種の対称性の破れが起きる．

最近，2 次元量子ホール系や酸化物超伝導体において，密度波が凝縮して並進対称性を破るストライプ状態が観測されている．また，素粒子物理の模型としてコンパクト時空における対称性の破れが議論されている．つまり空間の対称性と力学の関係が，新たな物理の可能性を見出す機会となっている．ここでは，ユークリッド空間上あるいはトーラス上の荷電粒子の運動について，古典力学と量子力学の両面から丁寧に分析する．とくにトポロジーとゲージ場，対称性，保存量の関係を探る．

まずニュートン力学の視点から考察を始める．3 次元空間磁場中の荷電粒子の運動方程式はローレンツ力

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{1}$$

で与えられる．m は粒子の質量，e は電荷，$\boldsymbol{v}$ は速度であることはいいだろう．磁場 $\boldsymbol{B}$ が一定ならば，荷電粒子は，いわゆるサイクロトロン運動を行い，らせん軌道を描く．このとき，次の保存量が存在する：

$$E = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} - e\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B} \tag{3}$$

$$Q = m\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{B} \tag{4}$$

$$J = \left(m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} - \frac{1}{2}e\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})\right) \cdot \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{B} - \frac{1}{2}e(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})^2 \tag{5}$$

[1]神戸大学の坂本眞人氏との共同研究にもとづく．

これらが保存量であることは時間微分を計算してゼロになることで直接確かめられる．ローレンツ力は進行方向に垂直なので，力学の意味の仕事をしない．だから運動エネルギー E が保存される．ローレンツ力は磁場にも垂直なので，磁場に平行な運動量成分 Q が保存される．じつは少し運動量の定義を変更して $\boldsymbol{p}$ とすれば，3 つの成分すべてが保存する．磁場に平行な軸の周りの回転対称性が，角運動量 J の保存を許す．こうして 6 つの保存量が見つかる．しかし，これらのうち Q は独立な保存量ではない．独立な保存量は $E, \boldsymbol{p}, J$ の合計 $1+3+1=5$ つである．一方，自由度の数は $3\times 2=6$ つ．したがってこの系は可積分である．

ラグランジュ形式

次にラグラジュ力学の視点で同じ系を見てみる．ラグラジアンで力学を書こうとすると，力そのものではなく，ポテンシャルを導入することが必要になる．それが問題のタネになる．

ここでは 2 次元に話を限る．$\boldsymbol{R}^2$ の上の一様磁場は，B を実数定数として，$F = dA = B dx\wedge dy$ で与えられる．これはもちろん並進不変である．ベクトルポテンシャルは，例えば $A = Bx\,dy$ で与えられる．これは y 方向に並進不変だが，x 方向の平行移動では不変ではない．しかし

$$A(x+a,y) = A(x,y) + Ba\,dy = A(x,y) + d(Bay) \tag{6}$$

であるから，x 方向の平行移動と同時にゲージ変換を施せば，A は不変である．ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) + Bx\dot{y} \tag{7}$$

である．適当に単位系を取り直して，質量 m や電荷 e は 1 にした．運動方程式は

$$\ddot{x} = B\dot{y}, \qquad \ddot{y} = -B\dot{x} \tag{8}$$

である．x 方向の平行移動の下で L は

$$L(x+a) - L(x) = Ba\dot{y} = \frac{d}{dt}(Bay) \tag{9}$$

という全微分の変化しか受けず，y 方向の平行移動の下で L は不変であるから，系はネーターの保存量

$$\tilde{p}_x := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - By = p_x - By = \dot{x} - By, \tag{10}$$

$$p_y := \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + Bx \tag{11}$$

を持つ．

ここで，ネーターの定理は，無限小変換 $q_i \to q_i + \epsilon\,\varphi_i(q)$ (ϵ は無限小パラメータ) のもとで，ラグランジアンが

$$L(q,\dot{q}) \to L(q,\dot{q}) + \epsilon\,\frac{dW(q)}{dt} \tag{12}$$

だけの変化しか受けないならば ($W=0$ の場合 L は不変，そうでない場合 L は準不変であるという)，

$$G := \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\varphi_i(q) - W \tag{13}$$

は保存量であることを主張するものである．証明はただの計算問題である：

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= \sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\varphi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\varphi_i\right] - \frac{dW}{dt} \\ &= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i}\varphi_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{\varphi}_i\right] - \frac{dW}{dt} \\ &= \frac{\delta L}{\delta \epsilon} - \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dt} - \frac{dW}{dt} = 0.\end{aligned}$$

1 行目から 2 行目に移るときにオイラー・ラグランジュ方程式を用いた．

ハミルトン形式

同じ系は，ハミルトニアンとシンプレクティック形式

$$H = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}(p_y - Bx)^2, \qquad \omega = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy \tag{14}$$

