数理解析研究所講究録 1263 巻 2002 年 72-82

ランダム需要とその最適割当について

大阪府立大学　寺岡義伸 (Yoshinobu Teraoka)
大阪府立大学　北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
Department of Mathematics and Infomation Sciences,
Osaka Prefecture University

1 モデルと定式化

ある地域内に m 個の需要点と呼ばれる点と n 個の施設が散在している．そして需要点と施設は固定されているものとする．需要点 i では，rate r_i をもつポアソン過程に従って要求が発生する．この要求は全需要点に対して共通の種目の要求となっており，発生の仕方は各需要点に関して独立であるものとする $(i=1,\ldots,m)$．各需要点で需要が発生するとこの要求を処理するため，施設 j へ送る $(j=1,\ldots,n)$．需要点 i から施設 j へ要求を送るに際しては，d_{ij} の時間がかかるものとし，また施設 j では各要求に対して rate λ_j の指数分布に従って処理されるものとする．

ここで我々の問題は，rate r_i で発生する需要点 i での要求を n 個の施設の中のどれに送って処理すると最も短い時間で処理できるかということである．すなわち，需要点 i で発生した要求をどの割合で施設 j へ送るかを考える．そこで，

$$x_{ij}=\text{需要点 } i \text{ で rate } r_i \text{ のポアソン過程で発生した要求のうち施設 } j \text{ へ配分される rate}$$

とすると，

$$x_{i1}+\cdots+x_{in}=r_i,\quad x_{i1}\geq 0,\ldots,x_{in}\geq 0,\quad i=1,\ldots,m \tag{1}$$

を満足する x_{ij} を決定する問題ということになる．そうすると施設 j への要求の到着は到着率

$$x_j=x_{1j}+\cdots+x_{mj},\quad j=1,\ldots,n \tag{2}$$

をもつポアソン到着ということになり，各 j での処理時間も rate λ_j をもつ指数分布に従うので，要求が発生してから処理を開始するまでの平均所要時間は待ち行列における M/M/1 待ちシステムの期待待ち時間と需要点から施設への移動時間として評価することができる．目的は，このシステム全体で発生した要求の処理完了までの期待時間を最小にするような配分 $x_{ij}\geq 0$, ただし $i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n$ を決定することとなる．

2 一般的定式化

あるシステム内で複数の要求が発生し，これらの要求を複数の施設で処理しようとする場合，システム全体としての要求処理完了までの時間を最小にするとは，要求発生場所から施設までの移動時間を含め処理待ち時間と処理に関する時間の和が最も長くかかりそうな部署を最小時間で済ませるような要求配分を考えることに他ならない．そう考えると我々のモデルは下記のように定式化できる．

$$W_j \quad = \quad \text{施設}\,j\,\text{での待ち時間を示す確率変数}$$
$$S_j \quad = \quad \text{施設}\,j\,\text{での処理時間を示す確率変数}$$
$$d_{ij} \quad = \quad \text{需要点}\,i\,\text{から施設}\,j\,\text{への移動時間}$$

とすると，

$$\min_X \max_{i,j}\{E(W_j + S_j) + u(x_{ij})d_{ij}\}, \tag{3}$$

ここに，$E(Z)$は確率変数Zの期待値を意味し，$u(\cdot)$は

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

である．また，Xは制約条件を満足するmn組の配分$x_{ij} \geq 0$全体の集合である$(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$.

上記の定式化は，要求の発生や処理がポアソン過程に従うことを限定せず，独立性さえ仮定すればどのような確立法則に対しても通用できる定式化である．要求の発生や処理がポアソン過程に従うことに限定した場合の形式で表現してみよう．W_jをM/M/1 待ち時間とすると，

$$E(W_j) = \frac{x_j}{\lambda_j(\lambda_j - x_j)} \tag{4}$$

であることが知られており，これに伴うトラフィック条件として

$$x_j < \lambda_j$$

が課せられることも知られている．従って制約条件として

$$x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j \tag{5}$$

が要請される．また，後の議論のため，

$$R = r_1 + \cdots + r_m; \quad M = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

とおくと，(1),(2),(5) より

$$R < M \tag{6}$$

を前提とするのは言うまでもない．次に施設jでの処理時間も rate λ_jの指数分布を仮定してあるので

$$E(S_j) = \frac{1}{\lambda_j} \tag{7}$$

となる．(1),(2),(3),(4),(5),(7) をまとめると我々の問題は，次のような数理計画問題として表現することができる．

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[\frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij})d_{ij}\right] \\ &\text{subject to} \\ &\qquad x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i, \\ &\qquad x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j, \\ &\qquad x_{ij} \geq 0, \\ &\qquad i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n \end{aligned} \tag{A}$$

ここに，

$$u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

これは，非線形の数理計画問題であり，一般的取り扱いは非常に難しい．

以後，需要点から施設への移動時間がそれらの位置に関係せず一定と考えられる場合，および平均処理時間と移動時間が一般的な場合について考察する．ここで，需要点全体の集合をDで，施設全体の集合をFで表すこととする．すなわち，

$$D = \{1, \ldots, m\}; \quad F = \{1, \ldots, n\}.$$

3 移動時間が一定の場合

本節では，需要点から施設への移動時間がそれらの位置に関係せず一定の場合，すなわち

$$d_{ij} = d \qquad \text{for all } (i, j) \in D \times F \tag{8}$$

となっている場合を考察する．このとき問題(A)の目的関数は，

$$\begin{aligned} &\min_{x_{ij}} \max_{i,j} \left[\frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij}) d \right] \\ &= \min_{x_j} \max_{j} \left(\frac{1}{\lambda_j - x_j} \right) + d \end{aligned} \tag{9}$$

