数理解析研究所講究録 1260 巻 2002 年 126-147

変形量子化におけるメーラーの公式と局所化*

宮崎直哉†
慶應義塾大学経済学部日吉数学研究室

平成 14 年 4 月 3 日

1 Introduction

変形量子化という概念が [BFFLS] によって導入されて２０年以上の歳月が過ぎ、その間に形式的変形量子化の存在や分類といった基本的問題が徐々に解決され、現在はその応用の時代に突入したと思ってよいと思われる。

ところで古典的な多様体を分類していく上で、最も基礎的で粗い方法の一つが位相的な意味での (co)homology 論であるとすれば、その非可換結合代数における類似物は Hochschild (co)homnology 論や巡回 (co)homology 論であろうから、まずはそれを調べてみるのが自然な成り行きだと思われる。そしてこの計算は変形量子化の moduli の局所的性質と密接に結びついている。実際ここでは述べることはできないが Kontsevich の一連の結果（特に形式性定理) から、Hochschild cohomology は Lichnerowicz-Poisson cohomology を係数とする形式的べき級数空間と深く関連していることがわかる (cf. [Mi2])。

一方、変形量子化は (Weyl 型) 擬微分作用素の表象計算 (symbol calculus) に深く根ざした概念であり、そのことからも変形量子化と指数定理（より強く非可換指数定理）を模索することは当然の成り行きであり、Fedosov や Nest-Tsygan の一連の仕事もそれを志向している。そのような状況下にあって、次の目標としてあげられるのは局所指数定理の非可換版であろう。そこでこのノートでは、まず、量子接続付き contact Weyl 多様体 ([Y]、あるいは Proposition 2.6 を参照) から自然に現れる広い意味での Dirac 作用素 (以下 Dirac 擬き作用素と呼ぶ）が、通常の Dirac 作用素と極めて近い性質（たとえば Lichnerowicz formula の成立や、広い意味での heat kernel の存在とその時刻 $t \to 0$ での漸近展開）を持つことについて報告する。更に conformal rescaling を使って Mehler formula を導出して、そこに大森・前田・吉岡・宮崎 [OMMY] の意味での Poincaré-Cartan form に対応す

*この原稿は早稲田大学において行われた研究会「量子化の幾何学」報告集用の原稿に加筆補正をおこなって、２００２年１月１５日から１月１７日に行われた研究会「幾何学的力学系理論とその周辺」(代表：岩井敏洋）用に準備された原稿です。この研究は科学研究費（奨励研究Ａ課題番号１３７４００４９）の援助を受けています。

†e-mail:miyazaki@math.hc.keio.ac.jp

る指標が出現していることを見る（Propositions 4.1, 5.5 を参照せよ）。ちなみに Poincaré-Cartan form に対応しているコホモロジー類は、Fedosov の変形量子化 ([F1-2]) の流儀で Deligne's characteristic class of star-product と呼ばれているものである ([De], [GR])。

歴史的にみれば、変形量子化を行う過程において、Weyl 多様体と呼ばれる概念が (Fedosov らとは全く独立に) 大森・前田・吉岡により導入された。その後、その拡張概念として吉岡により contact Weyl 多様体と量子接続が構成された。量子接続の重要な性質として、それが単に Fedosov 接続の拡張になっているのみならず、Fedosov 接続から構成された Dirac 擬き作用素では曲率にあたる量が抽出出来なかった[1]のに対し、量子接続ではそれが取り出せることを挙げねばならない。また、この Dirac 擬き作用素が通常の Dirac 擬き作用素と異なる点として作用先のバンドルの階数が無限であることが挙げられる。そしてこの事がここでの Dirac 擬き作用素の取り扱いを困難にしている。

後半では G-equivariant な version を定式化する。もちろん、一般に作用が量子化されるとは限らないので、ここではかなり都合の良い仮定をして議論する（ただ本稿で行われる議論は局所的な議論なので仮定してある条件は大抵は成立していると思って差し支えない）。結果として G-equivariant な version では情報が不動点上に集約され、Poincaré-Cartan form の部分シンプレクティック多様体への引き戻しが出現するというすでに良く知られた古典的な場合のアナロジーが得られる。だが、ここで注意すべきことは一般には star-procuct を、部分多様体上の関数環を係数とする $\hbar$ の形式的冪級数環には制限できないと言うことである。従って制限により得られる Poincaré-Cartan 類に対応しているものが一体何物なのか、どのような量子化に対応していると思えば良いのかわからない[2]。ここでは、古典の場合のように制限・引き戻しに意味のつくカテゴリーにおいて問題を定式化する。もっと正確に述べると、所謂 tangential star-product（[Ma]、[FL]、[CGR] 参照）と呼ばれている star-product に限って定理の形で述べることにする（Proposition 6.3 を参照せよ）。corollary として、局所対称 Kaehler 空間において、その不動点のなす集合が全測地的になる場合についても定理が成り立つことを示す[3]。

非可換幾何というからには Connes の非可換幾何学との関係を鮮明に浮き彫りにしなくてはいけないのであろうが、ここでは K-theory や巡回 cohomology そして Chern character といった概念を前面に押し出して議論してはいない[4]。しかし幸いにもこの講究録の中に上村新吾氏の洗練された解説があるので是非それを併せ読まれたい。

---

[1]中心であるプランク定数と反応する元がないことによる。それに対し、反応を起こす元を付け加えた代数（多様体）が contsact Weyl 代数（多様体）なのである。

[2]もっと言うと量子化した世界では古典の場合と違い情報を局在化させると言うことに一般には意味がないとも思える。局在化させると言うのは極めて点描像に依存した考えであるので非可換微分幾何（pointless な空間）においては意味がないのも当然と言えば当然かもしれない。

[3]G-equivariant local index formula と tangential star-product と全測地的多様体の関係、更には量子接続の Marsden-Weinstein 簡約等も関連する話題である。

[4]一重に筆者の勉強不足によりそれができないだけのことである。

2 大森・前田・吉岡の理論

まずこの説において大森・前田・吉岡の変形量子化の理論を瞥見しておく。彼らの理論ではWeyl多様体と呼ばれるWeyl代数束が非常に重要な役割を演ずる。

Weyl代数 $W = (W, *)$ とは $Z_1 = X_1, \cdots, Z_n = X_n, Z_{n+1} = Y_1, \cdots, Z_{2n} = Y_n, \nu$ で形式的に生成され、以下のような基本関係式を満たす代数である。

$$\begin{aligned} &[X_i, X_j] = [Y_i, Y_j] = [\nu, X_i] = [\nu, Y_j] = 0, \\ &[X_i, Y_j] = -\nu\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{1}$$

但しここで、$[a, b] = a*b - b*a$ である。シンプレクティック多様体上の Weyl 多様体 $\mathcal{W}_M$ は適当な単純開被覆[5]上での、局所自明な Weyl 代数束 $\{W_{U_\lambda} = U_\lambda \times W\}_{\lambda\in\Lambda}$ の Weyl diffeomorphism と呼ばれる変換関数の貼り合わせによって構成されるのであった。このWeyl diffeomorphismとは単に代数束の貼り合わせと言うのみならず、Weyl 関数[6]と呼ばれる、局所自明Weyl代数束のある特殊なsectionからなる族を保つ変換関数である。その正確な定義を述べるために、先ずはWeyl 関数 $f^\#$ の定義を述べる。

Definition 2.1

$$\begin{aligned} f^\# &= f(z+Z) = f(x+X, y+Y) \\ &= \textstyle\sum_{\alpha,\beta} \frac{1}{\alpha!\beta!}\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(x,y) X^\alpha Y^\beta, \end{aligned} \tag{2}$$

ただし、ここで (x, y) は *Darboux* 座標系とし、$X = (X_1, \cdots, X_n), Y = (Y_1, \cdots, Y_n)$、$\alpha, \beta$ は *multi-indices* とする。写像 $\# : f \mapsto f^\#$ を *Weyl continuation*（接続[7]）とよばれる。

この Weyl 関数と Darboux 座標のうえの Moyal 積

$$f *_M g = \sum_{\alpha\beta} \frac{(\nu/2)^{|\alpha|+|\beta|}}{\alpha!\beta!} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta f \ \partial_x^\beta (-\partial_y)^\alpha g$$

