数理解析研究所講究録 1261 巻 2002 年 202-210

On the Atiyah-Bott-Gårding homology class for the boundary value problem for the wave equation

阪大理・数　由良浩一 (Koichi Yura)
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Osaka University

本稿では，ある定数係数双曲型境界値問題における Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式を与える．

1 Introduction

波動方程式の特徴の一つに Huygens の原理がある。これは、時空間の次元が4以上の偶数であれば伝播錐の内部で基本解が恒等的に0になるという現象である。この Huygens の原理を一般化したものに lacuna の理論がある。lacuna とは、$\Omega\in\mathbf{R}^n$ を開集合、$u\in\mathscr{D}'(\Omega)$、L を $\Omega\setminus\operatorname{sing\,supp}u$ の一つの連結成分としたとき、u を L の閉包 $\overline{L}$ まで C^∞ 級に延長できる領域 L のことをいう。特に u が恒等的に0になる領域 L を strong lacuna という。lacuna の理論は Petrovskiĭ に始まり、Leray、Atiyah-Bott-Gårding[1] らによって発展させられた。定数係数双曲型偏微分方程式の初期値問題の基本解については、彼らの仕事によって lacuna の理論はほとんど完成したといえる。しかし、定数係数双曲型偏微分方程式の境界値問題については、Wakabayashi[2] で基本解の singularity の伝播について調べられているものの、lacuna については手付かずのまま残っている。

本稿では、一般の境界値問題の lacuna の理論を確立するまでには至らなかったが、以下の仮定 (A-1),(A-2) の下で、lacuna の存在を調べるときに用いられる Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式に類似した公式を導いた。

$x=(x_1,\ldots,x_n)$ に対して，$x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ などと書くことにして次のような定数係数双曲型境界値問題を考える。(以下の系 2.6 までの議

論は Wakabayashi[2] に負うている。)

$$\begin{cases} P(D)F_{k^0}(x) = 0, & x \in \{x \in \mathbf{R}^n\,; x_n > 0\}, \\ D_n^{j-1}F_{k^0}(x)\Big|_{x_n=0} = \delta_{jk^0}\delta(x'), & x' \in \mathbf{R}^{n-1},\ 1 \le j \le \mu. \end{cases} \tag{BP}$$

k_0 は $1 \le k_0 \le \mu$ で固定する．$P(D)$ は n 変数 m 階の斉次微分作用素であり，D^{j-1} $(1 \le j \le \mu)$ の個数 μ はあとで決められる．また，$D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ である．ここで次の仮定をおく．

(A-1). $P(\xi)$ は次のように因数分解される。

$$P(\xi) = p_1(\xi)^{\nu_1} \cdots p_q(\xi)^{\nu_q} \tag{1}$$

ここで $p_j(\xi)$ $(1 \le j \le q)$ は、$\vartheta = (1, 0, \ldots, 0)$ に関して狭義双曲型の相異なる多項式である。

(A-2). $\{x \in \mathbf{R}^n\,; x_n = 0\}$ は $P(\xi)$ に関して非特性的である．すなわち，$P(0,1) \neq 0$.

$F_{k^0}(x)$ は，境界 $\{x \in \mathbf{R}^n\,; x_n = 0\}$ 上に単位衝撃を与えたときの波動の伝播をあらわす．以下，$F_{k^0}(x)$ を記述するための準備をする．

$$\Gamma(P, \vartheta) = \mathbf{R}^n \setminus \{\xi \in \mathbf{R}^n\,; P(\xi) = 0\} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分} \tag{2}$$

の $\xi_n = 0$ での切り口 $\Gamma'(P, \vartheta)$ を，

$$\Gamma'(P, \vartheta) = \{\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}\,; (\xi', 0) \in \Gamma(P, \vartheta)\} \tag{3}$$

で定義する．

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_{m-j}(\xi')\xi_n{}^j \tag{4}$$

とあらわせば，$P_0(\xi') = P(0,1)$ であるから，仮定 (A-2) より $P_0(\xi')$ は 0 でない定数である．また，$\zeta' \in \mathbf{R}^{n-1} - i\Gamma'(P, \vartheta)$ に対して，$P(\zeta', \lambda) = 0$ は λ に関して実根をもちえないので，それらの根を

$$\lambda_1^+(\zeta'), \ldots, \lambda_\mu^+(\zeta'), \lambda_1^-(\zeta'), \ldots, \lambda_{m-\mu}^-(\zeta'), \tag{5}$$
$$\operatorname{Im} \lambda_k^\pm(\zeta') \gtrless 0$$

