数理解析研究所講究録 1262 巻 2002 年 178-188

対称関数の分解とプレシズム

水川裕司 (北大理)
Hiroshi Mizukawa(Hokkaido University)

1 イントロダクション

プレシズムは対称関数の理論の中において最も古典的で根本的な問題の一つであり, 過去の多くの数学者によって様々な公式が示されてきた [2].

f_1, f_2 そして g を対称関数とする. プレシズムは次のような性質を有する:

$$(f_1f_2)\circ g=(f_1\circ g)(f_2\circ g),$$
$$(\alpha f_1+\beta f_2)\circ g=\alpha(f_1\circ g)+\beta(f_2\circ g)\quad \alpha,\ \beta\ \in\mathbb{Q}.$$

特に冪和対称関数 (p_r, p_k) とのプレシズムに関して次が成り立つ;

$$g\circ(p_rp_k)=(g\circ p_r)(g\circ p_k),$$
$$g\circ(p_k+p_r)=(g\circ p_k)+(g\circ p_r),$$
$$(p_r\circ g)(x_1,x_2,\cdots)=g(x_1^r,x_2^r,\cdots).$$

ここではこのタイプのプレシズムを考察する. 対称関数環は冪和対称関数によって生成されるので "原理的には" この $(p_r\circ g)$ なるプレシズムがわかれば上の性質から全てのプレシズムがわかる. 例えば今,

$$(p_2\circ s_{(2,1)})(\boldsymbol{x})=-s_{(4,1,1)}+s_{(2,2,2)}-s_{(2,2,1,1)}+s_{(4,2)}-s_{(3,3)}+s_{(3,1,1,1)},$$
$$(p_1^2\circ s_{(2,1)})(\boldsymbol{x})=s_{(4,2)}+s_{(4,1,1)}+s_{(3,3)}+2s_{(3,2,1)}+s_{(3,1,1,1)}+s_{(2,2,2)}+s_{(2,2,1,1)}$$

であり, これとシューア関数:

$$s_{(2)}=\frac{1}{2}p_{1^2}+\frac{1}{2}p_2,$$
$$s_{(1^2)}=\frac{1}{2}p_{1^2}-\frac{1}{2}p_2$$

から次を得る:

$$(s_{(2)} \circ s_{(2,1)})(\boldsymbol{x}) = s_{(2,2,2)} + s_{(4,2)} + s_{(3,1,1,1)} + s_{(3,2,1)},$$
$$(s_{(1,1)} \circ s_{(2,1)})(\boldsymbol{x}) = s_{(4,1,1)} + s_{(3,3)} + s_{(3,2,1)} + s_{(2,2,1,1)}.$$

実際に [2] においてシューア関数のこの種のプレシズムが調べられており, そこで一般的な公式が与えられている. この公式の証明において "分解公式"([5], [10]) と呼ばれるシューア関数の公式が本質的な役割を果たす. ここではシューアの Q-関数についての分解公式を考え, それを利用することで得られるプレシズムの公式を目指す. シューアの Q-関数とは奇数次の冪和対称関数によって生成される対称関数環の部分環の基底をなすものであり, また, 対称群のスピン表現の母関数でもある.

この報告書は次のように構成される. 次の節においてここで使う対称関数の定義を行う. 3 節では分割の bar core と bar quotient についての簡単な紹介そして 4 節においてシューア関数について既に知られている結果をのべて最後の 5 節においてシューアの Q-関数のプレシズムを考える.

2 シューア関数

P_n を n の分割全体とし, SP_n を n の strict な分割全体とする. さらに OP_n を n の odd な分割全体とする. さて, χ_ρ^λ を対称群 S_n の $\lambda \in P_n$ で表される既約表現の共役類 ρ での指標の値とし, 同様に ζ_ρ^λ を対称群の 2 重被覆群 $\tilde{S}_n$ の $\lambda \in SP_n$ で表される *negative* な既約表現の共役類 $\rho \in OP_n$ での指標の値とする (cf. [3]). この記事で扱う変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ に関する対称関数を定義する. $p_r(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\geq 1} x_i^r$ $(r \geq 1)$ を冪和対称関数として,