でも定義される．対応する運動方程式は，

$$\dot{x} = p_x \qquad \dot{y} = p_y - Bx \tag{15}$$

$$\dot{p}_x = B(p_y - Bx) \qquad \dot{p}_y = 0. \tag{16}$$

このときも，保存量は (10), (11) で与えられる．

また，座標変換 $p_y \to p_y + Bx$ は (14) を

$$H' = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2), \qquad \omega' = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy + B dx \wedge dy \tag{17}$$

に移す．対応するポアソン括弧は

$$(\omega')^{-1} = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial p_x} + \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial p_y} + B\frac{\partial}{\partial p_x} \wedge \frac{\partial}{\partial p_y} \tag{18}$$

となり，運動方程式は

$$\dot{x} = p_x \qquad \dot{y} = p_y \tag{19}$$

$$\dot{p}_x = Bp_y \qquad \dot{p}_y = -Bp_x \tag{20}$$

となる．このとき

$$\tilde{p}_x := p_x - By, \qquad \tilde{p}_y := p_y + Bx \tag{21}$$

が保存量である．$H', \tilde{p}_x, \tilde{p}_y$ が保存量であることから，

$$H' = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) = \frac{1}{2}(By + \tilde{p}_x)^2 + \frac{1}{2}(Bx - \tilde{p}_y)^2 = E \tag{22}$$

が定数であり，この座標系では，(x, y) 平面に射影した軌道は，$(\tilde{p}_y/B, -\tilde{p}_x/B)$ を中心とする半径 $\sqrt{2E}/B$ の円であり，(p_x, p_y) 平面に射影した軌道は，$(0, 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{2E}$ の円である．

量子力学

ユークリッド空間のまま，量子力学に視点を移してみよう．ハミルトニアン (14) に対応する量子力学系のシュレディンガー方程式は

$$H\psi = \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - iBx\right)^2 \right] \psi(x, y) = E\psi \tag{23}$$

である．H と可換な演算子は

$$\tilde{P}_x := -i\frac{\partial}{\partial x} - By, \qquad P_y := -i\frac{\partial}{\partial y} \tag{24}$$

である．これらが生成するユニタリ変換は

$$(U_x(a)\psi)(x, y) = e^{-i\tilde{P}_x a}\psi(x, y) = e^{iBay}\psi(x - a, y), \tag{25}$$

$$(U_y(b)\psi)(x, y) = e^{-iP_y b}\psi(x, y) = \psi(x, y - b) \tag{26}$$

である．とくに $U_x(a)$ は平行移動とゲージ変換の合成になっていることに注意．x 方向，y 方向の平行移動は可換ではない：

$$U_x(a)U_y(b)(U_x(a))^{-1}(U_y(b))^{-1} = e^{iBab}. \tag{27}$$

連続並進対称性があるので，変数分離ができる．例えば，P_y の固有値を k として，

$$\psi(x, y) = e^{iky}\phi(x) \tag{28}$$

とおくと，シュレディンガー方程式は

$$H\psi = e^{iky}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}(k - Bx)^2 \right]\phi(x) = e^{iky}E\phi(x) \tag{29}$$

となり，調和振動子に帰着する．エネルギー固有値は

$$E = |B|(n + \frac{1}{2}) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{30}$$

となる．これはいわゆるランダウレベルに他ならない．各固有値は，$-\infty < k < \infty$ について無限重に縮退している．

トーラス上の力学系

ここまでの考察はユークリッド空間上のものである．ここからは，トーラスに移ったときに，系の保存量や対称性がどう変更されるかを調べる．

正方形 $[0,1]\times[0,1]$ の対辺を同一視してトーラス T^2 を定義する．T^2 の上では，(14) の H や (10) の $\tilde{p}_x$ は一価関数ではない．また，(17) の H' は一価であっても，(21) の $\tilde{p}_x$ や $\tilde{p}_y$ は一価関数ではない．つまり，平行移動の生成子が大域的には存在しない．

この事情は量子力学でより鮮明になる．シュレディンガー方程式 (23) が T^2 上でよく定義されるためには，波動関数が擬周期条件

$$\psi(x+1,y)=e^{iBy}\psi(x,y), \qquad \psi(x,y+1)=\psi(x,y) \tag{31}$$

を満たせばよい．つまり，この条件で定義される関数空間の上で H は自己共役作用素となる．x 方向と y 方向の条件が両立するためには，

$$\begin{aligned}\psi(x+1,y+1) &= e^{iB(y+1)}\psi(x,y+1)=e^{iB}e^{iBy}\psi(x,y)\\ &= \psi(x+1,y)=e^{iBy}\psi(x,y)\end{aligned} \tag{32}$$

