数理解析研究所講究録 1262 巻 2002 年 1-8

Verlinde 公式の幾何学 ※

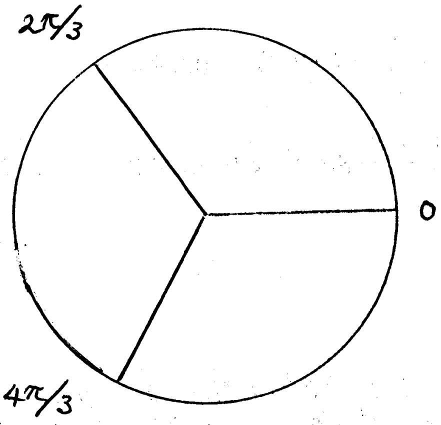
名大多元数理科学研究科　向井　茂(Shigeru Mukai)
Graduate School of Mathenmatics, Nagoya University

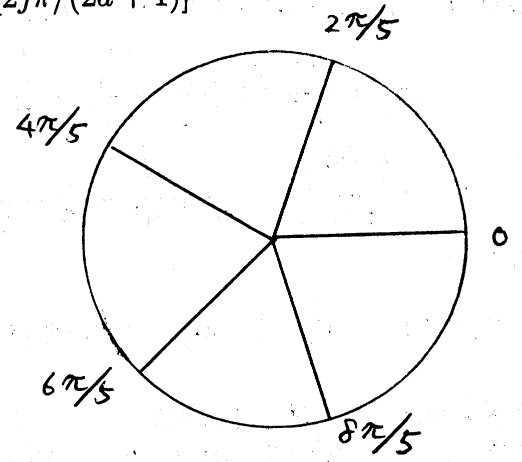
Verlinde 公式と呼ばれるものの一つに次がある.

$$\dim H^0(\mathcal{N}_{0,n}, \mathcal{O}(-aK)) = \frac{1}{2a+1}\sum_{j=0}^{2a} \frac{(-1)^{nj}}{\sin^{n-2}[(2j+1)\pi/(4a+2)]} \tag{1}$$

ただし，$a \geq 0$ は整数である．[1] 右辺は余弦を使って次のようにも表される.

$$\frac{(-1)^{an}}{2a+1}\sum_{j=0}^{2a} \frac{1}{\cos^{n-2}[2j\pi/(2a+1)]}$$





$a=1 \quad \dim = (2^{n-1} \pm 1)/3, \qquad a=2 \quad \dim = [2(1+\sqrt{5})^{n-2} + 2(1-\sqrt{5})^{n-2} + 1]/5$

a, n が小さいときの値は次の通りである．[2]

$a\backslash n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
2	1	5	13	45	141	461	1485	4813	15565
3	1	7	25	119	521	2359	10569	47543	213577
4	1	9	41	249	1401	8121	46649	268857	1547833
5	1	11	61	451	3101	21923	153693	1080739	7592029

この公式に興味をもつ理由からいくつかを拾ってみる.

[1] n が偶数のとき a は半整数でもよく，例えば，$\dim H^0(\mathcal{O}(-K/2)) = \sqrt{2}^{n-2}$ を得る.
[2] 谷川好男氏に負う.

※短期共同研究「組合せ論的表現論をめぐる話題」（2000年10月30日～11月2日）における講演の報告。筆者の現在の所属は京都大学数理解析研究所。

1. まず，美しい式である．左辺はベクトル空間の次元で当然ながら自然数である．右辺は Galois 理論より有理数であることはわかるが，整数性や正であることは自明ではない．
2. 左辺の $\mathcal{N}_{0,n}$ はあるモジュライ空間であるが，この公式の良い証明はモジュライ理論の発展を促すだろう．
3. モジュライ空間 $\mathcal{N}_{0,n}$ は複素 Grassmann 多様体とどことなく似ている．
4. 組合せ論的にも面白そうだ．
5. 整数論とも関係しそうだ．

実際，公式（1）の両辺の増大度はa^{n-3} であるが，その係数を右辺において計算すると

$$\frac{2^{n-1}}{\pi^{n-2}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{nj}}{(2j+1)^{n-2}}$$

となる．これを$(n-3)!$ 倍したものは正整数である．これを E_{n-3} で表そう．[3] n が奇数のとき，Euler 数と呼ばれ，無限級数は導手 4 の Dirichlet L関数 $L(s)=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(2j+1)^{-s}$ の正整数点 $s=n-2$ における特殊値である．[4] 例えば，

$$E_6=\frac{6!2^8}{\pi^7}\left(1-\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{7^7}+\frac{1}{9^7}-\cdots\right)=61.027\times 0.9955=61$$

$$E_8=\frac{8!2^{10}}{\pi^9}\left(1-\frac{1}{3^9}+\frac{1}{5^9}-\frac{1}{7^9}+\frac{1}{9^9}-\cdots\right)=1385.07\times 0.9999497=1385$$