$$\Lambda = \mathbb{Q}[p_j(\boldsymbol{x});\ j \geq 1]$$

を対称関数環, さらにその部分代数

$$\Gamma = \mathbb{Q}[p_j(\boldsymbol{x});\ j \geq 1,\ j \text{ is odd.}]$$

としてシューア関数及び, "big" な シューア関数を次のようにおく:

$$s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_{\rho \in P_n} z_\rho^{-1} \chi_\rho^\lambda p_\rho(\boldsymbol{x}) \in \Lambda,$$
$$T_\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_{\rho \in OP_n} z_\rho^{-1} \chi_\rho^\lambda 2^{l(\rho)} p_\rho(\boldsymbol{x}) \in \Gamma.$$

シューア関数の積を再びシューア関数で展開した係数（Littlewood-Richardson 係数）を

$$\prod_{i=0}^{r-1} s_{\lambda^i}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\nu \in P_n} c^{\nu}_{\lambda^0,\lambda^1,\cdots,\lambda_{r-1}} s_\nu(\boldsymbol{x})$$

と置く．次に $\lambda \in SP_n$ に対してシューアの Q-関数と P-関数を

$$Q_\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_{\rho \in OP_n} z_\rho^{-1} \zeta_\rho^{\lambda} 2^{(l(\lambda)+l(\rho)+\epsilon(\lambda))/2} p_\rho(\boldsymbol{x}),$$
$$P_\lambda(\boldsymbol{x}) = 2^{-l(\lambda)} Q_\lambda(\boldsymbol{x}),$$

ここで

$$\epsilon(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{if } n - l(\lambda) \text{ is even,} \\ 1 & \text{if } n - l(\lambda) \text{ is odd} \end{cases}$$

である．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots)$ を変数として，

$$\boldsymbol{x}^r = (x_1^r, x_2^r, \cdots),$$
$$\boldsymbol{xy} = (x_i y_j; i \geq 1, j \geq 1)$$

と書く．今 $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/r)$ に対して $\boldsymbol{y} = (1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{r-1}, 0, 0, \cdots)$ と置き

$$\boldsymbol{x}_{,r} = \boldsymbol{xy}$$

と書く．

3 分割の Bar-Core と Bar-Quotient

ここでは r を正の奇数とする．λ から得られる $(r+1)$ 組の分割を

$$(\lambda^{c(r)}, \lambda^0, \ldots, \lambda^{r-1})$$

と書いて，$\lambda^{c(r)}$ を λ の r-core，そして $\lambda^{q(r)} = (\lambda^0, \ldots, \lambda^{r-1})$ を λ の r-quotient とする (cf. [12])．

Definition 3.1. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l) \in SP_n$ とする．λ の double を Frobenius notation を用いて，

$$D(\lambda) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_l \mid \lambda_1 - 1, \cdots, \lambda_l - 1),$$

で定義する．

Example 3.2. $\lambda = (4,2,1) = \begin{array}{llll} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & & \\ \times & & & \end{array}$ とする. λ の double は,

$$D(\lambda) = (5,4,4,1) = \begin{array}{lllll} \circ & \times & \times & \times & \times \\ \circ & \circ & \times & \times & \\ \circ & \circ & \circ & \times & \\ \circ & & & & \end{array}$$

となる.

$D(\lambda)$ の特筆すべき性質を次に述べる.

Proposition 3.3. [7] $\lambda \in SP_n$ する.
(1) *strict* な分割 $\lambda^{bc(r)}$ と $\lambda^{b(0)}$ が存在して

$$D(\lambda^{bc(r)}) = D(\lambda)^{c(r)},$$
$$D(\lambda^{b(0)}) = D(\lambda)^0$$

を満たす.
(2)$1 \le i \le (r-1)/2$ のとき $D(\lambda)^{r-i}$ と $D(\lambda)^i$ は共役.

この命題を利用して次のような定義を与える.

Definition 3.4. 記号は上の命題と同じとする. (1) $\lambda^{bc(r)}$ を λ の *r-bar core* と呼ぶ.
(2) $1 \le i \le t$ に対して $t = (r-1)/2$ 及び $\lambda^{b(i)} = D(\lambda)^i$ と置いて, 分割の組

$$\lambda^{bq(r)} = (\lambda^{b(0)}, \lambda^{b(1)}, \cdots, \lambda^{b(t)})$$

を λ の *r-bar quotient* と呼ぶ.