から，$e^{iB}=1$ でなければならない．つまり，

$$B=2\pi q \tag{33}$$

で q は整数でなければならない．q をトーラス磁気数という．

トーラス上であっても，(24) の $\tilde{P}_x$, P_y は (23) の H と可換である．ところが，擬周期条件を満たす ψ にこれらが作用してできた $P\psi$ は擬周期条件を満たさない：

$$P_y\psi(x+1,y) = e^{iBy}(P_y+B)\psi(x,y) \tag{34}$$

$$\tilde{P}_x\psi(x,y+1) = (\tilde{P}_x-B)\psi(x,y) \tag{35}$$

つまり，これらの演算子の作用は与えられた関数空間の上で閉じていない．すなわち，トーラス上では無限小平行移動の生成子が存在しない．しかし有限長さの平行移動なら可能性がある．ユニタリ変換 (25), (26) によって平行移動された波動関数がまた擬周期条件 (31) を満たすかどうか調べると，(33) を使って，

$$\begin{aligned}(U_x(a)\psi)(x,y+1) &= e^{iBa(y+1)}\psi(x-a,y+1)\\ &= e^{iBa}e^{iBay}\psi(x-a,y)\\ &= e^{2\pi iqa}(U_x(a)\psi)(x,y)\end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}(U_y(b)\psi)(x+1,y) &= \psi(x+1,y-b)\\ &= e^{iB(y-b)}\psi(x,y-b)\\ &= e^{-iBb}e^{iBy}\psi(x,y-b)\\ &= e^{-2\pi iqb}e^{iBy}(U_y(b)\psi)(x,y)\end{aligned} \tag{37}$$

となるから，U_x, U_y によって平行移動された波動関数がまた擬周期条件 (31) を満たすためには，

$$a = \frac{n_x}{q}, \qquad b = \frac{n_y}{q} \qquad (n_x, n_y \in \boldsymbol{Z}) \tag{38}$$

であることが必要十分である．つまり，対称性は離散的な平行移動に限られる．また，擬周期関数の上で，

$$(U_x(1)\psi)(x,y) = e^{iBy}\psi(x-1,y) = \psi(x,y) \tag{39}$$

$$(U_y(1)\psi)(x,y) = \psi(x,y-1) = \psi(x,y) \tag{40}$$

となるから，$U_x(1)$, $U_y(1)$ は恒等変換であることがわかる．しかし，(27) に見たように，U_x, U_y の作用はスカラー倍の分だけ非可換である．したがって，量子系の対称性は $\boldsymbol{Z}_q \times \boldsymbol{Z}_q$ の射影表現である．

この離散並進対称性の表現は次のように構成される．表現空間の基底を $|0\rangle, |1\rangle, \cdots, |q-1\rangle$ と書く．平行移動の演算子の作用を

$$U_x\left(\frac{n_x}{q}\right)|m\rangle = |m + n_x \,(\mathrm{mod}\, q)\rangle \tag{41}$$

$$U_y\left(\frac{n_y}{q}\right)|m\rangle = e^{-2\pi i n_y m/q}|m\rangle \tag{42}$$

で定める．これらが表現になっていることは次で確認される：

$$\begin{aligned}
&U_x\left(\frac{n_x}{q}\right)U_y\left(\frac{n_y}{q}\right)\left(U_x\left(\frac{n_x}{q}\right)\right)^{-1}\left(U_y\left(\frac{n_y}{q}\right)\right)^{-1}|m\rangle \\
=\;& U_x\left(\frac{n_x}{q}\right)U_y\left(\frac{n_y}{q}\right)e^{2\pi i n_y m/q}|m - n_x\rangle \\
=\;& \left(U_x\left(\frac{n_x}{q}\right)\right)^{-1} e^{2\pi i n_y m/q} e^{-2\pi i n_y (m-n_x)/q}|m - n_x\rangle \\
=\;& e^{2\pi i n_x n_y/q}|m\rangle \\
=\;& e^{2\pi i q (n_x/q)(n_y/q)}|m\rangle \\
=\;& e^{iBab}|m\rangle.
\end{aligned}$$

これは既約表現になっており，したがって各エネルギー固有値 (30) は q 重に縮退している．

n 次元トーラス上の磁気ファイバー束

以上の考察は，n 次元トーラス上の $U(1)$ ファイバー束の構成，定曲率な接続の分類，その対称性の表現論，という問題に一般化される．

T^n 上の $U(1)$ ファイバー束を構成する．整数を成分とする行列 $\omega_{jk} \in \boldsymbol{Z}$ $(j,k = 1,\cdots,n)$ を任意に選んで固定する．$(x_0, x_1, \cdots, x_n), (y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ の積を

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n)\cdot(y_0, y_1, \cdots, y_n) := (x_0 + y_0 + \sum_{j,k=1}^{n} x_j \omega_{jk} y_k, x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \tag{43}$$

で定義する．以下，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\boldsymbol{R}^n$, $xy=\sum_{j=1}^n x_j y_j$, $x\omega y=\sum_{j,k=1}^n x_j\omega_{jk}y_k$ と略記する．この積について $\boldsymbol{R}^{n+1}$ は群になる．単位元は $(0,0)\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ であり，逆元は $(x_0,x)^{-1}=(-x_0+x\omega x,-x)$ で与えられる．この群を $\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n$ で表す．交換子は

$$(x_0,x)\cdot(y_0,y)\cdot(x_0,x)^{-1}\cdot(y_0,y)^{-1}=(x\omega y-y\omega x,0) \tag{44}$$