との関係は次のようになる。

$$f^\# * g^\# = (f *_M g)^\#$$

次に、このWeyl関数と呼ばれるsectionからなる族を保つ代数束の変換関数にあたるものが次で定義される。

Definition 2.2 Φ は、次の条件を満たすとき *(local) Weyl diffeomorphism* と呼ばれる*:*

1. $\Phi_z : W_z \to W_{\phi(z)}$ が ν *-automorphism* $(\forall z \in U)$ となる。但し、ϕ は *base space* に誘導される微分同相写像である。

[5] $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限な単純開被覆で、各々の V_λ が Darboux coordinate によってパラメトライズ $\phi_\lambda : V_\lambda \to U_\lambda \subset \mathbf{R}$ されているとする。

[6] Weyl 関数は Fedosov 接続における parallel section に対応する。

[7] 微分幾何学で言うところの connection ではないので注意。

2. 引き戻し写像 Φ^* は $\Phi^*(\mathcal{F}(W_{\phi(U)})) = \mathcal{F}(W_U)$ を満足する。
3. Φ は *Hermitian property*（複素共役と *compatibe* である*)* をもつ。

[OMY] では、base space のシンプレクティック座標変換を局所自明 Weyl 代数束の Weyl diffoemorphism にリフトする方法[8]が示されているが、貼り合わせを行うための変換関数がコサイクルコンディションを満たすように補正調整をしていかなければならない。その過程に於いて、中心[9]ν の取り扱いが大切になる。しかし代数の内部には中心と反応する元はないので、中心の情報を引き出すために contact Weyl 代数を次のように導入してやる。

Definition 2.3 $\mathcal{C} = \mathbf{R}\tau \oplus W$ ただし、ここで τ は

$$[\tau, \nu] = 2\nu^2, \quad [\tau, Z_i] = \nu Z_i \tag{3}$$

を満たす元である。すなわち、次数作用素とする。

容易にわかることだが、$\mathcal{C}$ は、交換関係 (1) 及び (3) のもとリー環をなしている。吉岡は、この付加された元 τ を込みにした局所自明な contact Weyl 代数束を（先の Weyl diffeomorphism の拡張概念である）modified contact Weyl diffeomorphism と呼ばれる変換関数で貼り合わせて contact Weyl 多様体 $\mathcal{C}_M$ が構成されることを証明した。順番が逆さまになったが modified contact Weyl diffeomorphism の定義を述べておく。τ がどのような変換を受けるかということに条件がついている。正確な定義は

Definition 2.4 代数束の *automorphism* $\Psi : \mathcal{C}_U \to \mathcal{C}_{U'}$ は $\Psi_{W_{\phi(U)}}$ が *Weyl diffeomorphism* であるときに、*modified contact Weyl diffeomorphism (MCWD, for short)* といわれる。

注意 この定義は [Y] によって導入された概念である。さらに次が知られている。

Proposition 2.5 ([Y]) 任意の *MCWD* Ψ と、$\tilde{\tau}_U$ について、$\bar{f^\#} = f^\#$ なる $f \in C^\infty(U)[[\nu]]$ と $a(\nu^2) \in C^\infty(u)[[\nu]]$ で以下の条件を満たすものがある。

$$\Psi^* \tilde{\tau}_{U'} = \tau_U + f^\# + a(\nu^2).$$

さて [OMMY] において、（contact Weyl 代数を経由して）star-product の同型類が 2 次の Čech cohomology 空間 $\check{H}^2(M, \mathbf{R})$ を係数とする ν^2 に関しての形式的冪級数

$$c = [\omega] + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \nu^{2i} \quad c_i \in \check{H}^2(M, \mathbf{R}). \tag{4}$$

の全体と 1 対 1 に対応することが証明された。ここで c は Poincaré-Cartan 類と呼ばれるものである。

[8] 2 つの座標系の共通部分の上では Heisenberg 方程式を解いてリフトが得られる。
[9] 変形量子化で中心を $\hbar$ であらわすことも多いがここでは [OMY] に従う。

もちろん de Rham の定理から Poincaré-Cartan 類を実現する closed 2-form $\Omega_M(\nu^2) \in \wedge^2(M)[[\nu^2]]$ を以下のように採ってこれる。

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \Omega_M \\ & & & & \delta \downarrow \\ & & \{\xi_{U_\alpha}\} & \stackrel{d}{\to} & \{\Omega_M\}_\alpha \\ & & \delta\downarrow & & \\ \{\xi_{U_{\alpha\beta}}\} & \stackrel{d}{\to} & \{d\xi_{\alpha\beta}\} & & \\ \delta \downarrow & & & & \\ \{c_{\alpha\beta\gamma}\} \stackrel{i}{\to} \{c_{\alpha\beta\gamma}\} & & & & \end{array} \tag{5}$$

但し、d は微分 δ は Čech coboundary 作用素。そして、

$$H^2(M)[[\nu^2]] \ni [\Omega_M(\nu^2)] \longleftrightarrow c \in \check{H}^2(M, \mathbf{R})[[\nu^2]], \tag{6}$$

ここで、c が Poincaré-Cartan 類である。このようにして得られた 2-form $\Omega_M(\nu^2)$ について、吉岡は contact Weyl manifold と呼ばれる接続 ∇ 付きの contact Weyl 代数束を構成することに成功した。

Proposition 2.6 *([Y])* 各々の局所自明束で

$$\begin{aligned} \nabla z^i &= dz^i \\ \nabla Z^i &= -dz^i \\ \nabla \nu &= 0 \\ \nabla \tilde{\tau} &= \hat{\xi}(\nu^2) \end{aligned} \tag{7}$$

とおくと、これは大域的に貼り合わさって *contact Weyl* 多様体（の *section*）に作用する接続を定める。ただしここで $\tilde{\tau} = \tau + \omega_{ij} z^i Z^j$ 、$\hat{\xi}(\nu^2) = ad(\xi(\nu^2))\tilde{\tau}$、ここでその接続は以下のような性質を持っている。

$$\nabla^2 = ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2)). \tag{8}$$

さらにそれを *Weyl* 多様体に制限すると *Fedosov* 接続と一致する。

上記の意味で contact Weyl 多様体は star-product の geometrization と見なせる。もう少し精しく star-product と大森・前田・吉岡の理論の関係を述べれば以下のようになる。まずは、star-product(変形量子化) の定義を思い出しておく。

Definition 2.7 *([BFFLS]) Poisson* 多様体 (M, π) の *star product* とは $C^\infty(M)$ を係数とする形式的なパラメーター ν に関する形式的な冪級数のなす空間 $C^\infty(M)[[\nu]]$ 上の積

$$f *_\nu g = fg + \nu\pi_1(f,g) + \cdots + \nu^n \pi_n(f,g) + \cdots, (\forall f, g \in C^\infty(M)[[\nu]]),$$

で以下の条件を満たすものである。

1. $* = *_\nu$ は結合的
2. $\pi_1(f,g) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\{f,g\}$、
3. 各 π_n は $\mathbf{R}$-双線形かつ双微分作用素である。

得られた $(C^\infty(M)[[\nu]],*)$ は、*Poisson* 多様体 $(M,\{,\})$ の変形量子化（*deformation quantization*）と呼ばれる。

Weyl 多様体が Weyl diffeomorphism という Weyl 関数の族を保つような変換で貼り合わさっていることから Definition2.1 のように、大域的な Weyl 関数 $f^\#$ を定義することが出来て、$\mathbf{R}[[\nu]]$-線形空間としては

$$C^\infty(M)[[\nu]] \ni f \overset{\iota}{\leftrightarrow} f^\# \in \mathcal{F}(M) \tag{9}$$

という同型写像 ι が存在する。一方、$\mathcal{F}(M)$ にはファイバー毎の Moyal 積から自然に積が導入できるが、それを上記同型写像 ι でうつしてやると $C^\infty(M)[[\nu]]$ に star-product が定義できる。以上の議論を経て、我々は以下のような対応を得る。

$$\begin{array}{c}\{\text{star-product}\}/\sim \\ \updownarrow \\ \{\text{Poincaré-Cartan class on } M\} \\ \updownarrow \\ \{\text{contact Weyl manifold}\}/\sim\end{array} \tag{10}$$