である．[5]

§1. 公式（1）に戻って，$\mathcal{N}_{0,n}$ について説明しよう．

代数多様体として　詳しくは説明できないが，$\mathcal{N}_{0,n}$ は n 点付き射影直線 $(\mathbf{P}^1:p_1,\dots,p_n)$ 上の階数 2 の（半）安定準放物的ベクトル束のモジュライ空間である．これは$n-3$ 次元準射影的代数多様体になる．また，$\mathcal{O}(-K)$ はそれの接ベクトル束の行列式直線束で，H^0 は直線束の大域切断全体のなす（有限次元）ベクトル空間を表す．　（最高次外積）

---

[3] Riemann-Roch 公式より，$n-3$ 次元モジュライ $\mathcal{N}_{0,n}$ の次数である．

[4] 関数等式

$$L(1-s)=\Gamma(s)\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s}\sin\frac{\pi s}{2}L(s)$$

より，負整数点 $s=3-n$ での特殊値とも思える．実際，Abel の総和法でもって次が成立する．

$$E_{n-3}=(-1)^{(n-3)/2}2(1-3^{n-3}+5^{n-3}-7^{n-3}+9^{n-3}-\cdots)$$

[5] n が偶数のとき，E_{n-3} は正接数（tangent number）と呼ばれる．例えば，

$$E_5=\frac{5!2^7}{\pi^6}\left(1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\cdots\right)=15.97688\times 1.001447=16$$

で，一般に m が偶数で B_mを Bernoulli 数とするとき，$E_{m+1}=2^m(2^m-1)B_m/m$ である．

微分多様体として　まず $n-1$ 元生成自由群 F_{n-1} の $SU(2)$ 表現の同値類全体 $\tilde{\mathcal{N}}_{0,n}$ を考える．これは 2 次特殊ユニタリ群 [6]

$$SU(2)=\left\{\left(\begin{array}{cc} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{array}\right)\middle| a^2+b^2+c^2+d^2=1,\quad a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\}$$

の $n-1$ 個の直積を $SU(2)$ の共役で割ったものである．ここから　$\mathbf{R}^n$ への写像

$$(A_1,\ldots,A_{n-1})\mapsto(\mathrm{Trace}\,A_1,\ldots,\mathrm{Trace}\,A_{n-1},\mathrm{Trace}\,A_n)\in[-1,1]^n$$

のファイバー（逆像）を $\mathcal{N}_{0,n}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ で表す．ただし，

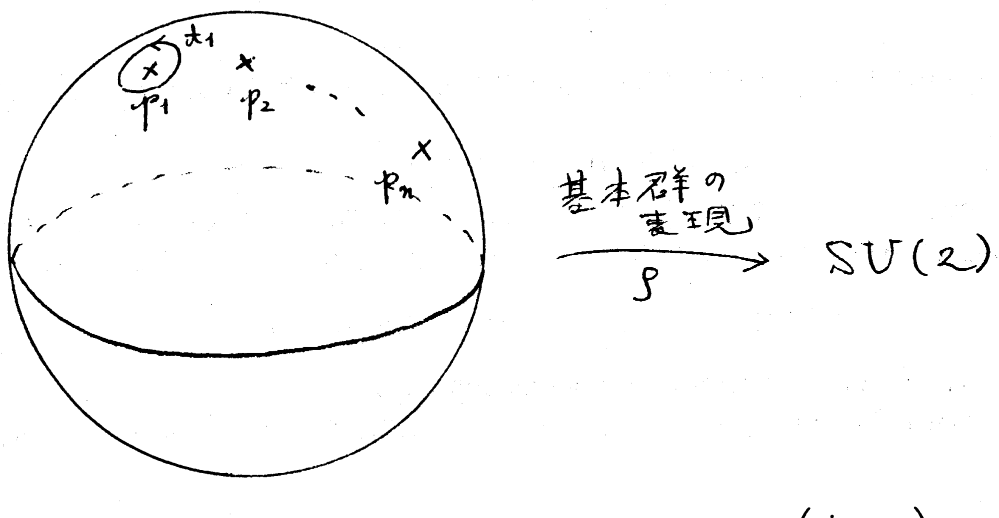
$$A_n=A_{n-1}^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