とあらわすことができる．もちろん，μ は $\zeta' \in \mathbf{R}^{n-1} - i\Gamma'(P,\vartheta)$ なる限り一定である．この μ が (BP) の境界条件の個数である．

これらを使って，(BP) に対する Lopatinskiĭ 行列式 $R(\zeta')$ を定義する．$\zeta' \in \mathbf{R}^{n-1} - i\Gamma'(P,\vartheta)$ に対して，

$$R(\zeta') = \det L(\zeta'), \tag{6}$$

$$L(\zeta') = \left(\frac{1}{2\pi i}\oint \lambda^{j+k-2} P_+(\zeta',\lambda)^{-1}\,d\lambda\right)_{j,k=1,\dots,\mu}, \tag{7}$$

$$P_+(\zeta',\lambda) = \prod_{j=1}^{\mu}(\lambda - \lambda_j^+(\zeta')) \tag{8}$$

とおく．ただし，(7) の積分は複素 λ 平面において，$P_+(\zeta',\lambda) = 0$ の根を全て囲むような単一閉曲線に沿うものである．今の場合、$R(\zeta') \equiv 1$ である。このとき，前進基本解 $F_{k^0}(x)$ は

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbf{R}^n - i\sigma} e^{ix\zeta} R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\,d\zeta, \quad \sigma \in \Gamma'(P,\vartheta)\times\mathbf{R} \tag{9}$$

であらわされる．ここで，$R_{jk^0}(\zeta')$ は $L(\zeta')$ の (k^0, j) 余因子 ($\mu - k^0 - j + 1$ 次斉次) である。また、積分路の向きは $d\xi > 0$ である。超関数 $F_{k^0}(x)$ は，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ として，

$$\begin{aligned}\langle F_{k^0}(\cdot), \varphi\rangle \;=\; & i^{-1}\sum_{j=1}^{\mu}\int_{\mathbf{R}^n} R_{jk^0}(\xi' - i\sigma')(\xi_n - i\sigma_n)^{j-1} \\ & P_+(\xi - i\sigma)^{-1}(\mathscr{F}^{-1}\varphi)(\xi - i\sigma)\,d\xi \end{aligned} \tag{10}$$

で定義される。前進基本解 (forward fundamental solution) とは，

$$\operatorname{supp} F_{k^0}(x) \subset \{x \in \mathbf{R}^n \,;\, x\vartheta \geq 0\} \tag{11}$$

となる基本解である．

2 Herglotz-Petrovskiĭ-Leray の公式の導出

境界値問題 (BP) の基本解 $F_{k^0}(x)$ は初期値問題の場合と異なり，単に特性集合を複素の方向に避けて積分すれば良いというものではない．こ

れは R_{jk^0}, P_+ が分岐集合を持つため、その分岐集合も複素の方向に避けなければならないからである。このことに注意して P_+ の局所双曲錐を定義し、(9) を Atiyah-Bott-Gårding[1] と同じように変形していく。

まず、斉次双曲型多項式 $P(\xi)$ の局所化と局所双曲錐の定義を与える。

定義 2.1 $P(\xi+\nu\zeta)$ を ν の冪で展開すると,

$$\nu \to +0 \text{ のとき}, \; P(\xi+\nu\zeta) = \nu^p P_\xi(\zeta) + O(\nu^{p+1})$$

となるとき, ζ の多項式として恒等的には0にならない最初の係数 P_ξ を, P の ξ における局所化といい、その双曲錐を

$$\Gamma_\xi(P,\vartheta) = \mathbf{R}^n \setminus \{\eta \in \mathbf{R}^n\,; P_\xi(\eta) = 0\} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分} \tag{12}$$

で定義する。

□

補題 2.2 任意の $\xi^0 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ とコンパクト集合 $M \subset \Gamma_{\xi^0}(P,\vartheta)$ に対して、ξ^0 の錐近傍 Δ と正数 t_0 が存在して、

$$P(\xi - it|\xi|\eta) \neq 0 \quad \text{if } \xi \in \Delta,\ \eta \in M,\ 0 < t \leq t_0. \tag{13}$$