このノートにおいては ∇ を量子接続あるいは吉岡接続と呼ぶことにして、しばしば ∇^Q とかく。

3　基本的な概念の導入

前節で導入された contact Weyl 多様体ならびに吉岡の量子接続を基にして Dirac 擬き作用素を導入しよう。量子論においてローレンツ変換に対して不変でない Schrödinger 方程式を改良するものとして Dirac 方程式が導入された。そこに現れた偏微分作用素である Dirac 作用素が幾何学に及ぼす効果は計り知れない。実際良く知られている古典的な Atiyah-Singer の指数定理においてもこの作用素が重要な役割を演じている。これらについては何といっても [BGV] を参照されたい。

この節ではスピン構造を許容する[10]シンプレクティック多様体上の contact Weyl 多様体の量子接続から、通常行われる手続きを経由し、Dirac 擬き作用素を導入する。そして、基本的性質（Lichnerowicz formula、や heat kernel の存在とその漸近展開など）を調べる。通常の Dirac と、ここで扱う Dirac 擬き作用素との間の本質的な差は、ベクトル束のランク（階数）が有限か無限かである。

[10] 以下に述べる議論構成はいずれも局所的であるのでいつでもこうだと思って良い。

3.1 Clifford代数の変形

ここではClifford代数とスピン表現の変形について述べる。

n次元内積付ベクトル空間(V^*, g)の$\hbar$-Clifford代数$C_\hbar(V^*)$とは$\mathbf{R}$上で$\hbar$とgに関する正規直交基底$e^1, \cdots, e^n$で形式的に生成され以下の基本関係式を満たすもの

$$e^i e^j + e^j e^i = -2\delta_{ij}\hbar, \tag{11}$$

$$\hbar e^i - e^i \hbar = 0. \tag{12}$$

から形式的に生成され、以下のように定義されるカイラリティー[11]を添加した代数である。

Proposition 3.1 先ほどの正規直交基底(ただし次元は偶数次元としておく)$(e^i)_{i=1,2,\cdots,n}$を用いて、

$$\Gamma_\hbar = \left(\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\right)^{\frac{n}{2}} e^1 \cdots e^n \tag{13}$$

とおく。$\Gamma_\hbar$の定義は正規直交基底の選択にはよらない。そして次もわかる。

$$\Gamma_\hbar^2 = 1, \quad \Gamma_\hbar v = -v\Gamma_\hbar \ (v \in V^*). \tag{14}$$

Proof 最初の等式については、

$$\begin{aligned} \Gamma_\hbar^2 &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\right)^n e^1 e^2 \cdots e^n e^1 e^2 \cdots e^n \\ &= \left(\frac{\sqrt{-1}}{\hbar}\right)^n (-\hbar)^n (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{15}$$

2番目の等式は明白。

この記述方法を用いて$\hbar$-スピン表現を導入しよう。

Proposition 3.2 V^*で$n = 2m$-次元の向きのついた実ベクトル空間で$\{e^1, \cdots, e^{2m}\}$を正規直交基底とする。Pを$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$の向きつけられた*polarization*[12]とする。そうするとPは$\{w^j = \frac{1}{2}\{e^{2j-1} - \sqrt{-1}e^{2j}\} : j = 1, \cdots, \frac{n}{2}\}$から生成される。さて、

$$S = \wedge P, \quad S^\pm = \wedge^\pm P, \tag{16}$$

$$\mathcal{S}_\hbar = S(\hbar), \quad \mathcal{S}_\hbar^\pm = S^\pm(\hbar) \tag{17}$$

[11] このカイラリティー作用素を用いればMckean-Singer型定理も示せる

[12] つまり、Pは$V^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$の複素部分空間で$V^* \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = P \oplus \bar{P}, g|_P = 0$となっているようなもの。

とおこう。加えて、$\mathbf{R}[\hbar]$-線形写像 $c_\hbar$ を次のように定義する。$s=\sum_i s_i\hbar^i \in S_\hbar$ に対して、

$$\begin{aligned} c_\hbar(w)s &= 2^{1/2}w\wedge s \quad (w\in P) && (18)\\ c_\hbar(\bar{w})s &= -2^{1/2}\iota_\hbar(\bar{w})s = -2^{1/2}\hbar g(\bar{w},s)\ (\bar{w}\in\bar{P}) && (19)\\ c_\hbar(\hbar)s &= \hbar s && (20)\end{aligned}$$

すると $c_\hbar$ が $C_\hbar(V^*)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の $S_\hbar$ 上への作用を与える。より正確には以下のような代数準同型を得る。

$$c_\hbar : C_\hbar(V^*)\to End(S_\hbar). \tag{21}$$

そして

$$S_\hbar^\pm = \{\Gamma_\hbar a = \pm a\}\text{ となる。} \tag{22}$$

Proof $V^*\oplus\hbar\mathbf{R} = P\oplus\bar{P}\oplus\hbar\mathbf{R}$ であるから、$T(V^*\oplus\hbar\mathbf{R})$ から $End(S_\hbar)$ への写像で

$$\begin{aligned} c_\hbar(w)s &= 2^{1/2}w\wedge s \quad (w\in P), && (23)\\ c_\hbar(\bar{w})s &= -2^{1/2}\iota_\hbar(\bar{w})s = -2^{1/2}\hbar\iota(\bar{w},s) \quad (\bar{w}\in\bar{P}), && (24)\\ c_\hbar(\hbar)s &= \hbar s. && (25)\end{aligned}$$

の拡張がある（これも $c_\hbar$ と表す)。ここから *Clifford* 代数に準同型を誘導するためには

$$\begin{aligned} &w^i\otimes\bar{w}^j+\bar{w}^j\otimes w^i+2\hbar\delta_{ij}, && (26)\\ &\hbar\otimes w^i - w^i\otimes\hbar && (27)\\ &\hbar\otimes\bar{w}^i-\bar{w}^i\otimes\hbar && (28)\end{aligned}$$

が $c_\hbar$ の核に入っている事を検証する必要がある。ただし $w^i=\frac{1}{2}(e^{2i-1}+\sqrt{-1}e^{2i})$ とおく。まず *(27),(28)* については

$$\begin{aligned} & \{c_\hbar(w)c_\hbar(\hbar)-c_\hbar(\hbar)c_\hbar(w)\}s && (29)\\ =\ & c(w)\hbar s - c(\hbar)2^{1/2}w\wedge s\\ =\ & 2^{1/2}w\wedge\hbar s-\hbar 2^{1/2}w\wedge s\\ =\ & 0.\end{aligned}$$

そして、$\hbar g$ に関する内部積 $\iota_{\hbar g}$ は $\hbar\iota_g$ と一致することに注意して以下を得る。

$$\begin{aligned} & \{c_\hbar(\bar{w})c_\hbar(\hbar)-c_\hbar(\hbar)c_\hbar(\bar{w})\}s && (30)\\ =\ & c(\bar{w})\hbar s - c(\hbar)(-2^{1/2})\iota_{\hbar g}(\bar{w})s\\ =\ & (-2^{1/2})\iota_{\hbar g}(\bar{w})\hbar s-\hbar(-2^{1/2})\iota_{\hbar g}(\bar{w})s\\ =\ & 0.\end{aligned}$$

同様に

$$
\begin{aligned}
& \{c_\hbar(w^i)c_\hbar(\bar{w}^j) + c_\hbar(\bar{w}^j)c_\hbar(w^i)\}s \\
= \ & c_\hbar(w^i)(-2^{1/2})\iota_{\hbar g}(\bar{w}^j)s + c(\bar{w}^j)2^{1/2}w^i \wedge s \\
= \ & c_\hbar(w^i)(-2^{1/2})\hbar g(\bar{w}^j, s) + c_\hbar(\bar{w}^j)2^{1/2}w_i \wedge s \\
= \ & -2\hbar w^i \wedge g(\bar{w}^j, s) + 2\hbar w^i \wedge g(\bar{w}^j, s) - 2\hbar g(\bar{w}^j, w^i)s \\
= \ & -2\delta_{ij}\hbar s
\end{aligned}
\tag{31}
$$

ここで $w^i \wedge \iota_g(\bar{w}^j)s + \iota_g(\bar{w}^j)w^i \wedge s = -2\delta_{ij}s$ を使用した[13]。

