数理解析研究所講究録 1260 巻 2002 年 62-76

拘束系の経路積分

名古屋女子大学　大貫 義郎 (Yoshio Ohnuki)
Nagoya Women's University

概要

$\mathbb{R}^{D+1}$ に埋め込まれ，かつ S^D と diffeomorphic であるようなな多様体 $f(x)=0$ 上に拘束された量子論的系の既約表現を用い，経路積分の厳密な定式化を試みる．その結果，直感的にも理解しやすい新しいかたちの経路積分表示が導かれる．さらにこれを書き換えて，以前半古典的な手法で導かれた Faddeev-Senjanovic の経路積分が，この場合どのような書かれるべきかを示す．さらに関連する一・二の話題に触れる．

1　Dirac 代数

拘束系の正準形式は50年ほど前 Dirac により手がけられた [1]．ここではこれに基づき S^D と diffeomorphic な D 次元多様体上に拘束された系の量子論的振舞いを考察する．多様体は $\mathbb{R}^{D+1}$ に埋め込まれており $f(x)=0$ で記述されるとする．ただし $x=(x_1,\, x_2,\, \ldots\, ,\, x_{D+1})$ は $\mathbb{R}^{D+1}$ における座標である．また以下で1つの項に2度現れるギリシャ添字はそれについて1から $D+1$ までの和を表す．Dirac によればこのような系の古典論での正準形式は，ハミルトニアンを

$$H=\frac{1}{2}p^2+V(x), \qquad (p^2\equiv p_\alpha p_\alpha) \tag{1.1}$$

とするとき，拘束条件 $f(x)=0$ に加えて次式によって与えられる．

$$p_\alpha f_{,\alpha}(x)=0, \tag{1.2}$$

$$[x_\alpha,\, x_\beta]^*=0, \tag{1.3}$$

$$[x_\alpha,\, p_\beta]^*=\Lambda_{\alpha\beta}(x), \tag{1.4}$$

$$[p_\alpha,\, p_\beta]^*=\frac{-1}{R^2(x)}\left(f_{,\alpha}(x)f_{,\beta\gamma}(x)-f_{,\beta}(x)f_{,\alpha\gamma}(x)\right)p_\gamma \tag{1.5}$$

で与えられる．ここで $[\cdot\cdot,\cdot\cdot]^*$ は拘束系に特有のディラック括弧とよばれるもので，非拘束系でのポアソン括弧に相当するものである．また

$$f_{,\alpha}(x)\equiv\partial_\alpha f(x), \qquad f_{,\alpha\beta}(x)\equiv\partial_\alpha\partial_\beta f(x), \tag{1.6}$$

$$\Lambda_{\alpha\beta}(x) \equiv \delta_{\alpha\beta} - \frac{f_{,\alpha}(x) f_{,\beta}(x)}{R^2(x)}, \qquad R^2(x) \equiv f_{,\alpha}(x) f_{,\alpha}(x). \tag{1.7}$$

である．(1.2) は，$f(x)=0$ が時間的に保存するという要求から導かれる拘束条件で，$f(x)=0$ が primary constraint とよばれるのに対して secondary constraint とよばれる．

Dirac は主に古典論を扱ったが，量子論への移行に際しては，通常の場合にポアソン括弧を交換関係に置き換えたように， 拘束系ではディラック括弧 $[A, B]^*$ を $(1/i\hbar)[\hat{A}, \hat{B}]$ に置き換えることを提案した．$\hat{A}$，$\hat{B}$ はそれぞれ古典量 A，B に対応する演算子である[1]．しかし古典量と量子論的な量との対応は，後者に非可換な演算子の含まれることがあるために必ずしも自明ではない．ここでは (1.2) 左辺および (1.5) 右辺において，古典論から量子論への読み替えにあたり，非可換量の積は対称化することにし，その整合性は改めてチェックすることにする．

このような要請の下に (1.1) に対応して量子系のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + V(\hat{x}) \tag{1.8}$$

を採用し，さらに正準変数を規定する基本代数には，(1.2)〜(1.5) に基づき次式を導入する．

$$f(\hat{x}) = 0, \qquad \{\hat{p}_\alpha, f_{,\alpha}(\hat{x})\} = 0, \tag{1.9}$$

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta] = 0, \tag{1.10}$$

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \Lambda_{\alpha\beta}(\hat{x}), \tag{1.11}$$

$$[\hat{p}_\alpha, \hat{p}_\beta] = -i\hbar \left\{ \frac{f_{,\alpha}(\hat{x}) f_{,\beta\gamma}(\hat{x}) - f_{,\beta}(\hat{x}) f_{,\alpha\gamma}(\hat{x})}{2R^2(\hat{x})}, \hat{p}_\gamma \right\} \tag{1.12}$$

ここで $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ である．正準変数 $\hat{x}_\alpha$，$\hat{p}_\alpha$ の交換関係 (1.10)，(1.11)，(1.12) が拘束条件 (1.9) と無矛盾なことは，その左辺の $f(\hat{x})$ および $\{\hat{p}_\alpha, f_{,\alpha}(\hat{x})\}$ が $\hat{x}_\alpha$，$\hat{p}_\alpha$ と可換なことが示せるので，それによって保証される．すなわち (1.9)〜(1.12) は，$f(x)=0$ 上に拘束されたを量子論的な系を規定する基本代数とみなし得る．以下われわれは (1.9)〜(1.12) を "$f(x)=0$ 上のディラック代数" とよぶことにする．

量子論においては，このような式を並べただけでは使いものにならない．これらによって理論が規定される以上，この代数にはいかなる既約表現が存在するかをまず具体的に知る必要がある．最近 この問題は $\mathbb{R}^{D+1}$ における正準変数 $\hat{x}_\alpha$，$\hat{\pi}_\alpha$ を用いて完全に解決された [2]．ここでは導出を省略し結論だけを記すことにする．

すなわち

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta] = [\hat{\pi}_\alpha, \hat{\pi}_\beta] = 0, \qquad [\hat{x}_\alpha, \hat{\pi}_\beta] = i\hbar\delta_{\alpha\beta} \tag{1.13}$$

---

[1] 演算子はすべて ^ 記号をつけて表す．

とするとき，既約表現における $\hat{p}_\beta$ は次式で与えられる．

$$\hat{p}_\beta = \frac{1}{2}\left\{\Lambda_{\beta\gamma}(\hat{x}),\, \hat{\pi}_\gamma\right\} - \alpha\hbar\frac{\Lambda_{\beta\gamma}(\hat{x})f_{,\gamma\rho}(\hat{x})f_{,\sigma}(\hat{x})\epsilon_{\rho\sigma}}{R^2(\hat{x})} \qquad (D=1), \tag{1.14}$$

$$\hat{p}_\beta = \frac{1}{2}\left\{\Lambda_{\beta\gamma}(\hat{x}),\, \hat{\pi}_\gamma\right\} \qquad (D \geq 2). \tag{1.15}$$