と計算されるので，ω が対称行列のときに限り，$\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n$ は可換群である．また，標準的な射影 $\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$ は群準同形であり，核 $\boldsymbol{R}\times_\omega\{0\}$ は $\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n$ の中心に含まれるから，群 $\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n$ は $\boldsymbol{R}$ による $\boldsymbol{R}^n$ の中心拡大である．

$\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n$ の部分群 $\boldsymbol{Z}\times_\omega\boldsymbol{Z}^n$ は，群の積によって $\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n$ に左から自由に作用する．この作用に関する商集合

$$P_\omega^{n+1}:=(\boldsymbol{Z}\times_\omega\boldsymbol{Z}^n)\backslash(\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n) \tag{45}$$

は滑らかな多様体になる．すなわち，任意の $m_0\in\boldsymbol{Z}$, $m\in\boldsymbol{Z}^n$ に対して P_ω^{n+1} の点 $(m_0+x_0+m\omega x,m+x)$ は同一視される．

群演算は，群 $\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n$ の P_ω^{n+1} への右からの作用を誘導する．P_ω^{n+1} に部分群 $\boldsymbol{R}\times_\omega\{0\}\cong\boldsymbol{R}$ も作用するが，その部分群 $\boldsymbol{Z}\times_\omega\{0\}\cong\boldsymbol{Z}$ は恒等変換として作用する．したがって，これらは群 $S^1=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ の P_ω^{n+1} 上の自由な作用を誘導する．その軌道体 P_ω^{n+1}/S^1 はトーラス T^n に同相である．以上により，S^1 を構造群とする主ファイバー束 $\pi_\omega:P_\omega^{n+1}\to T^n$ を得た．これを整数 2 次形式 ω に伴う磁気ファイバー束と呼ぶ．以上の構成は，完全系列からなる可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{Z}\times_\omega\{0\} & \to & \boldsymbol{Z}\times_\omega\boldsymbol{Z}^n & \to & \boldsymbol{Z}^n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{R}\times_\omega\{0\} & \to & \boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n & \to & \boldsymbol{R}^n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
S^1 & \to & P_\omega^{n+1} & \xrightarrow[\pi_\omega]{} & T^n
\end{array} \tag{46}$$

としてまとめられる．

磁気ファイバー束上の関数 $f:P_\omega^{n+1}\to\boldsymbol{C}$ は，関数 $f:\boldsymbol{R}\times_\omega\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{C}$ で，$\boldsymbol{Z}\times_\omega\boldsymbol{Z}^n$ の左作用で不変なものと同一視される：

$$f(m_0+x_0+m\omega x,m+x)=f(x_0,x),\qquad (m_0,m)\in\boldsymbol{Z}\times_\omega\boldsymbol{Z}^n. \tag{47}$$

さらに

$$f(x_0+t,x)=e^{2\pi it}f(x_0,x),\qquad t\in\boldsymbol{R} \tag{48}$$

を満たすとき，f を P_ω^{n+1} 上の同変関数という．同変関数は

$$f(x_0,x+m)=e^{-2\pi im\omega x}f(x_0,x),\qquad m\in\boldsymbol{Z}^n \tag{49}$$

を満たす．これは T^2 上の擬周期条件 (31)

$$\psi(x+1,y)=e^{2\pi iqy}\psi(x,y),\qquad \psi(x,y+1)=\psi(x,y) \tag{50}$$

の一般化である．じっさい，

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

ととれば T^2 の場合を再現する．

磁気ファイバー束の同相写像

整数係数対称行列 $\sigma_{jk} = \sigma_{kj} \in \boldsymbol{Z}$ が

$$\sum_{j,k=1}^{n} m_j \sigma_{jk} m_k \in 2\boldsymbol{Z}, \qquad m = (m_1, \cdots, m_n) \in \boldsymbol{Z}^n \tag{52}$$

を満たすとき，σ を n 次偶形式と呼ぶ．このとき，写像 $\phi_\sigma : \boldsymbol{R} \times_\omega \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \times_{\omega+\sigma} \boldsymbol{R}^n$ を

$$\phi_\sigma(x_0, x) := (x_0 + \frac{1}{2} x\sigma x, x) \tag{53}$$

で定義すると，これは群同形写像であることがすぐ確かめられる．じっさい，

$$\begin{aligned} \phi_\sigma((x_0,x) \cdot_\omega (y_0,y)) &= \phi_\sigma(x_0 + y_0 + x\omega y, x+y) \\ &= (x_0 + y_0 + x\omega y + \frac{1}{2}(x+y)\sigma(x+y), x+y) \\ &= (x_0 + y_0 + \frac{1}{2}x\sigma x + \frac{1}{2}y\sigma y + x(\omega+\sigma)y, x+y) \\ &= (x_0 + \frac{1}{2}x\sigma x, x) \cdot_{\omega+\sigma} (y_0 + \frac{1}{2}y\sigma y, y) \\ &= \phi_\sigma(x_0, x) \cdot_{\omega+\sigma} \phi_\sigma(y_0, y), \end{aligned} \tag{54}$$