ついで $\Gamma_\hbar$ の作用について見てみよう。

$$
\begin{aligned}
c_\hbar(\Gamma_\hbar)s \ = \ & \left(\frac{-1}{\hbar}\right)^{n/2} ((w^1\wedge)\iota_{\hbar g}(\bar{w}^1) - \iota_{\hbar g}(\bar{w}^1)(w^1\wedge))\cdots \\
& \cdots((w^{n/2}\wedge)\iota_{\hbar g}(\bar{w}^{n/2}) - \iota_{\hbar g}(\bar{w}^{n/2})(w^{n/2}\wedge)).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

よって

$$\Gamma_\hbar|_{\wedge^k P[\hbar]} = (-1)^k \tag{33}$$

このようにして次が得られた。

$$S^\pm_\hbar = \{\pm 1 \textit{ -eigen space of } \Gamma_\hbar\}. \tag{34}$$

Definition 3.3 $S^\pm_\hbar$ を $\hbar$-半スピノル 加群と呼んでおく。

Definition 3.4 *supertrace(スーパートレース)* を以下のように定義する。

$$
Str(a) = \begin{cases} Tr_{S^+}(a) - Tr_{S^-}(a) & (a \in C^+_\hbar(V)), \\ 0 \quad (a \in C^-_\hbar(V)) \end{cases}
\tag{35}
$$

もし M がリーマン多様体であるなら、

Definition 3.5 *Clifford* 束を以下のように定義する。

$$C_\hbar(M) = O(M) \times_{O(n),\rho} C_\hbar(\mathbf{R}^n), \tag{36}$$

ただし、ρ は $O(n)$ の $C_\hbar(\mathbf{R}^n)$ への標準的作用で、$O(n)$ は $\mathbf{R}[\hbar]$ 上には自明作用するとする[14]。

---

[13] $e^1e^2 = \frac{1}{2}[w^1, \bar{w}^1]$ 等に注意。なぜなら $w^i = \frac{1}{2}(e^{2i-1} + \sqrt{-1}e^{2i})$。そして $g(e^i, e^j) = \delta_{ij}$。

[14] Thus there exists a lift of Levi-Civita connection on $C_\hbar(M)$.

3.2 Dirac 作用素の定義並びに Lichnerowicz formula

M がスピン構造を許容するコンパクトな Kaehler 多様体（計量 g、概複素構造 J）とする。2 節で述べたように量子接続 ∇^Q ($\mathcal{C}_M \otimes \wedge_M$ に作用) が構成されるのであった。いま $\hbar$ を実変数としておく。代数束 $\mathcal{E} = \mathcal{C}_M \otimes \wedge_M \otimes \mathcal{S}_{\hbar M}$ を考えよう。共変的に拡張された量子接続 ∇^Q と Clifford 接続[15]∇^S から新たに Clifford 接続 $\nabla^{\mathcal{E}} = \nabla = \nabla^Q \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^S$ が出来る。これから Dirac 作用素をいつものように定義しよう。

Definition 3.6

$$D = \sum_i c_\hbar(e^i)\nabla^{\mathcal{E}}_{e_i}, \tag{37}$$

ただし、ここで $c_\hbar$ は *$\hbar$-Clifford* 作用、$\{e_i\}$ は正規直交基 $\{e^i\}$ は双対基とする。

Riemann 計量 g を $\frac{1}{\hbar}g = g_\hbar$ で置換える[16]と、それに伴い体積形式 (密度)、 Levi-Civita 接続、 Laplacian、そして Lichnerowicz formula が以下のような変化を受ける。

Proposition 3.7

$$\begin{array}{llcl}
\textit{volume form} & : vol_M & \to & \hbar^{-n/2}vol_M, \\
\textit{Christoffel} & : \Gamma^i_{jk} & \to & \Gamma^i_{\hbar jk} = \Gamma^i_{jk}, \\
\textit{Laplacian} & : \Delta & \to & \Delta_\hbar = \hbar\Delta, \\
\textit{Lichnerowicz formula} & : D^2 & \to & D^2_\hbar = \Delta_\hbar + V
\end{array}$$

ただしここで

$$V = \frac{\hbar r_M}{4} + c_\hbar(ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2)))$$

そして r_M はスカラー曲率である。

Proof *volume form* に関しては

$$vol_M = \det{}^{1/2}(g_{ij}(x))dx \to \hbar^{-n/2}vol_M = \det{}^{1/2}(\frac{1}{\hbar}g_{ij}(x))dx. \tag{38}$$

次に、 *Christoffel* に関しては、

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\{\partial_{x^j}g_{kl}+\partial_{x^k}g_{jl}-\partial_{x^l}g_{jk}\}\to\Gamma^i_{\hbar jk} = \frac{1}{2}(\hbar g^{il})\{\partial_{x^j}(\hbar^{-1}g_{kl})+\partial_{x^k}(\hbar^{-1}g_{jl})-\partial_{x^l}(\hbar^{-1}g_{jk})\}. \tag{39}$$

更に、*Laplacian* に関しては、

$$\Delta = g^{ij}(\nabla^{\mathcal{E}}_i\nabla^{\mathcal{E}}_j + \Gamma^k_{ij}\nabla^{\mathcal{E}}_k)\to\Delta_\hbar = \hbar g^{ij}(\nabla^{\mathcal{E}}_i\nabla^{\mathcal{E}}_j + \Gamma^k_{ij}\nabla^{\mathcal{E}}_k). \tag{40}$$

---

[15] Clifford 作用と相性が良いという意味。Levi-Civita∇^g から標準的に構成される。
[16] これはまさしく $\hbar$ を変数とするような Clifford 代数を定義したことに相当した置換えになっている。

最後に *Lichnerowicz formula* を証明しよう。局所座標を取れば、*Dirac* 作用素が次のように書かれる。$D_\hbar = \sum_i c_\hbar(dx^i)\nabla_i$. ただし、$\nabla_i = \nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_{x^i}}$ である。以下では $[a,b] = ab - (-1)^{(deg\ a)(deg\ b)}ba$ と言う記号を使う。まず、

$$[\nabla_i, c_\hbar(dx^j)] = c_\hbar(\nabla_i dx^j) = -\Gamma^j_{ik}c_\hbar(dx^k), \tag{41}$$

であることに注意。なぜなら $\nabla^{\mathcal{E}}$ が *Clifford connection* である事と、

$$[c_\hbar(dx^i), c_\hbar(dx^j)] = 2\hbar g^{ij}. \tag{42}$$

である事からわかる。さて、*Lichnerowicz formula* を示そう。

$$\begin{aligned}
D_\hbar^2 &= \frac{1}{2}\sum_{ij}[c_\hbar(dx^i)\nabla_i, c_\hbar(dx^j)\nabla_j] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{ij}\{c_\hbar(dx^i)\nabla_i c_\hbar(dx^j)\nabla_j + c_\hbar(dx^j)\nabla_j c_\hbar(dx^i)\nabla_i\} \\
&\overset{(41)}{=} \frac{1}{2}\sum_{ij}\{c_\hbar(dx^i)([\nabla_i, c_\hbar(dx^j)] + c_\hbar(dx^j)\nabla_i)\nabla_j \\
&\qquad c_\hbar(dx^j)([\nabla_j, c_\hbar(dx^i)] + c_\hbar(dx^i)\nabla_j)\nabla_i\} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(dx^i)c_\hbar(dx^j)\nabla_i\nabla_j \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(dx^j)c_\hbar(dx^i)\nabla_j\nabla_i \\
&\quad + \sum_{ij} c_\hbar(dx^i)[\nabla_i, c_\hbar(dx^j)]\nabla_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{ij}\{c_\hbar(dx^i)c_\hbar(dx^j) + c_\hbar(dx^j)c_\hbar(dx^i)\}\nabla_i\nabla_j \\
&\quad - \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(dx^j)c_\hbar(dx^i)\nabla_i\nabla_j + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(dx^j)c_\hbar(dx^i)\nabla_j\nabla_i \\
&\quad + \sum_{ij} c_\hbar(dx^i)[\nabla_i, c_\hbar(dx^j)]\nabla_j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{ij}[c_\hbar(dx^i), c_\hbar(dx^j)]\nabla_i\nabla_j + \sum_{ij} c_\hbar(dx^i)[\nabla_i, c_\hbar(dx^j)]\nabla_j \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(dx^i)c_\hbar(dx^j)[\nabla_i, \nabla_j] \\
&\overset{(42)}{=} -\sum_{ij}\hbar g^{ij}\nabla_i\nabla_j + \sum_{ij}\frac{1}{2}[c_\hbar(dx^i), c_\hbar(dx^j)]\Gamma^k_{ij}\nabla_k \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(dx^i)c_\hbar(dx^j)[\nabla_i, \nabla_j] \\
&= -\sum_{ij}\hbar g^{ij}\{\nabla_i\nabla_j + \sum_k \Gamma^k_{ij}\nabla_k\} + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(dx^i)c_\hbar(dx^j)[\nabla_i, \nabla_j]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Delta_\hbar + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(e^i)c_\hbar(e^j)(\nabla^Y \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^S)^2(e_i, e_j) \\
&= \Delta_\hbar + \frac{1}{2}\sum_{ij} c_\hbar(e^i)c_\hbar(e^j)\{ -\frac{1}{4}\sum_{ijkl} R^K_{klij} c_\hbar(e^k)c_\hbar(e^l) \\
&\qquad + \sum_{kl}(\nabla^Y)^2(e_k, e_l)c_\hbar(e^k)c_\hbar(e^l)\} \\
&= \Delta_\hbar + \frac{1}{2}\sum_{l}\{-\frac{1}{4}\sum_{ijkl} R^K_{klij} c_\hbar(e^i)c_\hbar(e^j)c_\hbar(e^k)\}c_\hbar(e^l) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{kl} ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2))(e_k, e_l)c_\hbar(e^k)c_\hbar(e^l) \\
&\overset{(43)}{=} \Delta_\hbar + c_\hbar(ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2))) + \frac{\hbar r_M}{4},
\end{aligned}
$$