(1.14) におけるパラメーター α は $D=1$ の場合の可能な既約表現を一意に指定する任意の実数で，α と α' で指定される 2 つの既約表現は $\alpha' = \alpha + \text{integer}$ のときに限り同値となる．従ってこの場合 $0 \leq \alpha < 1$ なる α により既約表現は一意に決定される．また $D \geq 2$ の場合は，(1.15) で既約表現はすべて尽くされ，それらはユニタリー同値なものを除いて一意である．

α の自由度の出現は，理論が正準交換関係に基づかないこと[2]，および系の存在する領域が多重連結空間であることに関連すると考えられる [3]．

(1.14)，(1.15) が多様体 $f(x)=0$ 上の Dirac 代数をみたすことは (1.13) を用いて直接の計算で確かめられる．なお既約性の証明はそれほど簡単ではなくその方法は技術的に興味がないでもないが，長くなるのでここでは立ち入らない．興味をもたれる方は文献 [2] を参照していただくことにして，以下では，上の結果のもとに $f(x)=0$ 上に拘束された経路積分の厳密な定式化を試みる．

2 経路積分 I

拘束系の経路積分は大分以前に Faddeev[4]，Senjanovcic[5] によって定式化が試みられた．しかし演算子としての正準変数の表現空間が分かっていなかったために，Dirac の古典論からの類推によるいわば半古典的なアプローチで作業がなされたが，得られた経路積分の表式が完全ではないという指摘はすでにあった [6]．

$f(x)=0$ 上の Dirac 代数の既約表現を任意に一つ取りだしてその表現空間を $\underline{\mathcal{H}}$，またこれに属する状態ベクトルを $|\underline{\varphi})$，$|\underline{\chi})$，$\cdots$ 等とアンダーラインをつけて表す．$f(x)=0$ 上の点を $\underline{x}$ とし，位置演算子の固有状態を $|\underline{x})$，その完全性を

$$\int_{\Sigma^D} d\sigma^D\, |\underline{x})(\underline{x}| = \underline{1} \tag{2.1}$$

とかこう．Σ^D は多様体 $f(x)=0$ の全域，$d\sigma^D(\underline{x})$ は多様体の微小体積でそのメジャーは多様体が埋め込まれている $\mathbb{R}^{D+1}$ のメジャーに準拠して与えられる．また右辺の $\underline{1}$ は $\underline{\mathcal{H}}$ 上の単位演算子である．さらに状態ベクトル $|\varphi)$ に対応した波動関数は $(\underline{x}|\varphi) = \underline{\varphi}(\underline{x})$ と表され，したがって内積は

$$(\underline{\varphi}|\underline{\chi}) = \int_{\Sigma^D} d\sigma^D(\underline{x})\, \underline{\varphi}(\underline{x})^*\, \underline{\chi}(\underline{x}) \tag{2.2}$$

[2] よく知られているように，正準交換関係の既約表現は一意的である．(von Neumann)

となる．しかし$\underline{x}$の座標は1枚の地図には目盛れず，いわゆる地図の張り合わせが必要になって見通しが悪い．そこで$\underline{\varphi}(\underline{x})$，$\underline{\chi}(\underline{x})$，$\cdots$ に対応し，正準交換関係 (1.13) の表現空間（$\mathcal{H}$とかく）に属する波動関数$\varphi(x)$，$\chi(x)$，$\cdots$ を導入して，つぎの関係を設定する．

$$\varphi(x)|_{x=\underline{x}} = \underline{\varphi}(\underline{x}), \quad \chi(x)|_{x=\underline{x}} = \underline{\chi}(\underline{x}), \cdots . \tag{2.3}$$

さて$f(x)$には，$\mathbb{R}^{D+1}$における多様体$f(x)=0$の近傍でnon-vanishingな（xに依存する）因子をかける自由度がある．これを利用し$f(x)$を再定義して

$$R(\underline{x}) \equiv f_{,\alpha}(\underline{x}) f_{,\alpha}(\underline{x}) = 1 \tag{2.4}$$

が成り立つようにしよう．このような$f(x)$を，“規格化されている”ということにする．規格化された$f(x)$を用いると (2.3) よりただちに，(2.2) は

$$(\underline{\varphi}|\underline{\chi}) = \int dx^{D+1}\, \delta(f(x))\, \varphi^*(x)\chi(x) \tag{2.5}$$

とかかれることが分かる．$\varphi(x)$や$\chi(x)$といった$\mathcal{H}$の元は，それを用いて内積を (2.5) の右辺のかたちにかくために便宜上導入されたものであって，直接の物理的な意味をもっていない．いうまでもなく，物理的内容を担うは$|\underline{\varphi})$，$|\underline{\chi})$であって，$\varphi(x)$，$\chi(x)$は (2.3) によって規制されているに過ぎない．また$f(x)$に規格化の条件を課したのも (2.5) の表式をかくための手段であって，ディラック代数の表現を論じる限りにおいてはその必要は全くなかった．しかしこの表式は便利であり，しかも経路積分をx-表示で定式化する必要から，以下では規格化された$f(x)$を用いることにする．

$\varphi(x)$に対応するケットベクトルを$|\varphi\rangle$とすれば，$|\underline{\varphi})$ $(\in \underline{\mathcal{H}})$との関係は，(2.3) の条件のもとに

$$\Pi|\varphi\rangle = |\underline{\varphi}) \tag{2.6}$$

とかくことができる．すなわちΠはtotal space $\mathcal{H}$からbase space $\underline{\mathcal{H}}$へのprojectionであって，与えられた$|\underline{\varphi})$に対し (2.3) をみたす$|\varphi\rangle$の全体は$|\underline{\varphi})$上のfiberをつくる．(2.6) に双対な関係を$\langle\varphi|\Pi^\dagger = (\underline{\varphi}|$とすると (2.5) より

$$\Pi^\dagger \Pi = \delta(f(\hat{x})) \tag{2.7}$$

を得る．Πが定義域を$\mathcal{H}$，値域$\underline{\mathcal{H}}$としたのに対し，$\Pi^\dagger\Pi$は$\mathcal{H}$上の演算子である．