とおいた．特に，原点の逆像を $\mathcal{N}_{0,n}$ で表す．

幾何的には F_{n-1} を Riemann 球面から n 点 $p_1,\ldots,p_n$ を除いたものの基本群とみる．この基本群は各点をまわる閉道 $t_1,\ldots,t_n$ で生成され，それらの間の関係は $\prod_{i=1}^n t_i=1$ である．よって，$\mathcal{N}_{0,n}$ は各点での局所モノドロミーの位数が 4 であるような 2 次特殊ユニタリ表現の同値類のパラメータ空間である．

$$\dim_{\mathbf{R}}\mathcal{N}_{0,n}=\dim_{\mathbf{R}}\tilde{\mathcal{N}}_{0,n}-n=3(n-1)-3-n=2(n-3)$$

であるが，$\mathcal{N}_{0,n}$ には複素構造が入る．



穴あき Riemann 球　　　　$\rho(t_j)\sim\begin{pmatrix} i & \\ & -i\end{pmatrix},\quad 1\le\forall j\le n$

n が偶数のときは可約な表現，例えば，

$$A_1=A_3=\cdots=A_{n-1}=\begin{pmatrix} i & \\ & -i\end{pmatrix},\quad A_2=A_4=\cdots=A_n=\begin{pmatrix} -i & \\ & i\end{pmatrix}$$

[6] 長さ 1 の 4 元数 $a+bi+cj+dk$ の全体とも思える．

が2^{n-2}個存在する．しかし，奇数のときは存在しないので，$\mathcal{N}_{0,n}$ は非特異である．以下，$n = 2g+1$ とおいて，この場合を考える．

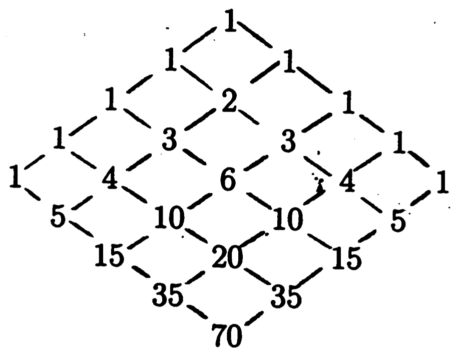
§2. $\mathcal{N}_{0,2g+1}$ は次の点で複素 Grassmann 多様体 $G(2, g+1)$ と似ている．

- 共に次元は $2g-2$ である．
- $\mathcal{N}_{0,2g+1}$ のコホモロジー環は $G(2, g+1)$ のコホモロジー環と同じ Poincaré 級数

$$\frac{(1-t^g)(1-t^{g+1})}{(1-t)(1-t^2)}$$

をもつ部分環を含む．

この辺の状況を説明するために，Pascal 3 角形の話をしよう．次の図は説明するまでもないだろう．



(2)

最下段の70は $(x+y)^8$ の x^4y^4 の係数である．多項式環 $\mathbf{Z}[x,y]$ とイデアル $I = (x^5, y^5)$ を使うと

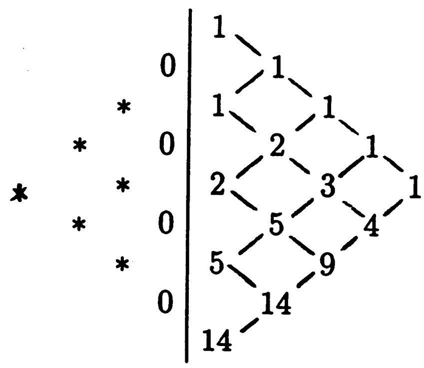
$$(x+y)^8 \equiv 70x^4y^4 \mod I$$

と表される．言い換えると，剰余環 $\mathbf{Z}[x,y]/I$ の中で $(x+y)^8 = 70x^4y^4$ が成立する．この剰余環は二つの射影空間の直積 $\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^4$ のコホモロジー環と同型である．よって，Segre 埋め込み

$$\mathbf{P}^4 \times \mathbf{P}^4 \subset \mathbf{P}^{24} \qquad ((x_i),(y_j)) \mapsto (x_iy_j)_{1\le i,j\le 5}$$

の次数が70であるというのが上の等式の一つの幾何的解釈である．

次に Pascal の規則はそのままにして，左半分を捨てた（境界を零と思う）ものを考えよう．



(3)

このときに，中心に表れる数

$$1,\quad 1,\quad 2=\frac{4!}{2!3!},\quad 5=\frac{6!}{3!4!},\quad 14=\frac{8!}{4!5!},\quad \cdots \qquad \text{一般に}\,\frac{(2g-2)!}{(g-1)!g!}$$