最後の変形では次の公式を使っている。

$$
\begin{aligned}
&R^K_{klij} c_\hbar(e^i)c_\hbar(e^j)c_\hbar(e^k) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{\sigma \in S_3} R^K_{klij} sgn(\sigma) c_\hbar(e^{\sigma(i)})c_\hbar(e^{\sigma(j)})c_\hbar(e^{\sigma(k)}) \\
&\qquad - R^K_{klij}\hbar\delta_{ij}c_\hbar(e^k) - R^K_{klij}\hbar\delta_{jk}c_\hbar(e^i) + R^K_{klij}\hbar\delta_{ik}c_\hbar(e^j), \\
&= -2\hbar r_M.
\end{aligned} \tag{43}
$$

(43) は以下の式を組み合わせる事によって証明される。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{ijk, \sigma \in S_3} R^K_{klij} sgn(\sigma) c_\hbar(e^{\sigma(i)})c_\hbar(e^{\sigma(j)})c_\hbar(e^{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{i'j'k', \sigma \in S_3} R^K_{\sigma^{-1}(k')\sigma^{-1}(i')\sigma^{-1}(j')} sgn(\sigma) c_\hbar(e^{i'})c_\hbar(e^{j'})c_\hbar(e^{k'}) = 0
\end{aligned} \tag{44}
$$

$$
\sum_{ij} \hbar\delta_{ij} c_\hbar(e^k) R^K_{klij} = 0, \tag{45}
$$

$$
\sum_{jk} \hbar\delta_{jk} c_\hbar(e^i) R^K_{klij} c_\hbar(e^l) = c_\hbar(e^i)c_\hbar(e^l) R_{jlij}, \tag{46}
$$

$$
\sum_{jk} \hbar\delta_{ki} c_\hbar(e^i) R^K_{klij} c_\hbar(e^l) = c_\hbar(e^j)c_\hbar(e^l) R_{ilij}, \tag{47}
$$

$$
\sum_{ijk} c_\hbar(e^j)c_\hbar(e^i) R_{ikjk} = \sum_{ik} \hbar R_{ikik} = -\hbar 2 r_M. \tag{48}
$$

4　解の構成

この節の目的は以下の命題を証明することである。最初にも述べたとおり階数無限であることが厄介な点なのである。

Proposition 4.1 *([Mi])* 熱方程式

$$(\partial_t + D_\hbar^2)p_t = 0 \tag{49}$$

の

$$p_t(x,y) = q_t(x,y)\sum_{i=0}^{\infty} t^i\Phi_i(x,y)|vol_{M_y}|^{\frac{1}{2}}|_{\mathcal{E}_n} \tag{50}$$

を漸近展開とする基本解が各 $\mathcal{E}_n$[17]毎に存在し、射影系 $\{\mathcal{E}_n\}$ の忘却写像とは可換である。故に、射影極限を定義し、*Fréchet* 位相に関する解を定めている。

Proof 平らな空間の熱方程式

$$(\partial_t + \Delta)q_t(\mathbf{x}) = 0 \tag{51}$$

の解として

$$q_t(\mathbf{x}) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-||\mathbf{x}||^2/4t}|d\mathbf{x}|^{1/2} \tag{52}$$

があるが[18] *(*$|d\mathbf{x}|^{1/2}$ は *half-density(*半密度) *)*、計量が $g_\hbar$ で与えられた曲がった *Riemann* 多様体上では作用素などが *Proposition3.7* のような変更を受けて、以下のようになる。

$$(\partial_t + \Delta_\hbar - j_\hbar^{1/2}(\Delta_\hbar \cdot j_\hbar^{-1/2}))q_t^\hbar = 0 \tag{53}$$

但し、$j_\hbar(\mathbf{x}) = \det{}^{1/2}(g_{\hbar,ij}(\mathbf{x}))$。これを利用して *Dirac* 擬き作用素 $D_\hbar$ の 2 乗の熱核を漸近解析的な手法で求めよう。まず、半密度を考慮に入れて以下のような作用素を $D_\hbar^2$ から定義しておく。

$$\begin{array}{llll} H_\hbar: & \Gamma(\mathcal{C}_M\otimes\wedge_M\otimes\mathcal{S}_M) & \to & \Gamma(\mathcal{C}_M\otimes\wedge_M\otimes\mathcal{S}_M) \\ & s & \to & |vol_M|_{g_\hbar}^{-1/2}(D_\hbar^2(s|vol_M|_{g_\hbar}^{1/2})) \\ \tilde{H}_\hbar: & s & \to & j_\hbar^{1/2}(D_\hbar^2(s\cdot j_\hbar^{-1/2})). \end{array} \tag{54}$$

すると、熱方程式は半密度を込みにして次の方程式に書きかえられる。

$$(\partial_t + H_\hbar)(s_t q_t^\hbar) = ((\partial_t + t^{-1}\nabla_\mathcal{R} + \tilde{H}_\hbar)s_t)q_t^\hbar = 0. \tag{55}$$

これを解く為に s_t を時間 t に関する形式的冪級数

$$\sum_{i=0}^{\infty} t^i\Phi_i(x,y)|vol_{M_y}|_{g_\hbar}^{1/2} \tag{56}$$

だと仮定して、上の式に代入して t の次数毎に 0 とした式を作ると、次のような漸化式ができる。

$$\nabla_\mathcal{R}\Phi_0 = 0, \tag{57}$$

$$(\nabla_\mathcal{R} + i)\Phi_i = -\tilde{H}_\hbar\cdot\Phi_{i-1} \quad (i>0). \tag{58}$$

[17] $\mathcal{E}_n$ の定義は以下の証明の中で与える。
[18] Euclid heat kernel と呼んでおこう。

熱核の初期条件から $\Phi_0 = I$ もわかる。これは、以下のように *parallel transform* を利用して解が構成できる。

$$\Phi_i(x,y) = -\tau(x,y)\int_0^1 s^{i-1}\tau(sx,y)^{-1}(\tilde{H}_\hbar \cdot \Phi_{i-1})(sx,y)ds, \tag{59}$$

$$\Phi_0(x,y) = \tau(x,y), \tag{60}$$

ただし τ は測地線 $\exp_y(s\mathbf{x}) : [0,1] \to M$ に沿っての *parallel transform* を意味している。現段階ではまだ形式的な熱核を構成したに過ぎない。そこで、続いて近似解および厳密解を構成するのであるがそのためにはベクトル束の C^l-ノルムが必要となる。しかし、今考えているベクトル束はランクが無限次元なので通常のようには議論できない。これを回避する為に *Weyl* 代数の次数 Weyl-deg と $\hbar$-つきの微分形式の次数 Clif-deg をあわせて（ただし ν と $\hbar$ は 2 次と数えることとする）全次数を deg = Weyl-deg + Clif-deg と定義してやる。それを使って

$$\mathcal{E}^n = \{a \in \mathcal{E} : \deg a = n\}$$

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}/\sum_{l>n}\mathcal{E}^l$$

と置く。ここで、*(59)* において

$$\Psi : \eta \to -\tau(x,y)\int_0^1 s^{i-1}\tau(sx,y)^{-1}(\tilde{H}_\hbar \cdot \eta)(sx,y)ds$$