また (1.14)，(1.15) に見られるように，$\hat{x}_\alpha$および$\hat{p}_\alpha$を用いてかかれた任意の演算子$O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)$は$\underline{\mathcal{H}}$上の演算子であると同時に$\mathcal{H}$上の演算子とても扱うことができる．いいかえれば，$\hat{x}_\alpha$，$\hat{\pi}_\alpha = (\hbar/i)\partial x_\alpha$とかくとき，$f(x)=0$上の任意に与えられた点の近傍における$D$個の局所座標変数$[\underline{x}]_j$ $(j=1,2\ldots,D)$を用いれば，演算子$O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)$は（局所的には）$[\underline{x}]_j$とその微分をもって書き下すことができる．他方，$\mathbb{R}^{D+1}$において$[\underline{x}]_j$と直交する座標変数を$s$とすれば，$\varphi(x) \in \mathcal{H}$は局所的に$\varphi([\underline{x}], s)$とかかれ，(2.3) の関係は$\lim\limits_{s\to 0}\varphi([\underline{x}], s) = \underline{\varphi}([\underline{x}])$と表すこと

ができる．ここで $O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)$ が s と無関係であることを考慮すれば，$O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)\lim_{s\to 0}\varphi([\underline{x}], s) = \lim_{s\to 0} O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)\varphi([\underline{x}], s) = O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)\underline{\varphi}([\underline{x}])$ を得る．これは $f(x) = 0$ 上の任意の点の近傍で成り立つ関係であるが，大域的には $|\underline{\phi}) = \Pi|\phi\rangle$ を用いて

$$O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)|\underline{\varphi}) = O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)\Pi|\varphi\rangle = \Pi O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)|\varphi\rangle \tag{2.8}$$

とかくことができる．従って

$$\begin{aligned}(\underline{\varphi}|O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)|\underline{\chi}) &= \langle\varphi|\,\Pi^\dagger\Pi\, O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)|\chi\rangle \\ &= \iint d^{D+1}x\, d^{D+1}x'\, \delta(f(x))\, \varphi^*(x)\langle x|O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)|x'\rangle\, \chi(x')\end{aligned} \tag{2.9}$$

となって，左辺は $\mathcal{H}$ 上の言葉をもって表される．なお $[\Pi^\dagger\Pi, O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)] = 0$ であるから右辺の $\delta(f(x))$ には $\delta(f(x'))$ を用いてもよい．

(2.9) を用いると，時刻 t_I における状態 $|\psi_I)$ から時刻 t_F における状態 $|\psi_F)$ への遷移振幅 T_{FI} を，$\mathcal{H}$ 上での言葉を借りてつぎのように書き下すことができる．

$$\begin{aligned}T_{FI} &= (\underline{\psi}_F|\, e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F - t_I)\hat{H}}\, |\underline{\psi}_I) \\ &= \iint d^{D+1}x_F\, d^{D+1}x_I\, \delta(f(x_F))\, \psi_F^*(x_F)\langle x_F|\, \exp[-\frac{i}{\hbar}(t_F - t_I)\hat{H}]\, |x_I\rangle\, \psi_I(x_I)\end{aligned} \tag{2.10}$$

ここで $\hat{H}$ は (1.1) で与えられ，また $\psi_{I,F}(x) = \langle x|\psi_{I,F}\rangle$ は physical な波動関数 $\underline{\psi}_{I,F}(\underline{x}) = (\underline{x}|\underline{\psi}_{I,F})$ と (2.3) を通じて結ばれる $\mathcal{H}$ 上での“波動関数”である．(2.10) の $\langle x_F|\, e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F - t_I)\hat{H}}\, |x_I\rangle$ は，通常の伝搬関数に他ならない．ただしこのときの $\hat{H}$ は，(1.8) の $\hat{p}_\alpha$ に (1.14) あるいは (1.15) を用いたものである．それを計算すると次式が得られる．

$$\begin{aligned}\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\pi}_\beta \Lambda_{\beta\gamma}(\hat{x})\hat{\pi}_\gamma + K(\hat{x}) + V(\hat{x}) + \frac{\alpha\hbar}{2}\epsilon_{\beta\tau}\left\{\frac{f_{,\beta}(\hat{x})f_{,\tau\sigma}(\hat{x})\Lambda_{\sigma\rho}(\hat{x})}{R^2(\hat{x})}, \hat{\pi}_\rho\right\} \\ + \frac{\alpha^2\hbar^2}{2}\frac{\Lambda_{\beta\sigma}(\hat{x})f_{,\sigma\tau}(\hat{x})\Lambda_{\tau\rho}(\hat{x})f_{,\rho\beta}(\hat{x})}{R^2(\hat{x})} \qquad (D=1),\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{\pi}_\beta \Lambda_{\beta\gamma}(\hat{x})\hat{\pi}_\gamma + K(\hat{x}) + V(\hat{x}) \qquad (D \geq 2), \tag{2.12}$$

である．ここで

$$K(x) \equiv -\frac{\hbar^2}{8}\{\partial_\beta\partial_\sigma\Lambda_{\beta\sigma}(x) - \partial_\beta\Lambda_{\sigma\tau}(x)\,\partial_\sigma\Lambda_{\tau\beta}(x)\}. \tag{2.13}$$

われわれはこの $\hat{H}$ をハミルトニアンとして通常の手法に従い，$\langle x_F|\, e^{-\frac{i}{\hbar}(t_F - t_I)\hat{H}}\, |x_I\rangle$ の経路積分表示を導くことができる．そのために $t_F - t_I$ を N 個に分割し

$$\Delta t = \frac{t_F - t_I}{N} \tag{2.14}$$

$$\langle x_F|\ \exp[-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)\,\hat{H}\,]|x_I\rangle=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N-1}d^{D+1}x^{(k)}\cdot\prod_{k=1}^{N}\langle x^{(k)}|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t\,\hat{H}}\,|x^{(k-1)}\rangle \tag{2.15}$$

$$(\,x^{(0)}\equiv x_I,\qquad x^{(N)}\equiv x_F\,)$$

とかかれる．それゆえ $\langle x^{(k)}|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\Delta t\,\hat{H}}\,|x^{(k-1)}\rangle$ を与えるために，まず $\langle x^{(k)}|\hat{H}|x^{(k-1)}\rangle$ を求めることにする．

$\hat{H}$ の演算子順序づけには Weyl ordering を採用する[3]．その結果やや長い機械的な計算をへて，われわれは

$$\langle x^{(k)}|\hat{H}|x^{(k-1)}\,\rangle=\int\frac{d^{D+1}p^{(k)}}{(2\pi\hbar)^{D+1}}\exp\Big[\frac{i}{\hbar}p^{(k)}\Delta x^{(k)}\Big]H(p^{(k)\perp},\bar{x}^{(k)}) \tag{2.16}$$