となっている．また，偶形式の条件から ϕ_σ は $\boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ を $\boldsymbol{Z} \times_{\omega+\sigma} \boldsymbol{Z}^n$ に移す．さらに ϕ_σ は $\boldsymbol{R} \times_\omega \{0\}$ を $\boldsymbol{R} \times_{\omega+\sigma} \{0\}$ に同形に移す．したがって，ϕ_σ は P_ω^{n+1} から $P_{\omega+\sigma}^{n+1}$ へのファイバー同相を誘導する．

また，整数ベクトル $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n) \in \boldsymbol{Z}^n$ と対角行列 $\Delta = \mathrm{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n)$ とを同一視する．写像 $\phi_\Delta : \boldsymbol{R} \times_\omega \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \times_{\omega+\Delta} \boldsymbol{R}^n$ を

$$\phi_\Delta(x_0, x) := (x_0 + \frac{1}{2}x\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x, x) = (x_0 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j \Delta_j x_j + \Delta_j x_j), x). \tag{55}$$

で定義すると，これも群同形写像であることが確かめられる．x_j が整数なら $x_j^2 + x_j = x_j(x_j+1)$ は偶数なので，$\frac{1}{2}\Delta_j(x_j^2 + x_j)$ は整数であり，したがって，ϕ_Δ は $\boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ を $\boldsymbol{Z} \times_{\omega+\Delta} \boldsymbol{Z}^n$ に移す．また，ϕ_Δ は $\boldsymbol{R} \times_\omega \{0\}$ を $\boldsymbol{R} \times_{\omega+\Delta} \{0\}$ に移す．よって，ϕ_Δ は P_ω^{n+1} から $P_{\omega+\Delta}^{n+1}$ へのファイバー同相を誘導する．

もう一つ別のクラスのファイバー同相を見つけることができる．整数ベクトル $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \boldsymbol{Z}^n$ をとって，写像 $\phi_\varepsilon : \boldsymbol{R} \times_\omega \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R} \times_\omega \boldsymbol{R}^n$ を

$$\phi_\varepsilon(x_0, x) := (x_0 + \varepsilon x, x) = (x_0 + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j, x). \tag{56}$$

によって定義する．これもまた群同形であり，$\boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ を $\boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ に移すし，$\boldsymbol{R} \times_\omega \{0\}$ の上で恒等写像である．したがって，ϕ_ε は P_ω^{n+1} の自己同相写像を誘導する．

定曲率の接続

$\boldsymbol{R} \times_\omega \boldsymbol{R}^n$ 上の1形式 A を

$$A := -dx_0 + \sum_{j,k=1}^{n} x_j \omega_{jk} dx_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j dx_j = -dx_0 + x\omega dx + \alpha dx \tag{57}$$

で定める．ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \boldsymbol{R}^n$ は定数ベクトルで，アハラノフ・ボーム効果を特徴付ける．1形式 A は，$(m_0, m) \in \boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ の左作用 $\varphi : (x_0, x) \mapsto (m_0 + x_0 + m\omega x, m + x)$ の下で不変なので，$P_\omega^{n+1} = (\boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n) \backslash (\boldsymbol{R} \times_\omega \boldsymbol{R}^n)$ 上の1形式と見なされる．また，A は任意の $t \in \boldsymbol{R}$ による変換 $(x_0, x) \mapsto (x_0 + t, x)$ の下でも不変．さらに，A は，

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right) A = -1 \tag{58}$$

を満たす．これらの性質から，A は磁気ファイバー束 $\pi_\omega : P_\omega^{n+1} \to T^n$ の接続形式と認められる．

同変関数の共変微分を

$$Df := df + 2\pi i A f \tag{59}$$

で定める．また，曲率形式は

$$F := dA = \sum_{j,k=1}^{n} \omega_{jk} x_j \wedge dx_k = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{1}{2}(\omega_{jk} - \omega_{kj}) dx_j \wedge dx_k \tag{60}$$

となる．したがって2次のチャーン数は，反対称化された $\omega - {}^t\omega$ で決まり，$\omega \in \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{Z})$ を適当に選ぶことによって，すべてのチャーン数を実現することができる．したがって，T^n 上の S^1 ファイバー束はこの構成方法ですべて尽くされる．

さて，$(\omega, \alpha) \in \mathrm{Mat}(n, \boldsymbol{Z}) \times \boldsymbol{R}^n$ によって，一組のファイバー束と接続形式 $(P_\omega^{n+1}, A_{(\omega,\alpha)})$ が定義されているが，さきに見つけた3種類のファイバー同相写像により，

$$(\omega, \alpha) \sim (\omega + \sigma + \Delta, \alpha + \frac{1}{2}\Delta + \varepsilon) \tag{61}$$