とおく。すると

$$\tilde{H}_\hbar : s \to j_\hbar^{1/2}(D_\hbar^2(s \cdot j_\hbar^{-1/2}))$$

と *Lichnerowicz formula*

$$D_\hbar^2 = \hbar\Delta + c_\hbar ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2)) + \frac{\hbar r_M}{4}$$

における $\hbar$ の作用の仕方から Ψ によって全次数が下がらないことが容易にわかる。よって、

$$\Psi(\sum_{l>n}\mathcal{E}^l) \subset \sum_{l>n}\mathcal{E}^l$$

がえられる。また、*Dirac* についても

$$D_\hbar = \sum_i c_\hbar(dx^i)(\nabla^Y_{\partial_i} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^S_{\partial_i})$$

であるので全次数が下がらない。以上から、議論が無限次元のベクトル束から有限次元の商ベクトル束 $\mathcal{E}_n$ に帰着されるということがわかる。よって、次数 n を固定して、C^l-ノルムを考えることが出来るようになる。その結果、漸近解析的[19]に近似解そして厳密解が構成できる。以上述べてきたことをまとめると命題が得られる。

[19]線形偏微分方程式において良く使われる手法である。たとえば Schrödinger 方程式をアイコナール方程式、高次輸送方程式を解くことに帰着させて時間依存解を求める方法がある。詳しくは [Fu]、[Le]、あるいは [BGV] を参照のこと。

5 共形変換

次に方程式や解を測地座表上の自明なファイバー座標をもとに書きなおして、更に共形変換を施すことで Mehler formula が導出できることを見よう。

まず $E = S[\hbar] \otimes \mathcal{C} \otimes \wedge$ とする。e_i を $T_{x_0}M$ における正規直交基底 ∂_i の測地線にそって平行移動することによって得られる局所正規直交フレーム、e^i を今作った局所的な正規直交フレームの T^*M 上のデュアルフレームとして、バンドル $\mathcal{E}$ を自明化しておく（ファイバーは E と書く）と $End(E)$-値関数 $c_\hbar(e^i)_x$ は実は定数準同型写像となっていて、具体的には $c^i_\hbar$ である。

これを使うと直接次がわかる。

Proposition 5.1 共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_i}$ は $\Gamma(U, E)$ で表示してやると、

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_i} &= \partial_i + \frac{1}{4}\sum_{j;k<l} R_{klij}\mathbf{x}^j c^k_\hbar c^l_\hbar \\ &\quad + \sum_{k<l} f_{ikl}(\mathbf{x}) c^k_\hbar c^l_\hbar + g_i(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{61}$$

ただしここで $R_{klij} = (R(\partial_i, \partial_j)\partial_l, \partial_k)_{x_0}$ は ∇^K の x_0 における *Riemann* 曲率 R、そして、

$$f_{ikl}(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|^2) \in C^\infty(U), \tag{62}$$

$$g_i(\mathbf{x}) = O(|\mathbf{x}|) \in C^\infty(U) \tag{63}$$

はエラー項である[20]。

$D^2_\hbar$ の熱核を $p_t(x, x_0)$ とする。これを $End(E)$-値の $0 \in V$ の近傍 U 上に翻訳する。

$$k(t, \mathbf{x}) = \tau(x_0, x) p_t(x, x_0),$$

ただし、ここで $x = exp_{x_0}\mathbf{x}$。同一視 $End(E) \cong End(\mathcal{C} \otimes \wedge \otimes \mathcal{S}[\hbar]) \cong End(\mathcal{S}[\hbar]) \otimes End(W) \cong \bigwedge V^*[\hbar] \otimes End(W)$[21]をつかって、$k(t, \mathbf{x})$ は U 上 $\bigwedge V^*[\hbar] \otimes End(W)$-値関数と同一視される。

$\bigwedge V^* \otimes End(W)$ を自然に $C_\hbar(V^*) \otimes End(W)$-加群とみる。ただし、$C_\hbar(V^*)$ の $\bigwedge V^*[\hbar]$ 上への作用は $c_\hbar(a) = a \wedge \cdot - \iota_{\hbar g}(a)$ 。以上の記号のもとで、熱方程式 (49) が

$$(\partial_t + L)k_t(x) = 0 \tag{64}$$

となる。但し、L を $U \subset V$ 上の $C(V^*) \otimes End(W)$ に係数を持つ、以下で定義される微分作用素とする：

$$L = \sum_i \hbar\left((\nabla^{\mathcal{E}}_{e_i})^2 - \nabla^{\mathcal{E}}_{\nabla_{e_i}e_i}\right) + \frac{\hbar}{4}r_M + \sum_{i<j} ad(\frac{1}{2}\Omega_M(\nu^2))(e_i, e_j)c^i_\hbar c^j_\hbar. \tag{65}$$

[20]このエラー項が共形変換後に消えることが後で効いてくる
[21]ただし、twisting bundle を $W = \mathcal{C} \otimes \wedge$ としてある。

さて、以下では k_t の共形変換 ([BGV], [Ge]) を考えたいのであるが、その前に共形変換の正確な定義を述べておこう。

Definition 5.2

$$\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}_+ \times U, \wedge V^*[\hbar] \otimes End(\mathcal{C} \otimes \wedge))$$

について、 $\delta_u(\alpha)$ を以下のよう定めよう。

$$(\delta_u(\alpha))(t,x) = \sum_{i=0}^{n} u^{-i/2}\alpha(ut, u^{1/2}x)_{[i]} \tag{66}$$

ここで $\alpha_{[i]}$ は $\wedge V^*$ の i-次形式の部分を表す。

するとそれに伴って $C^\infty(\mathbf{R}_+ \times U, \wedge V^*[\hbar] \otimes End(\mathcal{C} \otimes \wedge))$ に働く作用素のほうも次のように変化する。

$$\delta_u \phi(x) \delta_u^{-1} = \phi(u^{1/2}x), \tag{67}$$

$$\delta_u \partial_t \delta_u^{-1} = u^{-1}\partial_t, \tag{68}$$

$$\delta_u \partial_x \delta_u^{-1} = u^{-1/2}\partial_x, \tag{69}$$

$$\delta_u(\alpha \wedge \cdot)\delta_u^{-1} = u^{-1/2}(\alpha \wedge \cdot)\ (\alpha \in\ P^*), \tag{70}$$

$$\delta_u \iota_\hbar(\alpha)\delta_u^{-1} = u^{1/2}\iota_\hbar(\alpha)\ (\alpha \in\ \bar{P}^*), \tag{71}$$

$$\delta_u(\hbar\cdot)\delta_u^{-1} = \hbar. \tag{72}$$

以上の準備のもと conformal rescaling された heat kernel $r_\hbar(t,u,x)$ が以下のように定義される。

Definition 5.3

$$r_\hbar(t,u,x) = u^{n/2}\delta_u(k)(t,x) \tag{73}$$

もちろん対応する作用素 L のほうも影響を受けて $u\delta(u)L\delta(u)^{-1}$ になる。そして次がわかる。

Proposition 5.4

$$u\delta(u)L\delta(u)^{-1} \to K = -\sum_i \hbar(\partial_i - \frac{1}{4}\sum_j R_{ij}\mathbf{x}_j)^2 + ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2)) \tag{74}$$

対応する heat kernel[22] に関して次が成立する。

[22] 式全体を $\hbar$ で割っておくと、解くべき式は

$$\left(\frac{\partial}{\hbar\partial t} - \sum_i(\partial_i - \frac{1}{4}\sum_j R_{ij}\mathbf{x}_j)^2 + \frac{ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2))}{\hbar}\right)k_t(\mathbf{x}) = 0 \tag{75}$$