を得る．ここで

$$\begin{aligned}H(p^{(k)\perp},\,\bar{x}^{(k)})=\frac{1}{2}(p^{(k)\perp})^2+V_{\rm eff}(\bar{x}^{(k)})+\alpha\hbar\,\frac{\epsilon_{\beta\tau}f_{,\beta}x(\bar{x}^{(k)})f_{,\tau\sigma}(\bar{x}^{(k)})p_\sigma^{(k)\perp}}{R^2(\bar{x}^{(k)})}\\+\alpha^2\hbar^2\,\frac{\Lambda_{\beta\sigma}(\bar{x}^{(k)})f_{,\sigma\tau}(\bar{x}^{(k)})\Lambda_{\tau\rho}(\bar{x}^{(k)})f_{,\rho\beta}(\bar{x}^{(k)})}{2R^2(\bar{x}^{(k)})}\qquad(D=1)\end{aligned} \tag{2.17}$$

および

$$H(p^{(k)\perp},\,\bar{x}^{(k)})=\frac{1}{2}(p^{(k)\perp})^2+V_{\rm eff}(\bar{x}^{(k)})\qquad(D\geq 2) \tag{2.18}$$

であって，$p_\beta^{(k)\perp}$，$\bar{x}_\beta^{(k)}$，$\Delta x_\beta^{(k)}$，$V_{\rm eff}(\bar{x}^{(k)})$ は次式で定義されものである．

$$\begin{aligned}p_\beta^{(k)\perp}=\Lambda_{\beta\gamma}(\bar{x}^{(k)})p_\gamma^{(k)},\quad \bar{x}_\beta^{(k)}=\frac{x_\beta^{(k)}+x_\beta^{(k-1)}}{2},\quad \Delta x_\beta^{(k)}=x_\beta^{(k)}-x_\beta^{(k-1)},\\ V_{\rm eff}(\bar{x}^{(k)})=\frac{\hbar^2}{8}\partial_\beta\Lambda_{\sigma\tau}(\bar{x}^{(k)})\,\partial_\sigma\Lambda_{\beta\tau}(\bar{x}^{(k)})+V(\bar{x}^{(k)}).\end{aligned} \tag{2.19}$$

それゆえ，通常の経路積分の手法にしたがって

$$\langle x_k|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\,\Delta t\hat{H}}\,|x_{k-1}\rangle=\int\frac{d^{D+1}p^{(k)}}{(2\pi\hbar)^{D+1}}\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\,\{p^{(k)}\Delta x^{(k)}-\Delta t\,H(p^{(k)\perp},\bar{x}^{(k)})\}\Big]+O(\Delta t) \tag{2.20}$$

とかかれる．そうしてこれを (2.15) に用い

$$\begin{aligned}&\langle x_F|\ \exp[-\frac{i}{\hbar}(t_F-t_I)\hat{H}]\,|x_I\rangle\\&=\lim_{N\to\infty}\int\prod_{k=1}^{N-1}d^{D+1}x^{(k)}\int\prod_{k=1}^{N}\frac{d^{D+1}p^{(k)}}{(2\pi\hbar)^{(D+1)}}\exp\Bigg[\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\{p^{(k)}\cdot\,\Delta x^{(k)}-H(p^{(k)\perp},\,\bar{x}^{(k)})\Delta t\}\Bigg]\end{aligned} \tag{2.21}$$

[3]他の operator ordering でももちろん計算は可能だが，式が煩雑になるだけで有効とは言えない．

が得られる．ここで $t^{(N)} \equiv t_F$ および $t^{(0)} \equiv t_I$ である．よって，これより遷移振幅の経路積分表示を導くことができる．すなわち

$$T_{FI} = \lim_{N\to\infty} \int \delta(f(x^{(N)}))\prod_{k=0}^{N} d^{D+1}x^{(k)} \int \prod_{k=1}^{N} \frac{d^{D+1}p^{(k)}}{(2\pi\hbar)^{(D+1)}}$$

$$\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\{p^{(k)}\cdot \Delta x^{(k)} - H(p^{(k)\perp}, \bar{x}^{(k)})\Delta t\}\right]\psi_F^*(x^{(N)})\,\psi_I(x^{(0)}). \tag{2.22}$$

この式は，拘束系の経路積分として厳密な表式であるばかりでなく，これまで知られなかったタイプのものである．しかもあとに述べる Faddeev-Senjanovic 型の厳密化された経路積分に比べて著しく単純であり，その点でも興味があるといえよう．

以下，遷移振幅 (2.22) について吟味する．まず右辺の $H(p^{(k)\perp}, \bar{x}^{(k)})$ に (2.17) または (2.18) 用い，$p^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$ についての積分を行おう．その結果は次のようになることが示される．

$$T_{FI} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(2\pi i\hbar\Delta t)^{DN/2}} \prod_{k=0}^{N} \int dx^{(k)} \cdot \delta(f(x^{(N)}))$$

$$\times \prod_{k=1}^{N} \delta(\Delta x_\beta^{(k)} f_{,\beta}(\bar{x}^{(k)})/R(\bar{x}^{(k)})) \cdot \exp\left[\frac{i\Delta t}{\hbar}\sum_{k=1}^{N} L_{k,\mathrm{eff}}\right]\psi_F^*(x^{(N)})\ \psi_I(x^{(0)}) \tag{2.23}$$

ここで有効ラグランジュアン $L_{k,\mathrm{eff}}$ は，$D = 1$ に対しては

$$A_\beta(x) \equiv -\alpha\hbar\frac{\epsilon_{\sigma\tau} f_{,\sigma}(x) f_{,\tau\beta}(x)}{R^2(x)}, \qquad \epsilon_{\sigma\tau} = -\epsilon_{\tau\sigma}, \quad \epsilon_{12} = 1, \tag{2.24}$$

とするとき

$$L_{k,\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_\beta^{(k)}}{\Delta t}\right)^2 + A_\beta(\bar{x}^{(k)})\frac{\Delta x_\beta^{(k)}}{\Delta t} - V_{\mathrm{eff}}(\bar{x}^{(k)}) \qquad (D = 1) \tag{2.25}$$

で与えられる．

他方，$D \geq 2$ に対しては

$$L_{k,\mathrm{eff}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta x_\beta^{(k)}}{\Delta t}\right)^2 - V_{\mathrm{eff}}(\bar{x}^{(k)}) \qquad (D \geq 2). \tag{2.26}$$