□

(証明) 局所双曲錐の下半連続性より明らか。

■

$\xi' \in \mathbf{R}^{n-1}$ を任意に固定する。このとき、添え字の集合 $\{j_k\}_{1\leq k\leq r_1}$ を、$p_{j_k}(\xi',\lambda) = 0$ が λ に関して実多重根 λ_k を持つような添え字の集合とする。これを使って $\dot{\Gamma}_{\xi'}$ を以下で定義する。

$$\dot{\Gamma}_{\xi'} \times \mathbf{R} = \bigcap_{k=1}^{r_1} \Gamma_{(\xi',\lambda_k)}(p_{j_k},\vartheta). \tag{14}$$

$r_1 = 0$ のときは $\dot{\Gamma}_{\xi'} = \mathbf{R}^{n-1}$ で定義する。この $\dot{\Gamma}_{\xi'}$ は分岐集合の局所双曲錐にあたる。

P_+ は $\mathbf{R}^n - i\Gamma'(P,\vartheta)$ で一価正則であるが、次の補題により、もう少し広い領域まで一価に解析接続することが可能である。

補題 2.3 任意の$\xi^{0'} \in \mathbf{R}^{n-1} \setminus \{0\}$とコンパクト集合$M \subset \dot{\Gamma}_{\xi^{0'}}$に対して、$\xi^{0'}$の錐近傍$\Delta$と正数$C, t_0$が存在して、$P_+(\zeta)$は$\zeta \in \Lambda \times \mathbf{C}$で正則である。ここで

$$\Lambda = \{\zeta' = \xi' - it|\xi'|\eta' ; \xi' \in \Delta,\ \eta' \in M,\ 0 < t \leq t_0\}. \tag{15}$$

注意：$\Lambda \supset \mathbf{R}^{n-1} - i\Gamma'(P, \vartheta)$.

□

P_+を局所化するため、局所化の定義を述べる。

定義 2.4 $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$を開連結錐，$f$を$\mathbf{R}^n - i\Gamma$で斉次の解析関数とする．$\xi^0 \in \mathbf{R}^n$, $\zeta \in \mathbf{R}^n - i\Gamma$に対して，$\zeta$の関数として恒等的には0にならない$f_{\xi^0}(\zeta)$と$p \in \mathbf{R}$が存在して、

$$t \to +0 \text{ のとき，}\quad f(\xi^0 + t\zeta) = t^p f_{\xi^0}(\zeta) + o(t^p) \tag{16}$$

となるとき，f_{ξ^0}をfのξ^0における局所化という．

□

注意： $\dot{\Gamma}_{\xi'} \times \mathbf{R} \supset \Gamma'(P, \vartheta) \times \mathbf{R} \ni \vartheta$.

定義2.4のΓを$\Gamma'(P, \vartheta) \times \mathbf{R}$として$P_+$を局所化する。そして、$P_+$の局所双曲錐を次で定義する。

$$\Gamma_\xi(P_+, \vartheta) = \{\eta \in \dot{\Gamma}_{\xi'} \times \mathbf{R} ; P_{+\xi}(-i\eta) \neq 0\} \text{ の } \vartheta \text{ を含む連結成分}. \tag{17}$$

また，$\Gamma_\xi(P_+, \vartheta)$の双対錐$\Gamma^\circ_\xi(P_+, \vartheta)$を

$$\Gamma^\circ_\xi(P_+, \vartheta) = \{x \in \mathbf{R}^n ; \eta \in \Gamma_\xi(P_+, \vartheta) \text{ ならば } x\eta \geq 0\} \tag{18}$$

で定義する．

命題 2.5

$$\operatorname{sing\,supp}_A F_{k^0} \subset \bigcup_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} \Gamma^\circ_\xi(P_+, \vartheta) \tag{19}$$

である。

□

系 2.6 $x \notin \cup_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} K_\xi(P_+, \vartheta)$ のとき、次を満たす C^∞-ベクトル値関数 $v(\xi)$ が存在する.