は互いに移りあうことがわかる：

$$\begin{aligned}
& \phi_\varepsilon^* \phi_\Delta^* \phi_\sigma^* A_{(\omega+\sigma+\Delta, \alpha+\frac{1}{2}\Delta+\varepsilon)} \\
= \ & \phi_\varepsilon^* \phi_\Delta^* \phi_\sigma^* (-dx_0 + x(\omega + \sigma + \Delta)dx + (\alpha + \frac{1}{2}\Delta + \varepsilon)dx) \\
= \ & \phi_\varepsilon^* \phi_\Delta^* (-d(x_0 + \frac{1}{2}x\sigma x) + x(\omega + \sigma + \Delta)dx + (\alpha + \frac{1}{2}\Delta + \varepsilon)dx) \\
= \ & \phi_\varepsilon^* \phi_\Delta^* (-dx_0 + x(\omega + \Delta)dx + (\alpha + \frac{1}{2}\Delta + \varepsilon)dx) \\
= \ & \phi_\varepsilon^* (-d(x_0 + \frac{1}{2}x\Delta x + \Delta x) + x(\omega + \Delta)dx + (\alpha + \frac{1}{2}\Delta + \varepsilon)dx)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \phi_\varepsilon^*(-dx_0 + x\omega dx + (\alpha+\varepsilon)dx) \\
&= -d(x_0 + \varepsilon x) + x\omega dx + (\alpha+\varepsilon)dx \\
&= -dx_0 + x\omega dx + \alpha dx \\
&= A_{(\omega,\alpha)}
\end{aligned} \tag{62}
$$

この意味でこれらの接続は同値である．ファイバー束と接続の分類はこれで完了する．

磁気並進群

群 $\boldsymbol{R}^n$ は T^n 上に平行移動として作用する．すなわち，各ベクトル $v \in \boldsymbol{R}^n$ は T^n 上の写像

$$\tau_v : T^n \to T^n, \quad x \mapsto x + v \tag{63}$$

を起こす．ここで次の問いかけができる．

問 1 : τ_v の持ち上げ $\tilde{\tau}_v : P_\omega^{n+1} \to P_\omega^{n+1}$ を決定せよ．すなわち，次の図式を可換にする写像 $\tilde{\tau}$ を求めよ．

$$
\begin{tikzcd}
& S^1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P_\omega^{n+1} \arrow[rr, "\tilde{\tau}"] \arrow[d, "\pi_\omega"'] & & P_\omega^{n+1} \arrow[d, "\pi_\omega"] \\
T^n \arrow[rr, "\tau"] & & T^n
\end{tikzcd} \tag{64}
$$

問 2 : 接続を不変に保つ変換全体はいかなる群になるか？つまり

$$S_A := \{\tilde{\tau}_v \mid \tilde{\tau}_v^* A = A,\, v \in \boldsymbol{R}^n\} \tag{65}$$

を求めよ．この群を磁気並進群 (magnetic translation group) と呼ぶ．

主な結果

接続を不変に保つ，トーラスの平行移動の持ち上げ全体のなす群は

$$S_A = (\boldsymbol{R} \times_\omega \Omega^n)/(\boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n) \tag{66}$$

と同定される．ただし

$$\Omega^n = \{v \in \boldsymbol{R}^n \mid (\omega - {}^t\omega)v \in \boldsymbol{Z}^n\} \tag{67}$$

である．よって，とくに $(\omega - {}^t\omega)$ が非退化ならば，S_A は離散有限群である．

証明

P_ω^{n+1} の点を座標 $(x_0, x) \in \boldsymbol{R}^{n+1}$ で表す．$\tau_v : x \mapsto x + v$ の持ち上げ $\tilde{\tau}_v$ は，$\pi_\omega \circ \tilde{\tau}_v = \tau_v \circ \pi_\omega$ を満たすから，

$$\tilde{\tau}_v : (x_0, x) \mapsto (x_0 + \theta(x_0, x, v), x + v) \tag{68}$$

という形である．$\tilde{\tau}$ は S^1 の作用と可換であるから，関数 θ は

$$x_0 + w_0 + \theta(x_0 + w_0, x, v) = x_0 + \theta(x_0, x, v) + w_0 \tag{69}$$

を満たさなければならない．すなわち，

$$\theta(x_0 + w_0, x, v) = \theta(x_0, x, v) \tag{70}$$

が任意の $w_0 \in \boldsymbol{R}$ に対して成り立つ．したがって，関数 θ は (x, v) だけに依存する．

P^{n+1}_ω 上の写像となるために，$\tilde{\tau}$ は $\boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ の左作用の軌道を，また左作用軌道に移さなければならない．すなわち，任意の $(m_0, m) \in \boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ に対して，次を満たす $(m'_0, m') \in \boldsymbol{Z} \times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ が存在しなければならない：

$$\tilde{\tau}_v((m_0, m)\cdot(x_0, x)) = (m'_0, m')\cdot\tilde{\tau}_v(x_0, x). \tag{71}$$