となる．

(2.23) 右辺に現れた因子 $\delta(\Delta x_\beta^{(k)} f_{,\beta}(\bar{x}^{(k)})/R(\bar{x}^{(k)}))$ は $\Delta x_\beta^{(k)}$ が十分小さいとき，$f(x) = 0$ の法線 $f_{,b}t(\bar{x}^{(k)})/R(\bar{x}^{(k)})$ に直角方向の $\Delta x_\beta^{(k)}$ の成分，つまり $f(x) = 0$ への接線方向の $\Delta x_\beta^{(k)}$ の成分が残ることを意味し，いわば運動が $f(x) = 0$ に拘束されていることを示す[4]．(2.26) は，ポテンシャル $V(x)$ が量子論的な補正を受けて $V_{\mathrm{eff}}(x)$ に変わっているものの，通常のかたちのラグラ

[4] これに対し k の各段階で $\delta(f(\bar{x}^{(k)}))$ なる因子は現れない．$f(\hat{x})$ が保存量であるために，ある時刻で $f(\hat{x}) = 0$ であれば，すべての時刻でこれが成り立つからである．

ンジュアンである．これに対し (2.25) は系がさらにゲージポテンシャル (2.24) の影響のもとで拘束運動をすることを示している．一体このゲージポテンシャルは何ものであろうか．

まずただちに分かることは

$$\begin{cases} A_1(x) = \alpha\hbar \dfrac{f_{,2}(x)f_{,11}(x) - f_{,1}(x)f_{,12}(x)}{R^2(x)} \\[2ex] A_2(x) = \alpha\hbar \dfrac{f_{,2}(x)f_{,12}(x) - f_{,1}(x)f_{,22}(x)}{R^2(x)}, \end{cases} \tag{2.27}$$

とかかれ，これより

$$\frac{\partial A_1(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2(x)}{\partial x_1} = 0 \qquad (R(x) \neq 0), \tag{2.28}$$

が成り立つ．このことは $\mathbb{R}^2$ において少なくとも $f(x) = 0$（いまの場合平面 $\mathbb{R}^2$ 上の閉曲線）の近傍には "磁場" が存在しないことを示している．しかし $\mathbb{R}^2$ のすべての点において "磁場" が 0 というわけではない．それをみるために

$$\xi(x) \equiv \tan^{-1}\left(\frac{f_{,2}(x)}{f_{,1}(x)}\right) \tag{2.29}$$

を導入しよう．$\xi(x)$ は $f(x) = 0$ なる閉曲線の近傍で与えられるが，一価関数ではない．閉曲線に沿って一周してもとに戻ると $\xi(x) \to \xi(x) + 2\pi$ となるからである．しかし，その微分は一価関数となって

$$A_\beta(x) = -\alpha\hbar \frac{\partial \xi(x)}{\partial x_\beta} \qquad (R(x) \neq 0). \tag{2.30}$$

を与える．これより，閉曲線に沿って線積分を行えば

$$\oint_{f(x)=0} A_\beta(x)\, dx_\beta = -2\pi\alpha\hbar. \tag{2.31}$$

この結果は $\alpha \neq 0$ であれば閉曲線内に平面 $\mathbb{R}^2$ を直角に貫く "磁束" の存在を意味する．すなわち $D = 1$ の場合，経路積分 (2.23) はこのような "磁束" に伴うゲージ場の影響[5]でのを系がうけるのと同等の振舞いをすること示している[6]．

この "磁束" の内容をもう少し詳しく眺めてみよう．そのため閉曲線内に任意にとった点 $q = (q_1, q_2)$ で $\mathbb{R}^2$ を垂直に貫く無限に細く無限に長いソレノイドを考えよう．ソレノイド内には (2.31) の右辺と同量の磁束が閉じこめられているとする．この磁束によりソレノイド外にはいわゆる

---

[5]ただし，簡単のために $e/c = 1$ とした．以下ゲージに関する議論はこの単位にしたがう．

[6]われわれは $0 \leq \alpha < 1$ としたが，一般の実数に拡張した場合，α と α' に対応する $A_\beta(x)$ と $A'_\beta(x)$ は $\alpha' = \alpha + m$ (m; 整数) の場合ゲージ変換で結ばれる．実際，このときには $U(x) = e^{im\xi(x)}$ は一価関数となり，$A'_\beta(x) = A_\beta(x) + (\hbar/i)\, U(x)^\dagger \partial_\beta U(x)$ が成り立つ．すなわち α は $\alpha + m$ は区別できない．これはすでに述べたように，これらが同値な既約表現を与えることによるものである．

Aharonov-Bohm[7] 型のゲージポテンシャルが発生し，それは $\mathbb{R}^2$ 上で

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\beta(x) &= \alpha\hbar\epsilon_{\beta\tau}\frac{(x-q)_\tau}{(x_\sigma-q_\sigma)^2} \\ &= -\alpha\hbar\frac{\partial\theta(x)}{\partial x_\beta}\end{aligned} \tag{2.32}$$

とかくことができる．ただし

$$\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{x_2-q_2}{x_1-q_1}\right) \qquad (x \neq q) \tag{2.33}$$

である．$\theta(x)$ は $\xi(x)$ と同様，閉曲線 $f(x)=0$ に沿って一周すると 2π だけ値を変化させて，多価関数として振る舞う．もちろん $f(x)=0$ の近傍を通って一周しても事情は同じである．しかし，この領域において

$$F(x) = \alpha(\xi(x)-\theta(x)) \tag{2.34}$$

は一価関数となり，したがって

$$U(x) = e^{\frac{i}{\hbar}F(x)} \tag{2.35}$$

も一価，そうして

$$A_\beta(x) = \mathfrak{A}_\beta(x) + \frac{\hbar}{i}U^\dagger(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x_\beta} \tag{2.36}$$

を得る．すなわち，経路積分に現れた (2.27) のゲージポテンシャルは，(2.32) の Aharonov-Bohm 型のゲージポテンシャルと等価である．そうしてこのポテンシャルを生成する無限に細いソレノイドが $\mathbb{R}^2$ を貫く点 q は閉曲線 $f(x)=0$ の内部あればどこでもよい．

このようにして $D=1$ の場合，ディラック代数の既約表現は，特定のゲージ構造を自動的に内包することになる．しかし $D\geq 2$ の場合の既約表現にはゲージ構造は現れない．

3 経路積分 II

われわれは，ラグランジュアン (2.25) あるいは (2.26) を用いて厳密な経路積分表示 (2.23) を与えることができた．この節では，いわゆる Faddeev-Senjanovic 型の経路積分表示の厳密化を試みよう．そのために $f(x)=0$ 上のディラック代数の既約表現に基づいて導かれた (2.22) を出発点にとることにする．

もともと Faddeev[4]，Senjanovic[5] の議論は，拘束系を量子論的に扱うための手段として展開された．そこでは，正準変数の表現空間としてのヒルベルト空間を設定することなしに，半古典的なイメージに基づいて拘束系の経路積分表示を定義し，むしろこれをもって拘束系の量子論と