一つ例を見てみよう

Example 3.5. $\lambda = (15,14,13,7,6,5,3,1)$ の 5-bar quotient を計算する. $D(\lambda)$ の β-set とは次のものである.

$$D(\lambda) + \delta_{15} = (30,29,28,22,21,20,18,16,13,11,7,6,5,4,3),$$

ここで $\delta_{15} = (14,13,12,11,10,9,8,7,6,5,4,3,2,1,0)$ である. $D(\lambda)$ の 5-quotient を求めるにはまず, $D(\lambda) + \delta_{15}$ の各成分を次のような表に書き留める, (こうして出

来るカレンダーをを 5-abacus という).

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & ③ & ④ \\ ⑤ & ⑥ & ⑦ & 8 & 9 \\ 10 & ⑪ & 12 & ⑬ & 14 \\ 15 & ⑯ & 17 & ⑱ & 19 \\ ⑳ & ㉑ & ㉒ & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & ㉘ & ㉙ \\ ㉚ & 31 & 32 & 33 & 34 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

それぞれの列を上から $0, 1, 2, \cdots$ と読んでいくことでマルの位置から 5 個の β-set を読み取ることが出来る. こうして得られた β-set の組から得られる分割

$$((4,3,1),(1^4),(3,1),(2,1^2),(4))$$

が $D(\lambda)$ の 5-quotient である. これより λ の 5-bar quotient を得る;

$$\lambda^{bq(5)} = ((3,1),(1^4),(3,1)).$$

次に各マルを列ごとに上に詰めこむ

$$\begin{array}{ccccc} ⓪ & ① & ② & ③ & ④ \\ ⑤ & ⑥ & ⑦ & ⑧ & ⑨ \\ ⑩ & ⑪ & 12 & ⑬ & 14 \\ 15 & ⑯ & 17 & ⑱ & 19 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

今度はこのカレンダーをにあるマルの番号を直接読むことで得られる β-set から 5-core として $D(\lambda)^{c(5)} = (4,3,1)$ を得る. よって $\lambda^{bc(5)} = (3,1)$ である.

ここで *r-sign* と *r-bar sign* と呼ばれる符号について上の example を使って説明する.
番号を次のように 2 通りの方法で 5-abacus に振っていく.
(1) 小さい順に自然に振る (natural numbering)
(2) 層ごとに振る (5-numbering).

natural numbering						5-numbering				
0	1	2	③$_1$	④$_2$		0	1	2	③$_4$	④$_5$
⑤$_3$	⑥$_4$	⑦$_5$	8	9		⑤$_1$	⑥$_2$	⑦$_3$	8	9
10	⑪$_6$	12	⑬$_7$	14		10	⑪$_7$	12	⑬$_9$	14
15	⑯$_8$	17	⑱$_9$	19	$\longrightarrow$	15	⑯$_{12}$	17	⑱$_{13}$	19
⑳$_{10}$	㉑$_{11}$	㉒$_{12}$	23	24		⑳$_6$	㉑$_{14}$	㉒$_8$	23	24
25	26	27	㉘$_{13}$	㉙$_{14}$		25	26	27	㉘$_{15}$	㉙$_{10}$
㉚$_{15}$	31	32	33	34		㉚$_{11}$	31	32	33	34

この二つの振り方から次のような置換を得る.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 & 7 & 9 & 12 & 13 & 6 & 14 & 8 & 15 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

$D(\lambda)$ の 5-sign をこの置換の符号で定義する:

$$\delta_5(D(\lambda)) = \mathrm{sgn}\sigma = 1.$$

今度は λ の要素を直接表に記す (こうして得られるカレンダーを 5-bar abacus と言う). そして次のように番号を振る

(1) 小さい順に自然に振る (natural numbering).