この式は

$$(m_0 + x_0 + m\omega x + \theta(m + x, v), m + x + v) = (m'_0 + x_0 + \theta(x, v) + m'\omega(x + v), m' + x + v) \tag{72}$$

と書かれ，連立方程式

$$\begin{aligned} m &= m', & (73)\\ m_0 + m\omega x + \theta(m + x, v) &= m'_0 + \theta(x, v) + m'\omega(x + v) & (74)\end{aligned}$$

と同値である．最後の式は，任意の $m \in \boldsymbol{Z}^n$ に対して

$$\theta(m + x, v) - \theta(x, v) - m\omega v = m'_0 - m_0 \in \boldsymbol{Z} \tag{75}$$

が成り立て，という要請である．逆にこの条件を満たす θ が与えられれば，(68) を通して平行移動の持ち上げ $\tilde{\tau}$ が決まる．以上で問 1 に対する答えを得た．

次いで，接続

$$A = -dx_0 + x\omega dx + \alpha dx$$

を $\tilde{\tau}_v : (x_0, x) \mapsto (x_0 + \theta(x, v), x + v)$ で変換すると，

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_v^* A &= -(dx_0 + d\theta) + (x + v)\omega d(x + v) + \alpha d(x + v) \\ &= A - d\theta + v\omega dx. & (76)\end{aligned}$$

となるから，接続を不変に保つ $(\tilde{\tau}_v^* A = A)$ ためには，関数 θ は微分方程式 $d\theta = v\omega dx$ を満たさなければならない．すなわち，

$$\theta(x, v) = v\omega x + v_0 \tag{77}$$

でなければならない．ここで，$v_0 \in \boldsymbol{R}$ は定数．

P^{n+1}_ω 上の変換として，よく定義されるためには，θ は条件

$$\begin{aligned} \theta(m+x,v)-\theta(x,v)-m\omega v &= v\omega m - m\omega v \\ &= v(\omega - {}^t\omega)m \in \boldsymbol{Z}, \qquad \forall m \in \boldsymbol{Z}^n \end{aligned} \tag{78}$$

を満たさなければならない．したがって，$v \in \boldsymbol{R}^n$ は

$$(\omega - {}^t\omega)v \in \boldsymbol{Z}^n \tag{79}$$

を満たさなければならない．逆に，このような v は (68), (77) を通して，A を不変に保つような平行移動 $\tilde{\tau}_v$ を与える．この条件を満たすベクトルの集合を

$$\Omega^n := \{v \in \boldsymbol{R}^n \,|\, (\omega - {}^t\omega)v \in \boldsymbol{Z}^n\} \tag{80}$$

とおけば，Ω^n は加群 $\boldsymbol{R}^n$ の部分群である．とくに，反対称行列 $(\omega - {}^t\omega)$ が非退化ならば，Ω^n は $\boldsymbol{R}^n$ の中で離散的である．

持ち上げられた平行移動 $\tilde{\tau}_v$ の作用は

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_v : (x_0, x) \mapsto (x_0 + \theta(x,v), x+v) &= (x_0 + v\omega x + v_0, x+v) \\ &= (v_0, v)\cdot(x_0, x) \end{aligned} \tag{81}$$

となるので，$\boldsymbol{R}\times_\omega \Omega^n$ の P^{n+1}_ω への左からの作用と同一視される．ところが，その部分群 $\boldsymbol{Z}\times_\omega \boldsymbol{Z}^n \subset \boldsymbol{R}\times_\omega \Omega^n$ は P^{n+1}_ω に恒等的に作用する．したがって，A の不変化群 S_A は

$$S_A = (\boldsymbol{R}\times_\omega \Omega^n)/(\boldsymbol{Z}\times_\omega \boldsymbol{Z}^n). \tag{82}$$

これが問 2 の答えを与える．ちなみに，$\boldsymbol{R}\times_\omega \Omega^n$ は $\boldsymbol{Z}\times_\omega \boldsymbol{Z}^n$ の中心化群として特長付けられ，S_A は，可換群 Ω^n の S^1 による中心拡大に他ならない． （証明終了）

まとめ

- 一様磁場中の荷電粒子の力学は，平面上では連続並進対称性を持つが，2 次元トーラス上では離散並進対称性しか持たないことを見た．
- 一般の n 次元トーラス上の量子系において，一様磁場の入り方を完全に分類し，並進対称性を特徴付ける群 S_A を決定した．
- ここでは述べなかったが，群 S_A の表現論もほぼ完成した．

今後の課題

- ラプラス作用素，ディラック作用素のスペクトルへの応用
- 対称性の破れの場の理論の模型
- 超対称性への拡張．とくに並進対称性は超対称性に含まれるので，並進対称性の破れは超対称性の破れを誘導する．