みなそうとした．これはDiracの理論の量子論的な構造が明らかでなかったことによる．彼らの議論によれば散乱振幅はつぎのかたちをとる．

$$\langle\,\psi_F|e^{-\frac{i}{\hbar}T\hat{H}}|\,\psi_I\rangle \equiv \int D\mu\,\psi_F^*(x_F)\exp\Big[\,\frac{i}{\hbar}\int_{T/2}^{T/2}dt\,(p_\alpha\dot{x}_\alpha - H(p,x))\Big]\,\psi_I(x_I), \tag{3.1}$$

$$D\mu \equiv \prod_a \delta(\phi_a)\cdot|\det[\phi_a,\,\phi_b]_{\rm cl}|^{1/2}Dp\,Dx.$$

ここで積分測度 $D\mu$ に現れる ϕ_a は，古典論に現れる偶数個の 2nd class constraint と呼ばれるもので，いまの場合は $\phi_1 = f(x)$ と $\phi_2 = p_\alpha f_{,\alpha}(x)$ の 2 個，また $[\cdot\cdot,\cdot\cdot]_{\rm cl}$ 古典力学でのポアソン括弧，$H(p,\,x)$ は古典ハミルトニアン (1.1) である．したがって $D\mu$ の具体的かたちは

$$D\mu = \delta(f(x))\delta(p_\alpha f_{,\alpha}(x))R(x)\,Dp\,Dx \qquad (\,R(x) = \sqrt{f_{,\alpha}^{\,2}(x)}\,) \tag{3.2}$$

となる．

当時としてはやむを得ないことであったが，この式に量子論的な不備のあることはすでに指摘されていた [6]．たとえば，演算子の順序づけはどうなっているのか，積分測度に現れる $Dp\,Dx$ の定義は何か，等々であるが，あとに導かれる結果をみれば分かるので，ここではこの問題に深入りしない．ともかく (3.2) の測度ではどう積分したらよいか見当がつきかねる．われわれは厳密な式 (2.22) から出発し，以下これを変形してできるだけ (3.1) に近いものをつくることを試みる．

そのために (2.22) に現れる積分

$$I(x,\,x') = \int d^{D+1}p\,\exp\Big[\frac{i}{\hbar}\{p\cdot\Delta x - H(p^\perp,\,\bar{x})\Delta t\}\Big] \tag{3.3}$$

を書き換えよう．ただし

$$\Delta x_\alpha = x_\alpha - x'_\alpha, \qquad \bar{x}_\alpha = \frac{1}{2}(x_\alpha + x'_\alpha). \tag{3.4}$$

ここで，ベクトル $(f_{,1}(\bar{x}),\,f_{,2}(\bar{x}),\,\ldots\,,\,f_{,D+1}(\bar{x}))$ を $(D+1)$-軸方向に向ける回転の行列 $\|a_{\beta\gamma}(\bar{x})\| \in SO(D+1)$ を導入する．すなわち

$$a_{\beta\gamma}(\bar{x})f_{,\gamma}(\bar{x}) = \delta_{\beta\,D+1}R(\bar{x}). \tag{3.5}$$

である．そしてこれを用いてつぎの量を定義する．

$$X_\beta = a_{\beta\gamma}(\bar{x})\,x_\gamma, \qquad X'_\beta = a_{\beta\gamma}(\bar{x})\,x'_\gamma, \tag{3.6}$$

$$P_\beta = a_{\beta\gamma}(\bar{x})\,p_\gamma, \qquad P^\perp_\beta = a_{\beta\gamma}(\bar{x})\,p^\perp_\gamma. \tag{3.7}$$

われわれは $(D+1)$ 次元ベクトルからその $(D+1)$ 番目の成分を除いて得られる D 次元ベクトルを太字でかくことにする．たとえば $X = (X_1,\,X_2,\,\ldots\,,\,X_{D+1})$ に対しては $\boldsymbol{X} \equiv (X_1,\,X_2,\,\ldots\,,\,X_D)$ である．したがって $p^\perp$ の定義および (3.7) の第 2 式により

$$P^\perp = (\boldsymbol{P},\,0) \tag{3.8}$$

とかかれる．そのとき容易に分かるように (3.3) 式は次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
I(x,\, x') &= \int d^D\boldsymbol{P}\, dP_{D+1} \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\{\boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{X} + P_{D+1}\Delta X_{D+1} - \boldsymbol{H}(P^{\perp},\, \bar{X})\Delta t\}\Big] \\
&= 2\pi\hbar\, \delta(\Delta X_{D+1}) \int d^D\boldsymbol{P} \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\{\boldsymbol{P}\cdot\Delta\boldsymbol{X} - \boldsymbol{H}(P^{\perp},\, \bar{X})\Delta t\}\Big] \\
&= 2\pi\hbar\, \delta(\Delta X_{D+1}) \int d^{D+1}P\delta(P_{D+1}) \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\{P\cdot\Delta X - \boldsymbol{H}(P,\, \bar{X})\Delta t\}\Big] \\
&= 2\pi\hbar\, \delta(\Delta X_{D+1}) \int d^{D+1}P\, \delta(P_{D+1}R(\bar{x}))R(\bar{x}) \\
&\qquad\qquad \times \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\{P\cdot\Delta X - \boldsymbol{H}(P,\, \bar{X})\Delta t\}\Big] \\
&= 2\pi\hbar\, \delta(\Delta X_{D+1}) \int d^{D+1}p\, \delta(p_\beta f_{,\beta}(\bar{x}))R(\bar{x}) \\
&\qquad\qquad \times \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\{p\cdot\Delta x - H(p,\, \bar{x})\Delta t\}\Big],
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

ここで

$$
\Delta X_\beta = X_\beta - X'_\beta, \quad \bar{X}_\beta = \frac{X_\beta + X'_\beta}{2}, \quad \boldsymbol{H}(P^{\perp},\, \bar{X}) = H(p^{\perp},\, \bar{x}) \tag{3.10}
$$

である．また $H(p,\, \bar{x})$ は，(2.18) の $H(p^{\perp},\, \bar{x})$ において $p^{\perp}_\beta$ を p_β で置き替えたものである．