(2) 詳しくは [12] を見よ (5-bar numbering).

natural numbering						5-bar numbering				
0	①$_1$	2	③$_2$	4		0	①$_4$	2	③$_6$	4
⑤$_3$	⑥$_4$	⑦$_5$	8	9	$\longrightarrow$	⑤$_1$	⑥$_7$	⑦$_5$	8	9
10	11	12	⑬$_6$	⑭$_7$		10	11	12	⑬$_8$	⑭$_3$
⑮$_8$	16	17	18	19		⑮$_2$	16	17	18	19

この二つの振り方から次のような置換を得る.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 & 7 & 5 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

λ の 5-bar sign をこの置換の符号で定義する:

$$\bar{\delta}_5(\lambda) = \mathrm{sgn}\sigma = -1.$$

後で必要な部分についてのみこれらの sign の表現論的な意味を書いておく.

Remark 3.6. (1)$\lambda \in P_{rn}$ の r-core が無いとき，

$$\delta_r(\lambda) = \chi^{\lambda}_{(r^n)}/|\chi^{\lambda}_{(r^n)}|.$$

(2) $\lambda \in SP_{rn}$ の r-bar core が無いとき，

$$\bar{\delta}_r(\lambda) = \zeta^{\lambda}_{(r^n)}/|\zeta^{\lambda}_{(r^n)}|.$$

Remark 3.7. 上で紹介した bar-quotient, bar-core は Olsson の本 ([12]) で紹介されれいるものと同一である，そこではより直接的な定義と計算法が書かれている．

4 シューア関数についての諸公式

始めにシューア関数の分解公式をのべる．

Theorem 4.1. [5, 10] r を正の整数, λ を分割とする．

$$s_\lambda(\boldsymbol{x}_{,r}) = \begin{cases} \delta_r(\lambda) s_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}^r_N) s_{\lambda^1}(\boldsymbol{x}^r_N) \cdots s_{\lambda^{r-1}}(\boldsymbol{x}^r_N) & (\lambda^{bc(r)} = \emptyset), \\ 0 & (\lambda^{bc(r)} \neq \emptyset). \end{cases}$$

この公式から即座に次の Chen-Garsia-Remmel [2] によるプレシズムの公式を得る．

Corollary 4.2. [2]

$$p_r \circ s_\lambda = \sum_{\mu^{bc(r)} = \emptyset} \delta_r(\mu) c^{\lambda}_{\mu_0, \cdots, \mu_{r-1}} s_\mu.$$

この証明は Cauchy identity からすぐに得られる．

Example 4.3.

$$p_2 \circ s_{(2,2)} = s_{(4,4)} - s_{(3,2,2,1)} + s_{(4,2,2)} - s_{(4,3,1)} + s_{(3,3,1,1)} + s_{(2,2,2,2)}.$$

5 シューアの Q-関数のプレシズム

ここでの目的は $p_r \circ Q_\lambda$ を再び Q-関数で展開することである．そのために前節の Theorem 4.1 にあたるものとして次の分解公式を得た．

Theorem 5.1. r を正奇数とする. そして $\lambda \in SP_n$ の r-*bar core* が無いとき

$$2^{-l(\lambda)/2}Q_\lambda(\boldsymbol{x}_{,r}) = \bar{\delta}_r(\lambda)2^{-l(\lambda^{b(0)})/2}Q_{\lambda^{b(0)}}(\boldsymbol{x}^r)T_{\lambda^{b(1)}}(\boldsymbol{x}^r)\cdots T_{\lambda^{b(t)}}(\boldsymbol{x}^r),$$
$$2^{l(\lambda)/2}P_\lambda(\boldsymbol{x}_{,r}) = \bar{\delta}_r(\lambda)2^{l(\lambda^{b(0)})/2}P_{\lambda^{b(0)}}(\boldsymbol{x}^r)T_{\lambda^{b(1)}}(\boldsymbol{x}^r)\cdots T_{\lambda^{b(t)}}(\boldsymbol{x}^r).$$

証明は前節の定理 4.1 と You[14] による Λ から Γ への reduction map をつかう.

Remark 5.2. Theorem 5.1 において $\lambda^{bc(r)} = \emptyset$, な事から

$$l(\lambda) \equiv l(\lambda^{b(0)}) (\mathrm{mod}\ 2).$$

それゆえ $2^{(l(\lambda)-l(\lambda^{b(0)}))/2}$ は整数である.