は Catalan 数と呼ばれるもので，幾何的には Plücker 座標によって埋め込まれた Grassmann 多様体

$$G(2,g+1)\subset \mathbf{P}^{(g-1)(g+2)/2}$$

の次数に等しい．例えば，8 次元の場合

$$14=\deg[G(2,6)\subset \mathbf{P}^{14}] \tag{4}$$

である．このことは $G(2,6)$ のコホモロジー環が 2 変数多項式環の剰余環

$$H^*(G(2,6),\mathbf{Z})\simeq \mathbf{Z}[A,B]/(s_5(A,B),s_6(A,B))$$

であることと上の Pascal 3 角形 (3) より従う．ただし，$s_n(A,B)$ は

$$\frac{1}{1-At+Bt^2}=\sum_{n=1}^{\infty}s_n(A,B)t^n$$

で定義される多項式で，例えば，

$$s_1=A, s_2=A^2-B, s_3=A^3-2AB, s_4=A^4-3A^2B+B^2,\ldots$$

である．漸化式

$$s_{n+1}-As_n+Bs_{n-1}=0 \tag{5}$$

より得られる[7] Pascal 3 角形

$$\begin{array}{ccccccccc}
B^4 & & & & & & & & \\
 & As_1B^3 & & & & & & & \\
A^2B^3 & & A^2s_2B^2 & & & & & & \\
 & A^3s_1B^2 & & A^3s_3B & & & & & \\
A^4B^2 & & A^4s_2B & & A^4s_4 & & & & \\
 & A^5s_1B & & A^5s_3 & & & & & \\
A^6B & & A^6s_2 & & & & & & \\
 & A^7s_1 & & & & & & & \\
A^8 & & & & & & & &
\end{array} \tag{6}$$

と (3) を比較して，

$$A^8\equiv 14B^4 \mod (s_5(A,B),s_6(A,B))$$

を得るが，これに少し幾何的考察を加えることにより (4) が得られる．

§3. モジュライ空間 $\mathcal{N}_{0,2g+1}$ のコホモロジー環も似た構造の部分環を含む．すなわち，

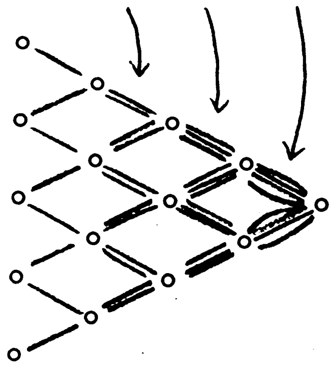
$$H^*(\mathcal{N}_{0,2g+1},\mathbf{Q})\supset \mathbf{Q}[A,B]/(\xi_g(A,B),\xi_{g+1}(A,B))$$

[7]例えば，$A^5s_3-A^6s_2+A^5s_1B=0.$

が成立する．ただし，$\xi_n(A,B)$ は (5) の係数を少し変更した漸化式

$$(n+1)\xi_{n+1} - A\xi_n + nB\xi_{n-1} = 0, \qquad \xi_n = 0\,(n<0) \tag{7}$$

より定まるQ係数多項式である．この係数変更により，Pascal 3角形の規則が変わり，中心から離れる毎に，1倍，2倍，3倍，4倍$\cdots$されて下の行に加えられる．[8]



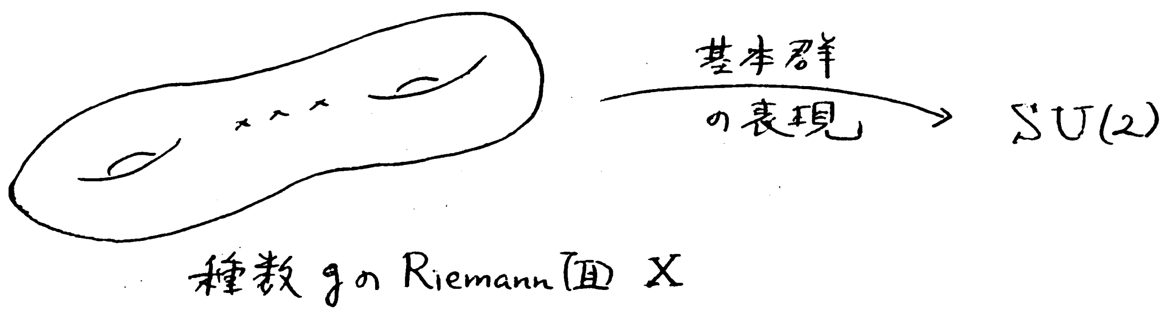
$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
1 & & 2 & & & & \\
 & 5 & & 6 & & & \\
5 & & 28 & & 24 & & \\
 & 61 & & 80 & & & \\
61 & & 662 & & & & \\
 & 1385 & & & & & \\
1385 & & & & & &
\end{array} \tag{8}$$