となるので $t = s/\hbar$ として解いて、$s = \hbar t$ でおきかえれば heat kernel が得られる。

Proposition 5.5 $u \to 0$ とする時 $D_\hbar^2$ の *heat kernel* $r_\hbar(t,u,x)$ は次の極限

$$(4\pi t\hbar)^{\frac{-n}{2}} \det{}^{1/2}\left(\frac{t\hbar R/2}{\sinh(t\hbar R/2)}\right) \tag{76}$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{4t\hbar}\left\langle x \left| \frac{t\hbar R}{2}\coth\left(\frac{t\hbar R}{2}\right)\right| x\right\rangle - t\, ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2))\right)$$

を持つ。

ここで $t=1, \mathbf{x}=0, \hbar=1$ としてやれば、

Proposition 5.6

$$\lim_{u\to 0} r_\hbar(t,u,\mathbf{x})|_{t=1,\mathbf{x}=0,\hbar=1} = \hat{A}(M)ch(*_M) \tag{77}$$

が得られる[23]。但し、ここで $ch(*_M) = e^{ad(\frac{1}{\nu}\Omega_M(\nu^2))}$ とする。

6 Equivariant version

さて前節までで、heat kernel が通常の場合とかなり似通った性質を持っていることがわかった。特に $t \to 0$ における漸近形が

$$k_t(x,y) = q_t(x,y)\sum_{i=0}^{\infty} t^i \Phi_i(x,y)|vol_{M_y}|^{\frac{1}{2}} \tag{78}$$

と言う形をしていることもわかった。ここで $q_t(x,y)$ は Euclid heat kernel

$$q_t(x,y) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\|\mathbf{x}\|^2/4t}|d\mathbf{x}|^{1/2},\ exp_y\mathbf{x} = x \tag{79}$$

である。これはもちろん t に関して $-\frac{n}{2}$ から始まるような、Laurent series である。これに conformal rescaling を施して得られるのが Mehler formula である。これらの状況を踏まえて、M が向きつけられたコンパクトなスピン・概 Kaehler 多様体（J が概複素構造）としリー群 H が左から等長的、シンプレクティック、かつ Clifford 作用、Clifford 接続と compatible に作用しているという状況を考えることにする[24]。

---

[23] カイラルとディラックの反交換関係からいつもの議論でマッキーンシンガーが証明され、それを Proposition 5.6 と組み合わせれば、普通の指数定理もどきがでる。

Proposition 5.7

$$Tr_s(e^{tD^2}) = (2\pi)^n \int_M \hat{A}(M)ch_C(*_M)$$

他のベクトル束 $\mathcal{W}$ とテンソルをとって

$$Tr_s(e^{tD^2}) = (2\pi)^n \int_M \hat{A}(M)ch(\mathcal{W})ch_C(*_M).$$

もわかる。

[24] Clifford 接続とも可換であるとすると、得られた Dirac 擬き作用素も $H-$ 作用とは可換となる。

更に、$\eta \in H$ が量子接続と可換になっているような M 上の contact Weyl 多様体を考える[25]。

さて、簡単の為に η-不動点の集合 M^η が単一の連結集合からなる部分多様体になっているとする。接束 TM を M^η に制限して接方向と計量に関する法方向との分解

$$TM|_{M^\eta} = TM^\eta \oplus N \tag{80}$$

を考える。η が計量、向きを保つことから Levi-Civita 接続は上記の分解を保つ。その結果もともとの曲率テンソルも以下のように分解される。

$$R|_{M^\eta} = R_0 \oplus R_1 \tag{81}$$

ただし、ここで R^0, R^1 は接続を TM^η, N に制限して得られた接続からそれぞれ得られる曲率とする。次に η の押出（微分）を M^η に制限してもやはり (80) を保ち、次のような分解が得られる。

$$d\eta|_{M^\eta} \in \Gamma(SO(TM^\eta) \oplus SO(N)) \tag{82}$$

M^η が不動点であると言うことから $v \in T_xM,\ (x \in M^\eta)$ について、容易に

$$v \in T_xM^\eta \leftrightarrow d\eta(v) = v \tag{83}$$

を得る。さらに、η が N に誘導する変換を η^N と記すことにすると、計量を保つことから固有値が ± 1 であり、その直前の結論から固有値は -1 でなければならないこともわかる。更に行列式を考えてそれぞれの階数は偶数であることが結論できる。よって

$$\dim M = \dim M^\eta + rkN, \quad 2l_0 = \dim M^\eta, 2l_1 = rkN$$

とおいて良い。また明らかに $\det(1-\eta^N) \neq 0$ であることもわかる[26]。さらに、概複素構造やシンプレクティック構造が自然に制限されることも示される。

このような状況下で、我々は heat kernel に η を作用させたもの

$$k_t(\eta, x, y) := \eta \cdot k_t(x, y) \tag{84}$$

の対角集合への制限の $t \to 0$ における漸近的な形および supertrace に興味がある。さて、$\eta \cdot k_t(x,x)$ を考えたとき、(78) を考慮して良く考えるとわかるように、$x \neq \eta \cdot x$ では $e^{-d(\eta \cdot x, x)^2/4t}$ から $t \to 0$ における漸近挙動は急激に減少する。従って実際に問題となるのは $x = \eta \cdot x$ となる点、つまり、不動点ということになるのである。もう少し詳しく説明する。まず

$$Str(\eta \cdot k_t(x,x)) = Str(\eta^{\mathcal{E}} k_t(\eta x, x))$$

[25] Fedosov の方法に依れば H-compatible な Fedosov connection を（少なくとも作用している群がコンパクトならいつでも）構成することはできるが、それを拡張して量子接続まで可換となるかどうかは一般にはわからない。

[26] このようなとき η の作用が非退化であるという。

を M で積分するということは、（不動点の周りで接方向と法方向とに分けて考えると）接方向の距離関数の２乗（不動点なので η の影響を受けない）と法方向の

$$f(\eta,\cdot) : N \ni v \mapsto f(\eta, v) \in \mathbf{R}$$

という $v = 0$ のみを critical point とし Hessian が非退化になっているような関数を位相関数とするような指数関数を因子とするガウス型の積分を行なうということなので t が十分 0 に近いときには、積分は M^η の管状近傍上（よって指数を通して法束上）の積分と見なせる。そこでまず法方向のファイバーだけで積分[27]を考える事によって M^η の上の微分形式を得るのであるが、$t \to 0$ の極限が

$$(2\pi i)^{-l_0}(-1)^{-l_1}\frac{\hat{A}(M^\eta)ch_H(\eta, \Omega_M(\nu^2)|_{M^\eta})}{det^{\frac{1}{2}}(1-\eta^N exp(-R_1))} \tag{85}$$

となるのである。ここで分母について注意しておく。ガウス型積分を考えるのであるが位相関数 $f(\eta,\cdot)$ の critical point での Hessian に $1-\eta^N \cdot \exp(-R_1)$ が含まれている[28]ので法方向に積分すると $det^{\frac{1}{2}}(1-\eta^N exp(-R_1))$ が現れてくるのである[29]。ただし、ここで η^N は値への作用。η は底点への作用。この式で問題となるのは

$$ch_H(\eta, \Omega_M(\nu^2)|_{M^\eta}) = Str(\eta \cdot \exp \Omega_M(\nu^2)|_{M^\eta})$$

である[30]。Intoroduction でも注意しておいたように一般には Poincaré-Cartan form の制限に対応する star-product が ambient space の star-product の制限から来るとは限らないので、対応する star-product は ambient space のものとは関係のない変形量子化となる。そこで以下では、制限をうまく定義できるようなカテゴリーを考えよう。§ 2 でみたように (contact) Weyl 多様体 $\mathcal{C}_M$ は (modified contact)Weyl diffeomorphism により貼り合わさっているのであった。この事に注意して以下のような定義を与えよう。

Definition 6.1 *(contact) Weyl 多様体 $\mathcal{C}_M$ の貼り合わせ関数 (modified contact)Weyl diffeomorphism を部分シンプレクティック多様体 M_1 の自明 Weyl 代数束に制限することが出来るとき、つまり、$\Phi^*(\mathcal{F}(W_{\phi(U)\cap M_1})) = \mathcal{F}(W_{U\cap M_1})$ となるとき、もともとの (contact) Weyl 多様体は部分シンプレクティック多様体 M_1 に関し tangential であると称す。*