この定理の証明から得られる系を紹介する.

Corollary 5.3.

$$\delta_r(D(\lambda)) = 1.$$

また Theorem 5.1 の特別な場合は [10] で示されている. さて,Theorem 5.1 から $P(Q)$-関数の冪和対称関数とのプレシズムを計算すると次の定理が得られる.

Theorem 5.4. r を正の奇数とする.

$$p_r \circ P_\lambda = \sum_{\mu^{bc(r)}=\emptyset} \bar{\delta}_r(\mu)2^{(l(\mu)-l(\mu^{b(0)}))/2}t_{\mu,\lambda}P_\mu,$$
$$p_r \circ Q_\lambda = 2^{l(\lambda)} \sum_{\mu^{bc(r)}=\emptyset} \bar{\delta}_r(\mu)2^{(-l(\mu)-l(\mu^{b(0)}))/2}t_{\mu,\lambda}Q_\mu.$$

ここで $[\ |\ ]$ を $[Q_\lambda \mid P_\mu] = \delta_{\lambda,\mu}$ を満たす内積として,

$$t_{\lambda,\mu} = [Q_{\lambda^{b(0)}}T_{\lambda^{b(1)}}\cdots T_{\lambda^{b(t)}} \mid P_\mu],$$

とした.

証明. Hall-Littlewood 対称関数 の parameter$= -1$ での Cauchy identity は,

$$\prod_{i,j}\frac{(1+x_iy_j)}{(1-x_iy_j)} = \sum_\lambda P_\lambda(\boldsymbol{x})Q_\lambda(\boldsymbol{y})$$

であった. これにおいて $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{x}^r$ に $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{y}^r$ に変数変換する. すると

$$\prod_{i,j}\frac{(1+x_i^ry_j^r)}{(1-x_i^ry_j^r)} = \prod_{k=0}^{r-1}\frac{(1+x_i\omega^ky_j)}{(1-x_i\omega^ky_j)}.$$

を得て次のことがわかる;

$$\sum_{\lambda} P_\lambda(\boldsymbol{x}^r)Q_\lambda(\boldsymbol{y}^r) = \sum_{\lambda} P_\lambda(\boldsymbol{x})Q_\lambda(\boldsymbol{y}_{,r}).$$

上の等式から

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}^r) = \sum_{\mu}[Q_\mu(\boldsymbol{y}_{,r}) \mid P_\lambda(\boldsymbol{y}^r)]P_\mu(\boldsymbol{x})$$

を得る. Theorem 5.1 から

$$[Q_\mu(\boldsymbol{y}_{,r}) \mid P_\lambda(\boldsymbol{x}^r)] = \begin{cases} 0 & \lambda^{bc(r)} \neq \emptyset \\ \bar{\delta}_r(\mu)2^{l(\mu)/2-l(\mu^{b(0)})/2}t_{\mu,\lambda} & \lambda^{bc(r)} = \emptyset. \end{cases}$$

を得る. □

上の定理で $\lambda = (n)$ と置くと次のような簡単な公式が得られる.

Theorem 5.5. r を正奇数とする.

$$p_r \circ Q_{(n)} = \sum_{\mu \in H_{rn}} \bar{\delta}_r(\mu)Q_\mu.$$

ここで

$$\begin{aligned} H_{r,n} = \{\mu = (\mu_1 \dots \mu_l) \in SP_{rn} \\ \mid \exists\, i\ s.t.\ \mu_i \equiv k (\mathrm{mod}\ r) \Rightarrow \exists!\, j\ s.t.\ \mu_j \equiv r - k (\mathrm{mod}\ r)\}. \end{aligned}$$

証明. 証明は bar quotient の組合せ論及び Stembridge[13] に因る $f^{\nu}_{\lambda,\mu}$ の組合せ的な計算法を用いる. □