さて (3.9) に現れた $\delta(\Delta X_{D+1})$ なる因子を書き換えよう．そのために次の式を利用する．

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x') &= f(\bar{x} + \frac{\Delta x}{2}) - f(\bar{x} - \frac{\Delta x}{2}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta x_{\beta_1}\Delta x_{\beta_2}\cdots\Delta x_{\beta_{2n+1}}}{2^{2n}\cdot(2n+1)!} f_{,\beta_1\beta_2\cdots\beta_{2n+1}}(\bar{x}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta X_{\beta_1}\Delta X_{\beta_2}\cdots\Delta X_{\beta_{2n+1}}}{2^{2n}\cdot(2n+1)!} F_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{2n+1}}(\bar{x}) \\
&= \Delta X_{D+1}R(\bar{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta X_{\beta_1}\Delta X_{\beta_2}\cdots\Delta X_{\beta_{2n+1}}}{2^{2n}\cdot(2n+1)!} F_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{2n+1}}(\bar{x}),
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

ただし

$$
F_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_{2n+1}}(\bar{x}) = a_{\beta_1\gamma_1}(\bar{x})a_{\beta_2\gamma_2}(\bar{x})\cdots a_{\beta_{2n+1}\gamma_{2n+1}}(\bar{x})\, f_{,\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_{2n+1}}(\bar{x}).
$$

ここで (3.11) 右辺の和を二つの部分に分ける．一つは ΔX_{D+1} なる因子を含む項の和，他は ΔX_{D+1} をもたぬ項の和である．後者は $\Delta\boldsymbol{X}_j$ $(j = 1, 2 \ldots, D)$ について 3 次の項からはじまる．ところで経路積分においては $|\Delta\boldsymbol{X}_j| \sim \sqrt{\hbar\Delta t}$ となることが知られているので，後者からの寄与は高々 $O(|\Delta t|^{3/2})$ であるとみなしてよい．その結果 (3.11) は

$$
f(x) - f(x') = \Delta X_{D+1}\{R(\bar{x}) + A(x,\, x')\} + O(|\Delta t|^{3/2}), \tag{3.12}
$$

とかくことができる．ここで $A(x,\, x')$ は次式で与えられる．

$$A(x,\, x') = \frac{1}{8}\Delta \boldsymbol{X}_j \Delta \boldsymbol{X}_k\, F_{D+1\,j\,k}(\bar{x}) + \frac{1}{8}\Delta X_{D+1}\Delta \boldsymbol{X}_j\, F_{D+1\,D+1\,j}(\bar{x}) + \frac{1}{24}(\Delta X_{D+1})^2\, F_{D+1\,D+1\,D+1}(\bar{x}) + \text{高次の項}. \tag{3.13}$$

$\varDelta t$ が微少のとき，$R(\bar{x}) + A(x,\, x')$ は ΔX_{D+1} の関数として 0 にはならないと考えてよかろう．実際このとき $R(\bar{x})$ は有限だが，$A(x,\, x')$ は微少量とみなせるからである．それゆえ，微少な $\varDelta t$ に対して

$$\delta(f(x) - f(x')) = \delta(\Delta X_{D+1})\left\{R(\bar{x}) + \frac{Q(x,\, x')}{R(\bar{x})}\right\}^{-1} + O(|\varDelta t|^{3/2}), \tag{3.14}$$

ただし

$$\begin{aligned} Q(x,\, x') &= \frac{R(\bar{x})}{8}\Delta \boldsymbol{X}_j \Delta \boldsymbol{X}_k\, F_{D+1\,j\,k}(\bar{x}) \\ &= \frac{1}{8}\varDelta x_\beta \varDelta x_\gamma \varLambda_{\beta\rho}(\bar{x})\varLambda_{\gamma\sigma}(\bar{x}) f_{,\rho\sigma\tau}(\bar{x}) f_{,\tau}(\bar{x}). \end{aligned} \tag{3.15}$$

を得る．したがって

$$R(\bar{x})\delta(\Delta X_{D+1}) = \delta(f(x) - f(x'))\{R^2(\bar{x}) + Q(x, x')\} + O(|\Delta t|^{3/2}) \tag{3.16}$$

となり，これを (3.9) に用いると次の関係が導かれる．

$$\begin{aligned} \delta(f(x))I(x,\, x') &= 2\pi\hbar\int d^{D+1}p\ \delta(f(x))\delta(p_\beta f_{,\beta}(\bar{x}))\{R^2(\bar{x}) + Q(x, x')\} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\{p\cdot(x - x') - H(p,\, \bar{x})\Delta t\}\right]\delta(f(x')) + O(|\Delta t|^{3/2}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

その結果

$$\begin{aligned} &\delta(f(x^{(k)}))\int d^{D+1}p^{(k)}\ \exp\left[\frac{i}{\hbar}\{p^{(k)}\cdot \Delta x^{(k)} - H(p^{(k)\perp},\, \bar{x}^{(k)})\Delta t\}\right] \\ &= 2\pi\hbar\int d^{D+1}p\ \delta(f(x^{(k)}))\delta(p^{(k)}_\beta f_{,\beta}(\bar{x}^{(k)}))\{R^2(\bar{x}^{(k)}) + Q(x^{(k)}, x^{(k-1)})\} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\{p^{(k)}\cdot\Delta x^{(k)} - H(p^{(k)},\, \bar{x}^{(k)})\Delta t\}\right]\delta(f(x^{(k-1)})) + O(|\Delta t|^{3/2}). \end{aligned} \tag{3.18}$$

を得る．ここここで k をつぎつぎに $N, N-1, \cdots, 2, 1$ とおいて (2.22) に用いよう．われわれは容易に次の表式に到達する．

$$\begin{aligned} T_{FI} = \lim_{N\to\infty}&\int \prod_{k=0}^{N} d^{D+1}x^{(k)}\delta(f(x^{(k)})) \\ &\times \int \prod_{k=1}^{N} \frac{d^{D+1}p^{(k)}}{(2\pi\hbar)^D}\ \delta(p^{(k)}_\beta f_{,\beta}(\bar{x}^{(k)}))\{R^2(\bar{x}^{(k)}) + Q(x^{(k)}, x^{(k-1)})\} \end{aligned}$$

$$\times \exp\Big[\frac{i}{\hbar}\sum_{k=1}^{N}\{p^{(k)}\cdot\Delta x^{(k)} - H(p^{(k)},\, \bar{x}^{(k)})\Delta t\}\Big]\varphi_F^*(x^{(N)})\,\varphi_I(x^{(0)}). \tag{3.19}$$