この時、直ぐにつぎがわかる。

Proposition 6.2 *(contact) Weyl 多様体は部分シンプレクティック多様体 M_1 に関し tangential のとき、M_1 には star-product は以下のように自然に誘導（制限）され、*

$$f *_{M_1} g = (F *_M G)|_{M_1} \quad (F|_{M_1} = f,\ G|_{M_1} = g) \tag{86}$$

[27]このように $t \to 0$ という状況下で法方向（ファイバー）だけ積分することを $\int_{\text{normal}}$ と記す。
[28]このような量が含まれていることを見るのはかなり大変である。実際 [BGV] の §§6.5-7 がその計算に当てられているので、それを参照のこと。
[29]位相が純虚数なら停留位相法であるが今の場合はそれよりも簡単（[Fu] を参照)。
[30]ここまでは全く古典的な場合のアナロジーと思える。

$*_M$ の *Poincaré-Cartan form* の M_1 への引き戻しが $*_{M_1}$ の *Poincaré-Cartan form* となっている。

したがって、(85) と Proposition6.2 により次も得られる。

Proposition 6.3 *([Mi1])* 前と同じ仮定に加えて、M が *H-equivariant* なスピン構造をもっているとする。このとき、

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\int_{normal} Str(\eta\cdot k_t(x,x))\\&=\lim_{t\to 0}\int_{normal} Str(\eta^{\mathcal{E}} k_t(\eta x,x))\\&=(2\pi i)^{-l_0}(-1)^{-l_1}\frac{\hat{A}(M^\eta)ch_H(\eta,\Omega_{M^\eta}(\nu^2))}{det^{\frac{1}{2}}(1-\eta^N exp(-R_1))}\end{aligned}\tag{87}$$

次に、(locally symmetric) Kaehler 空間の場合について、tangential star-product にもう少し考える。Tamarkin[T] よって証明されたように、今の場合には Fedosov 接続は完全に書き下せて、次のようになる。

Theorem 6.4 *([T]) (locally symmetric) Kaehler* 空間のにおける *Fedosov* 接続 ∇^F は、次で与えられる。

$$\begin{aligned}\nabla^F=d&+\tfrac{1}{\nu}[\tfrac{1}{2}\Gamma_{ijk}Z^iZ^jdz^k,\cdot]_*\\&+\tfrac{1}{\nu}[\Lambda_{ij}Z^idz^j,\cdot]_*+\tfrac{1}{\nu}[\tfrac{-1}{2}R_{k\bar{l}p\bar{j}}\bar{Z}^jZ^k\bar{Z}^l\otimes dz^p]_*\end{aligned}\tag{88}$$

ゆえに、

Corollary 6.5 部分局所 *Kaehler* 対称空間 M_1 が全測地的であれば、M_1 には *star-product* は以下のように自然に誘導（制限）され、

$$f*_{M_1}g=(F*_M G)|_{M_1}\quad (F|_{M_1}=f,\ G|_{M_1}=g)\tag{89}$$

$*_M$ の *Poincaré-Cartan form* の M_1 への引き戻しが $*_{M_1}$ の *Poincaré-Cartan form* となっている。対応する *Fedosov* 接続も自然に制限される[31]。

故に先ほどの Proposition 6.3 とあわせて、以下の系がわかる。

Corollary 6.6 部分空間 M^η が全測地的であれば、

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0}\int_{normal} Str(\eta\cdot k_t(x,x))\\&=\lim_{t\to 0}\int_{normal} Str(\eta^{\mathcal{E}} k_t(\eta x,x))\\&=(2\pi i)^{-l_0}(-1)^{-l_1}\frac{\hat{A}(M^\eta)ch_H(\eta\cdot\Omega_{M^\eta}(\nu^2))}{det^{\frac{1}{2}}(1-\eta^N exp(-R_1))}\end{aligned}\tag{90}$$

[31] Fedosov 接続は古典的な接続だけでなく、曲率も接続の中に取りこまれて作られている。ところで、一般に制限と接続の相性は良くても、制限と曲率の相性はあまり良くない。しかし、全多様体と部分多様体の曲率の Gauss の方程式を考えれば、第２基本形式が消えているような部分多様体なら曲率の制限が接続の制限から得られる曲率と等しくなる。

Acknowledgments この研究を行なうにあたって東京理科大学の吉岡朗先生、慶應義塾大学の森吉仁志先生からは非常に多くの御助言、御示唆を頂きました。また、東京理科大学の大森英樹先生、慶應義塾大学の前田吉昭先生、信州大学名誉教授浅田明先生、横浜市立大学の藤井一幸先生からは大学院在学中以来研究面において絶えず励ましつづけて頂いたことに感謝したいと思います。

最後にこの研究の発表の場を与えてくださった京都大学の岩井敏洋先生に感謝の意を表します。

参考文献

[BFFLS] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A. and Sternheimer, D. *Deformation theory and quantization I,* Ann. of Phys. 111 (1978), 61-110.

[BGV] Berline,N. Getzler,E. and Vergne,M. *Heat Kernels and Dirac Oerators,* Springer-Verlag, 298(1996)

[BV] Berline,N. and Vergne, M. *A Computation of the equivariant index of the Dirac operator,* Bull. Math. Soc. France, 113(1985) pp.305-345

[De] Deligne, P.*Déformation de l'Algèbre des Fonctions d'une Varieté Symplectique: Comparsion entre Fedsov et De Wilde, Lecomte* , Selecta Math. New Series 1 No.4 pp.667-697(1995)

[DL] De Wilde, M. and Lecomte, P. B. *Existence of star-products and formal deformations of the Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds,* Lett. Math. Phys. 7 (1983), 487-496.

[FL] Fioresi, B. and Lledo, M. A. *A Comparison Between Star Products on Regular Orbits of Compact Lie Groups,* math.QA/0106129 v2

[F1] Fedosov, B. V. *A simple geometrical construction of deformation quantization,* J. Differential Geom. 40 (1994), 213-238.

[F2] Fedosov, B.V. *Deformation quantization and index theory,* Akademie Verlag, (1996)

[Fu] Fujiwara, D. *Mathematical method of Feynman path integrals,* Springer-Verlag, (1999) (in Japanese)

[G] Getzler, E. *Pseudodifferential Operators on Supermanifolds and the Atiyah-Singer Index Theorem,* Commun.Math.Phys.92, (1983)pp.163-178.

[GR] Gutt, S. and Rawnsley, J. *Equivalence of star products on a symplectic manifold; an introduction of Deligne's Cech cohomology classes,* J. Geom. Phys. 29 (1999), 347-392.

[K] Kontsevich, M. *Deformation quantization of Poisson manifolds,* q-alg/9709040.

[Le] J. Leray, *Analyse lagrangienne et mechanique quantique*, Seminaire du College de France 1976-1977; R.C.P.25, Strasbourg, (1978).

[Ma] Masmoudi, M. *Tangential deformation of Poisson bracket and tangential star-products on a regular Poisson manifold,* J.Geom.Phys.9, pp.155-171(1992)

[Mi1] Miyazaki, N. *Deformation quantization and Mehler formula* (tentative title), in preparation.

[Mi2] Miyazaki, N. *On Hochschild homology of star product on a plane* (tentative title), in preparation.

[NT] Nest, R. and Tsygan, B. *Algebraic index theorem,* Commun. Math. Phys. 172 (1995), 223-262.

[NT] Nest, R. and Tsygan, B. *Algebraic index theory for families,* Adv. Math. 113 (1995), 151-205.

[OMMY] Omori, H., Maeda, Y., Miyazaki, N. and Yoshioka, A. *Poincaé-Cartan class and deformation quantization of Kähler manifolds,* Commun. Math. Phys. 194 (1998), 207-230.

[OMY] Omori, H., Maeda, Y. and Yoshioka, A. *Deformation quantization and Weyl manifolds,* Advances in Mathematics 85 (1991), 224-255.

[S] Sternheimer, D. *Deformation quantization twenty years after,* q-alg/9809056.

[W] Weinstein, A. *Deformation quantization.* Seminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. Asterisque No. 227, (1995), Exp. No. 789, 5, 389-409.

[Y] Yoshioka, A. *Contact Weyl manifold over a symplectic manifold,* preprint.