謝辞

本研究集会において，藤井氏，宮崎氏には有益なコメントをいただきました．とくに，浅田氏には，チャーン数によるファイバー束の分類について教えていただきました．本講演に注意を払っていただき，質問・コメントを寄せていただいた，本集会のすべての出席者に感謝します．

参考文献

[1] I. Antoniadis, *"A possible new dimension at a few TeV"*, Phys. Lett. B246 (1990) 377; N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *"The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter"*, Phys. Lett. B429 (1998) 263, hep-ph/9803315; I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *"New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV"*, Phys. Lett. B436 (1998) 257, hep-ph/9804398; L. Randall, R. Sundrum, *"A large mass hierarchy from a small extra dimension"*, Phys. Rev. Lett. 83 (1999) 3370, hep-ph/9905221; N. Arkani-Hamed, M. Schmaltz, *"Hierarchies without symmetries from extra dimensions"*, Phys. Rev. D61 (2000) 033005, hep-ph/9903417. G. Dvali, S. Randjbar-Daemi, R. Tabbash, *"The origin of spontaneous symmetry breaking in theories with large extra dimensions"*, hep-ph/0102307.

[2] Y. Hosotani, *"Dynamical mass generation by compact extra dimensions"*, Phys. Lett. B126 (1983) 309; Y. Hosotani, *"Dynamics of non-integrable phases and gauge symmetry breaking"*, Ann. Phys. 190 (1989) 233.

[3] M. Sakamoto, M. Tachibana, K. Takenaga, *"Spontaneous supersymmetry breaking from extra dimensions"*, Phys. Lett. B458 (1999) 231, hep-th/9902070; M. Sakamoto, M. Tachibana, K. Takenaga, *"A new mechanism of spontaneous SUSY breaking"*, Prog. Theor. Phys. 104 (2000) 633, hep-th/9912229.

[4] S. Matsumoto, M. Sakamoto, S. Tanimura, *"Spontaneous breaking of the rotational symmetry induced by monopoles in extra dimensions"*, Phys. Lett. B518 (2001) 163, hep-th/0105196.

[5] M. Sakamoto, S. Tanimura, *"Spontaneous breaking of the C, P, and rotational symmetries by topological defects in two extra dimensions"*, Phys. Rev. D 65 (2002) 065004-1-18, hep-th/0108208.

[6] E. Brown, *"Bloch electrons in a uniform magnetic field"*, Phys. Rev. 133 (1964) A1038.

[7] J. Zak, *"Magnetic translation group"*, Phys. Rev. 134 (1964) A1602.

[8] N. Ashby, S. C. Miller, *"Electric and magnetic translation group"*, Phys. Rev. 139 (1965) A428.

[9] J. Avron, I. Herbst, B. Simon *"Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions"*, Duke Math. J. 45 (1978) 847.

[10] B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, *"Ground states in a periodic field. Magnetic Bloch functions and vector bundles"*, Soviet Math. Dokl. 22 (1980) 240.

[11] J. Zak, *"Weyl-Heisenberg group and magnetic translations in finite phase space"*, Phys. Rev. B39 (1989) 694.

[12] J. Asch, H. Over, R. Seiler, *"Magnetic Bloch analysis and Bochner Laplacians"*, J. Geo. Phys. 13 (1994) 275.

[13] W. Florek, *"Magnetic translation groups as group extensions"*, Rep. Math. Phys. 34 (1994) 81.

[14] D. Lipinski, *"Magnetic translation groups on a 3×3-torus. Application of the Mac Lane method"*, Rep. Math. Phys. 34 (1994) 97.

[15] S. Walcerz, *"Magnetic translation groups in case $N = 2$"*, Rep. Math. Phys. 34 (1994) 107.

[16] M. Kuzma, *"Fiber structure of extensions of groups in crystallography"*, Rep. Math. Phys. 34 (1994) 119.

[17] P. B. Weigmann, A. V. Zabrodin, *"Quantum group and magnetic translations Bethe ansatz for the Asbel-Hofstadter problem"*, Nucl. Phys. B422 (1994) 495.

[18] W. Florek, *"Magnetic translation groups in n dimensions"*, Rep. Math. Phys. 38 (1996) 235.

[19] W. Florek, *"Mac Lane method in the investigation of magnetic translation groups"*, Rep. Math. Phys. 38 (1996) 325.

[20] V. A. Geyler, *"First Chern class of lattice magneto-Bloch bundles"*, Rep. Math. Phys. 38 (1996) 333.

[21] W. Florek, *"Pairs of Bloch electrons and magnetic translation groups"*, Phys. Rev. B55 (1997) 1449.

[22] W. Florek, *"Algebraic description of a two-dimensional system of charged particles in an external magnetic field and periodic potential"*, J. Phys.: Condens. Matter 11 (1999) 2523.