$$(\, x_F \equiv x^{(N)}, \qquad x_I \equiv x^{(0)}\,)$$

(3.19) は (3.1) の厳密化に他ならない．

通常，時間間隔 $t_F - t_I$ を N 分割して与えられるハミルトニアン型経路積分では，$p^{(k)}$-積分は $k = 0, 1, \cdots, N$ で $(N+1)$ 重積分，他方 $x^{(k)}$-積分は $k = 1, 2, \cdots, N$ で 1 個少ない N 重積分が用いられるが，ここでももちろんそうなっており，それに伴って因子 $\delta(f(x^{(k)})$ と $\delta(p_\beta^{(k)} f_{,\beta}(\bar{x}^{(k)}))$ の数の間にも 1 個のずれが生じている．したがって積分の測度は (3.2) のかたちにはまとまらない．演算子の順序づけの効果はいわゆる中点処方として R, $f_{,\beta}$, H のなかの座標変数に適用され，その記述は単に $x^{(k)}$ または $x^{(k-1)}$ でなく中間点 $\bar{x}^{(k)}$ によって与えられる．演算の非可換の効果は，またポテンシャルの表式にも現れる．(3.1) では V として古典論でのポテンシャルがそのまま用いられたが，(3.19) においてはポテンシャルは (2.19) の V_{eff} にみるように $\hbar^2$ に比例する量子論的な補正項が付加される．さらに (3.1) と (3.19) の著しい違いは，前者では R が 1 次で現れる（(3.2) 式）のに対し，後者では $R^2(x^{(k)}) + Q(x^{(k)}, x^{(k-1)})$ のかたちをとることが注目される．$f(x)$ が規格化されていれば（これは x-表示での内積を (2.5) のかたちに書くために必要であった），$f(x) = 0$ 上では R は 1 になる量であった[7]．したがって (3.2) では R は落としてよい量であるが，それが中点処方のために変数が $f(x) = 0$ から外れて，生き残ったのが $R^2(\bar{x}^{(k)})$ である．またこれに対する補正項の Q は ΔX_β の 2 次で，$\hbar\Delta t$ のオーダーの量である．したがって経路積分の結果には $\hbar$ のオーダーの寄与をもたらす．これも一種の量子論的な効果と考えられるが，もともと Q は (2.22) をできるだけ (3.1) に近いかたち，すなわち k の各段階で $x^{(k)}$ が $f(x^{(k)}) = 0$ をみたすようにするために書き換えた結果生じたものである．そこには (3.15) にみるように $f(x)$ の高階微分が含まれるが，$f(x)$ は単に規格化されているというだけでそれ以上の条件が課せられていないから，そのような高階微分には任意性が伴う．この任意性は本来理論にはなかったいわば見かけのもので，すべての積分を実行し $\Delta t \to 0$ としたときには消えるはずのものである．したがってそれ以前の段階での (3.19) 式の中で Q に直接の物理的あるいは幾何学的な意味をもたせるのは難しいのではないか思われる．

なお，(3.19) において p-積分は行うことができるが，結果は省略する．

4 Remarks

われわれは，$f(x)$ 上のディラック代数 (1.9)〜(1.12) の既約表現に基づいて，散乱振幅の 2 種類の経路積分表示の厳密な表式を導いた．一つは Faddeev-Senjanovic 型とは異なるタイプのものでそのかたちは物理的にも理解しやすく簡明である．とくに $D = 1$ のときに，Aharonov-Bohm

[7]ただし Faddeev-Senjanovic では $f(x)$ の規格化の必要性は考慮されていない．

と等価なのゲージ構造が出現する.

他は，前者をある段階で変形して，でき得るだけ Faddeev-Senjanovic 型になるように書き換えたものである．積分測度の定義，演算子の順序づけなどの問題も処理されて，厳密なかたちが導かれたが，半古典的な手法で与えられた Faddeev-Senjanovic と異なり，さまざまな量子補正が加わり，すっきりしたかたちにはならない．むしろ経路積分としては，第 II 節で導いた前者の方が有望と思われる．この形式はこれまで知られていなかった.

しかし残された問題がある．それは拘束系において $\mathrm{Tr}\,[e^{-i\hat{H}T}]$ の経路積分表示をどのように具体化するかということであるが，基本的には任意の演算子 $O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)$ に対して $\mathrm{Tr}\,[O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)]$ を，補助的なヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の言葉を用いていかに表すかに帰着する．すなわち $|\underline{\varphi}_n)$ を物理的なヒルベルト空間 $\underline{\mathcal{H}}$ の完全直交系とするとき (2.9) により

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\,[O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)] &= \sum_n (\underline{\varphi}_n|O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)|\underline{\varphi}_n) \\ &= \sum_n \iint d^{D+1}x\, d^{D+1}x'\, \delta(f(x))\, \varphi_n^*(x)\langle x|O(\hat{x}_\alpha, \hat{p}_\alpha)|x'\rangle\, \varphi_n(x') \qquad (4.1)\end{aligned}$$

とかくことができる．ここで $\varphi_n(x)$ は，(2.3) により物理的な波動関数 $\underline{\varphi}_n(\underline{x})$ と

$$\varphi_n(x)|_{x=\underline{x}} = \underline{\varphi}_n(\underline{x}) \qquad (4.2)$$

なる関係で結ばれるというだけであって，$\mathcal{H}$ における完全直交系ではない．そのために (4.1) から $\varphi_n(x)$ を消し去ることが不可能で[8]，したがって波動関数のかたちに依存しない経路積分表示に達することができない.

われわれは D 次元多様体 $f(x) = 0$ が S^D と diffeomorphic な場合を議論してきた．しかし $f(x) = 0$ が双曲面のように $\mathbb{R}^D$ と diffeomorphic な場合にも同様な議論を行うことができる．このときの Dirac 代数としては (1.9)～(1.12) がそのまま成立する．ただし既約表現は，すべての D にわたって (1.15) を用いることができる．つまり $D = 1$ の特殊性は消滅し，したがってゲージ構造は現れない．実際，$D = 1$ のときパラメータ α を含んだ (1.14) は Dirac 代数をみたしているが，多様体が単連結であるために，この表現は $\alpha = 0$ のものとユニタリー同値であることが示されるからである.

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950); *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1964).

[2] Y. Ohnuki, *Proc. 6th Int. School of Theoretical Physics –SSPCM–*, 73 (eds T. Lulek et al., World Scientific 2001), and for details, to be published.

[8] もし完全直交系であれば $\sum_n \varphi_n(x)^* \varphi_n(x') = \delta^{D+1}(x - x')$ により $\varphi_n(x)$ が消去される.

[3] L. S. Schulman, J. Math. Phys. **12**, 305 (1971).

[4] L. D. Faddeev, *Theor. Math. Phys.* **1**, 1(1970)

[5] P. Senjanovic, *Ann. of Phys.* **100**, 227 (1976).

[6] H. Fukutata and T. Kashiwa, *Ann. Phys*, **175** 301 (1987); *Prog. Theor. Phys.* **80** (1988), 151; T. Kashiwa, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996), 431.

[7] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).