- $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ のとき,

$$v(\lambda\xi) = |\lambda| v(\xi). \tag{20}$$

- 任意の $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ に対して,

$$v(\xi) \in \Gamma_\xi(P_+, \vartheta) \cap \{\xi \in \mathbf{R}^n\,; x\xi = 0\}. \tag{21}$$

- $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $0 < t \le 1$ のとき,

$$P_+(\xi - itv(\xi)) \neq 0. \tag{22}$$

□

(証明) Atiyah-Bott-Gårding[1] の 6 節 (pp. 160) の議論で P を P_+ におきかえてそのまま読み返すことができる。

■

(20),(21),(22) を満たすベクトル値関数の集合を $V(P_+, X)$ と書く。

次に Atiyah-Bott-Gårding[1] の論文にもあらわれた関数 $\chi_s(z)$ をここであらためて定義しておく。

関数 $\chi_s(z)$ $(z, s \in \mathbf{C},\ 0 < \arg z < \pi)$ を

$$\chi_s(z) = \begin{cases} \Gamma(-s)e^{-\pi i s} z^s, & s \neq 0, 1, \ldots, \\ z^s(\log z^{-1} + c_s + \pi i)/s!, & s = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{23}$$

で定義する. ここで, $c_s = \Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{s} k^{-1}$, $c_0 = \Gamma'(1)$ である. $\chi_s(z)$ は ρ_+^{-s-1} の Fourier 変換の i^{-s} 倍である。すなわち,

$$\chi_s(z) = i^{-s} \int_0^\infty \rho^{-s-1} e^{i\rho z}\, d\rho, \quad \arg i = \pi/2. \tag{24}$$

$\chi_s(z)$ は s を固定するごとに $\mathrm{Im}\, z > 0$ で正則ゆえ，実軸への境界値として超関数を定める．それを $\chi_s(x+i0)$ と書く．$\chi_s(x+i0)$ は s の整関数である．また，$\sigma_q \in \mathscr{D}'(\mathbf{R})$ を

$$\sigma_q(x) = (2\pi i)^{-1}\{\chi_q(x+i0) - (-1)^q \chi_q(-x+i0)\}, \quad q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{25}$$

で定義すれば，$q = N = 0, 1, \ldots$ のときは，$\chi_N(x)$ の log 項が消えて，

$$\sigma_q(x) = 2^{-1}(\mathrm{sgn}\, x)x^q/q!, \quad q = 0, 1, \ldots. \tag{26}$$

$q = -N = -1, -2, \ldots$ のときは，$\sigma_q' = \sigma_{q-1}$，$\sigma_0(x) = 2^{-1}(\mathrm{sgn}\, x)$ より，

$$\sigma_q(x) = \delta^{(-q-1)}(x), \quad q = -1, -2, \ldots. \tag{27}$$

v と χ_s を使って、(9) の F_{k^0} を次のように変形する。

命題 2.7 $F_{k^0}(x)$ は $x \notin \cup_{\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}} K_\xi(P_+, \vartheta) \cup \{x\vartheta < 0\}$ のとき，x に関して実解析的で

$q = k^0 - n \geq 0$ のとき，

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^q \int_{\gamma(\xi)=1} 2^{-1}(\mathrm{sgn}\, x\xi)\frac{(x\xi)^q}{q!} R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\,\omega(\zeta), \tag{28}$$

$$\zeta = \xi - iv(\xi).$$

$q = k^0 - n < 0$ のとき，

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^q \int_{\gamma(\xi)=1} \delta^{(-q-1)}(x\xi) R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\,\omega(\zeta), \tag{29}$$

$$\zeta = \xi - iv(\xi).$$

$\gamma(\xi)$ は (20) を満たす C^∞ 関数で、$\{\gamma(\xi) = 1\}$ の向きは $\omega(\xi) > 0$ である。

□

(証明) $x \notin \cup_{\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}} K_\xi(P_+,\vartheta)$ のとき、Stokesの公式を用いれば、積分路を $\mathbf{R}^n - i\eta$ ($\eta \in \Gamma'(P,\vartheta)\times\mathbf{R}$) から $\{\xi - i(v(\xi)-\varepsilon|\xi|\vartheta)\,;\, v\in V(P_+,X)\}$ に変形することが可能である。ここで、$\varepsilon(>0)$ は $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ のとき、$P_+(\xi - i(v(\xi)-\varepsilon|\xi|\vartheta)) \neq 0$ なるぐらい十分小さいものである。

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_{\mathbf{R}^n} e^{ix\zeta} R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\, d\zeta, \qquad (30)$$
$$\zeta = \xi - i(v(\xi) - \varepsilon|\xi|\vartheta).$$