Example 5.6. $n = 3$ の場合

$$\begin{aligned} H_{1,3} &= \{(3), (2,1)\} \\ H_{2,3} &= \{(6), (5,1), (4,2), (3,2,1)\} \\ H_{3,3} &= \{(9), (8,1), (7,2), (5,4), (6,2,1), (5,3,1), (4,3,2)\}. \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} p_3 \circ Q_{(1)} &= Q_{(3)} - Q_{(2,1)}, \\ p_3 \circ Q_{(2)} &= Q_{(6)} - Q_{(5,1)} + Q_{(4,2)} - Q_{(3,2,1)}, \\ p_3 \circ Q_{(3)} &= Q_{(9)} - Q_{(8,1)} + Q_{(7,2)} - Q_{(5,4)} - Q_{(6,2,1)} + Q_{(5,3,1)} - Q_{(4,3,2)} \end{aligned}$$

を得る. $n=5$ では

$$H_{2,5}=\{(10),(9,1),(8,2),(7,3),(6,4),(5,4,1),(5,3,2),(4,3,2,1)\}$$

から,

$$\begin{aligned}p_5\circ Q_{(2)}=Q_{(10)}-Q_{(9,1)}+Q_{(8,2)}\\ -Q_{(7,3)}+Q_{(6,4)}-Q_{(5,4,1)}+Q_{(5,3,2)}-Q_{(4,3,2,1)}\end{aligned}$$

を得る. ここでもう少し計算してみよう

$$p_1^3\circ Q_{(2)}=Q_{(2)}^3=4Q_{(6)}+8Q_{(5,1)}+10Q_{(4,2)}+2Q_{(3,2,1)}$$

である, さらにシューアの Q-関数を冪和対称関数で展開すると;

$$\begin{aligned}Q_{(3)}&=\frac{4}{3}p_1^3+\frac{2}{3}p_3,\\ Q_{(2,1)}&=\frac{4}{3}p_1^3-\frac{4}{3}p_3.\end{aligned}$$

となる. これらの事から,

$$\begin{aligned}Q_{(2,1)}\circ Q_{(2)}&=4Q_{(6)}+12Q_{(5,1)}+12Q_{(4,2)}+4Q_{(3,2,1)},\\ Q_{(3)}\circ Q_{(2)}&=6Q_{(6)}+10Q_{(5,1)}+14Q_{(4,2)}+2Q_{(3,2,1)}\end{aligned}$$

を得る.

参考文献

[1] L. Carini and J. Remmel, Formulas for the expansion of the plethysms $s_2[s_{(a,b)}]$ and $s_2[s_{(n^k)}]$, Selected papers in honor of Adriano Garsia (Taormina, 1994). Discrete Math. 193 (1998), no. 1-3, 225-233.

[2] Y. Chen, A. Garsia and J. Remmel, Algorithms for plethysm, in Combinatorics and Algebra, Contemporary Math., 34(1984), 109-153.

[3] P. N. Hoffman and J. F. Humphreys, *Projective Representations of the Symmetric Groups,* Oxford, 1992.

[4] A. T. James and A. Kerber, *The Representation Theory of Symmetric Group,* Addison-Wesley Reading, MA 1981.

[5] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters, 2nd. ed.* , Oxford, 1950.

[6] D. E. Littlewood, Modular representations of symmetric groups, Proc. Royal Soc. A 209 (1951), 333-353.

[7] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd. ed.* , Oxford, 1995.

[8] H. Mizukawa Littlewood's multiple formula(Japanese), Topics in combinatorial representation theory (Japanese) (Kyoto, 2000). Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku No. 1190, (2001), 50-60.

[9] H. Mizukawa Factorization of Schur Q-functions and plethysm, preprint, 2002.

[10] H. Mizukawa and H.-F. Yamada, Littlewood's multiple formula for spin characters of symmetric groups, J. London Math. Soc. (2) 65, (2002), 1-9; doi: 10.1112/S0024610701002800.

[11] A. O. Morris, The spin representation of the symmetric group, Proc. London Math. Soc. (3) 12 (1962), 55-76.

[12] J. B. Olsson, Combinatorics and Representations of Finite Groups, Essen, 1993.

[13] J. R. Stembridge, Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups, Adv. Math. 74 (1989), no. 1, 87-134.

[14] Y. You, Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups, Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988), 449-464, Adv. Ser. Math. Phys., 7, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989.