この変形 Pascal 3角形は[1]において，Euler 数を計算するのに使っているものと一致する．よって，モジュライ空間の次数が Euler 数，例えば，8次元の $\mathcal{N}_{0,11}$ の次数が$1385 = E_8$であることが従う．

この状況は，種数 g のコンパクト Riemann 面 X の表現空間 $\mathcal{N}_{g,0}$ にも共通している．[9] これは次元が $3g-3$ で，Grassmann 多様体 $G(3, g+2)$ と似ている．適当な多項式 $\xi_n(A,B,C)$ に対して

$$H^*(\mathcal{N}_{g,0}, \mathbf{Q}) \supset \mathbf{Q}[A,B,C]/(\xi_g(A,B,C), \xi_{g+1}(A,B,C), \xi_{g+2}(A,B,C))$$

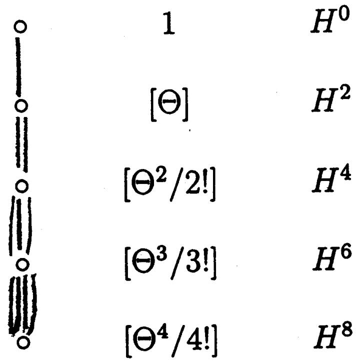
が成立する（[5]，拙著[2]第１１章を参照）．まだ整理ができないのでここで紹介できないが，「変形 Pascal 4面体」を用いて，これの次数が計算でき，そこに Bernoulli 数が出現する．



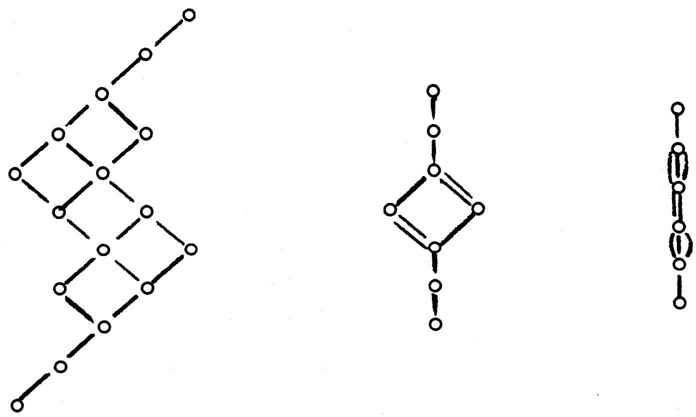
§4. 似た現象を探すと，X の Jacobi 多様体のコホモロジー環のテータ因子Θで生成される部分

[8] 例えば，3列目の２８は２列目の５の２倍との４列目の６の３倍を足したもの．
[9] モジュライには偶奇の２種類があるが，ここでは $\mathcal{N}^-_{g,0}$ の方を考えている．

は次の構造をもっていることに気付く.



Grasmann 多様体は等質空間であるが，他の等質空間のコホモロジー環の構造もよく知られている．例えば，



は１０次元直交 Grassmann 多様体 $S0(10,\mathbf{R})/U(5)$，６次元シンプレクティック Grassmann 多様体と G_2 多様体のコホモロジー環の Hasse 図である（例えば，[4]）．[10] このように２重線，３重線，$\cdots$ が現れるのはアフィンLie環の等質空間のコホモロジー環の特徴でもあることを最後に注意しておく．

参考文献

[1] Knuth, D.E. and Buckholtz, J.: Computation of tangent, Euler, and Bernoulli numbers, Math. Comp. **21**(1967), 663-688.

[2] 向井　茂：モジュライ理論 I, II, 岩波書店, 東京, 1998,2000.

[3] —：Fano 多様体論の新展開, 数学,47巻 (1995), 125–144.

[4] Hiller,H.: Conbinatorics and intersections of Schubert varieties, Comment. Math. Helv. **57**(1982), 41-59.

[10]通常の Grassmann $G(2,6)$ とこれらは３次元 Fano 多様体の分類に現れる（[3]）.

[5] Zagier, D.: On the cohomology of moduli spaces of rank two vector bundles over curves, in *The moduli space of curves*, R. Dijgraaf, et. al (eds), Birkhauser, 1995, pp. 533-563.