$R_{jk^0}(\zeta')$ は $(\mu - k^0 - j + 1)$ 次斉次、$P_+(\zeta)$ は μ 次斉次だったことに注意して、$\xi = \rho\eta$, $\gamma(\eta) = 1$ なる極座標変換をすれば、

$$F_{k^0}(x)$$
$$= (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} \int_0^\infty \int_{\gamma(\eta)=1} \rho^{-k^0+n-1} e^{i\rho x\zeta} R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\, d\rho\wedge\omega(\zeta),$$
$$\zeta = \eta - i(v(\eta) - \varepsilon|\eta|\vartheta). \qquad (31)$$

さらに(24)を使って動径方向の積分をおこなえば、

$$F_{k^0}(x)$$
$$= (2\pi)^{-n} i^{-1} \sum_{j=1}^{\mu} i^{k^0-n} \int_{\gamma(\eta)=1} \chi_{k^0-n}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\, \omega(\zeta),$$
$$\zeta = \eta - i(v(\eta) - \varepsilon|\eta|\vartheta). \qquad (32)$$

一方、$x \notin \{x\vartheta < 0\}$ であるから、(11) より $F_{k^0}(-x) = 0$。ゆえに

$$\begin{aligned} F_{k^0}(x) &= F_{k^0}(x) - (-1)^{k^0-n} F_{k^0}(-x) \\ &= (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{k^0-n-1} \Big\{ \int_{\gamma(\xi)=1} \chi_{k^0-n}(x\zeta) R_{jk^0}(\zeta')\zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\, \omega(\zeta) \\ &\qquad - (-1)^{k^0-n} \int_{\gamma(\xi)=1} \chi_{k^0-n}(-x\bar\zeta) R_{jk^0}(\bar\zeta')\bar\zeta_n^{j-1} P_+(\bar\zeta)^{-1}\, \omega(\bar\zeta) \Big\}, \end{aligned}$$
$$\zeta = \eta - i(v(\eta) - \varepsilon|\eta|\vartheta),\ \bar\zeta = \eta - i(v(\eta) + \varepsilon|\eta|\vartheta).$$

$\varepsilon \to +0$としても超関数の意味での積分として意味を持ち，(25)を使えば

$$F_{k^0}(x) = (2\pi)^{1-n} \sum_{j=1}^{\mu} i^{k^0-n} \int_{\gamma(\xi)=1} \sigma_{k^0-n}(x\xi) R_{jk^0}(\zeta') \zeta_n^{j-1} P_+(\zeta)^{-1}\, \omega(\zeta). \tag{33}$$

したがって、(26),(27)より(28),(29)が導かれる。

■

[1]で与えられた初期値問題のHerglotz-Petrovskiĭ-Lerayの公式は、積分をホモロジー類上の積分に直していた。しかし、ここに与えた公式(28),(29)は、そこまで変形していない。恐らく、チェイン$\{\xi - iv(\xi);\gamma(\xi) = 1\}$は、$p_j(\xi)$と$\frac{\partial p_j}{\partial \xi_n}(\xi)$の$\xi_n$に関する終結式を$\Delta_j(\xi)$とすると、

$$\mathbf{C}^n \setminus \{\zeta \in \mathbf{C}^n;\ \prod_{j=1}^{q} \Delta_j(\zeta) = 0\} \tag{34}$$

の$(\sum_{j=1}^{q} \deg p_j)$重被覆面上のサイクルになっていると思われるが、本稿ではそれを確認するまでには至らなかった。

※ 数理解析研究所講究録1158 p.210 定理4.2、数理解析研究所講究録1212 p.109 定理4.2で、積分をある被覆面におけるホモロジー類上の積分に直しているが、そこで与えた証明には少しギャップがある。各論説の定理4.2以後の結果に正しい証明を与えるのは今後の課題である。この他、数理解析研究所講究録1158の補題2.1, 2.2, 2.3は行列式の性質を使って導かれると思うが、実際は全て証明できていない。また、数理解析研究所講究録1158 p. 210 定理4.2にあらわれる公式で$q = r_{k^0} - n - 2\mu - |\nu|$は$q = r_{k^0} - n - |\nu|$の誤りである。

参考文献

[1] M. F. Atiyah, R. Bott and L. Gårding. Lacunas for hyperbolic differential operators with constant coefficients I, II. *Acta Math.*, Vol. 124, pp. 109-189, 1970; Vol. 131, pp. 145-206, 1973.

[2] S. Wakabayashi. Analytic wave front sets of the Riemann functions of hyperbolic mixed problems in a quarter-space. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 11, pp. 785-807, 1976.