となる．これは，とりあえずx_jを求める問題である．そこで，

$$\lambda_1 - x_1 = \cdots = \lambda_n - x_n = \text{const} \tag{10}$$

を満足する$x_1, \ldots, x_n$をそれぞれ$x_1^*, \ldots, x_n^*$とおくと，すなわち

$$x_1 + \cdots + x_n = R \tag{11}$$

であるから

$$x_j^* = \lambda_j - \frac{M - R}{n}, \quad j = 1, \ldots, n \tag{12}$$

とおくと，

$$\min_{x_j} \max \left(\frac{1}{\lambda_j - x_j} \right) = \frac{1}{\lambda_j - x_j^*} \tag{13}$$

を得る．なぜならば式(10)を満足しないx_jに対しては少なくとも1つ

$$\frac{1}{\lambda_k - x_k} > \frac{1}{\lambda_j - x_j^*} = \frac{n}{M - R} \tag{14}$$

となるx_kが存在する．もしそうでなければ，すべてのjに対して，

$$\lambda_j - x_j \leq \frac{M - R}{n} \tag{15}$$

であり，さらにあるkに対して

$$\lambda_k - x_k \leq \frac{M - R}{n} \tag{16}$$

でなければならない．そうすると

$$\sum_{j=1}^{n} x_j < R \tag{17}$$

となってしまうからである．(9),(10),(11)を比較すると(10)で与えられるx_j^*が目的関数を満足する施設jへの配分の和であることがわかる．

さて，(10)によって$x_1^*, \ldots, x_n^*$が求まると，需要点iから施設jへの配分x_{ij}は(1)と(2)の両方を満足しなければならないから，需要点から施設への輸送費が一定である輸送問題

$D \setminus F$	1	2	$\cdots$	j	$\cdots$	n	計
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1j}	$\cdots$	x_{1n}	r_1
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2j}	$\cdots$	x_{2n}	r_2
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	x_{i1}	x_{i2}	$\cdots$	x_{ij}	$\cdots$	x_{in}	r_i
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mj}	$\cdots$	x_{mn}	r_m
計	x_1^*	x_2^*	$\cdots$	x_j^*	$\cdots$	x_n^*	R

の解より得られることとなる．この解は無数に存在するが，北西隅法による解が簡便な解法といえよう．

4 平均処理時間が一定の場合

ここでは，各施設での平均処理時間が施設によって異なっており，移動時間も一般的となっている場合を考察する．この場合，問題(A)の目的関数は

$$\begin{aligned}&\min_{x_{ij}}\max_{i,j}\left[\frac{1}{\lambda_j - x_j} + u(x_{ij})d_{ij}\right]\\ &\quad = \min_{x_{ij}}\max_{j}\left[\frac{1}{\lambda_j - x_j} + \max_i u(x_{ij})d_{ij}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

となる．そうすると，もし適当なx_jが定まったとすると，我々の問題は

$$\begin{aligned}&\min_{x_{ij}}\{\max_i u(x_{ij})d_{ij}\}\\ &\text{subject to}\\ &\qquad x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j,\\ &\qquad x_{ij} \geq 0,\\ &\qquad i = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n\end{aligned}$$

を満足するような“需要点iから施設jへの最大移動時間を最小にするような経路を見つけ出す問題”に転化されることになる．この最短時間経路はすべての$j = 1, \ldots, n$に対して見つけられなければならないから，このような経路は輸送問題

$$\begin{aligned}&\min_{x_{ij}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} d_{ij}x_{ij}\\ &\text{subject to}\\ &\qquad x_{i1} + \cdots + x_{in} = r_i,\\ &\qquad x_{1j} + \cdots + x_{mj} = x_j < \lambda_j,\\ &\qquad x_{ij} \geq 0,\\ &\qquad i = 1, \ldots, m;\ \ j = 1, \ldots, n\end{aligned} \tag{S}$$

を解くことによって得られる．さらに問題(S)の解は，施設jへ配分される要求の総量が定まったと仮定した場合の，需要点iから施設jへの最適配分量x_{ij}をも，与えてくれることになる．(各x_jに対しての最適配分量x_{ij}は一通りとは限らないが，移動時間d_{ij}にx_{ij}の負荷がかかると考えると一通りに定まる.)

そうすると，我々にとって残された問題は，与えられたλ_jに対応する問題(A)を満足する適当なx_jを定めることとなる．いま，x_jが定まったとすると輸送問題(S)により配分x_{ij}が定まるのであるから，

$$D_j = \{\, i \mid x_{ij} > 0\},\quad j = 1, \ldots, n \tag{19}$$

すなわち，$D=\{1,\ldots,m\}$の中で施設$j\in F=\{1,\ldots,n\}$への配分を行なう需要点全体の集合を定義する．このとき，$i\neq j$に対して$D_i\cap D_j=\phi$になるとは限らない．そうすると

$$x_j=\sum_{i\in D_j}x_{ij}<\lambda_j,\quad j=1,\ldots,n \tag{20}$$

となる．さらに実行可能なD_jに対して

$$\begin{aligned} d_j &= \max_{i\in D_j} d_{ij} \\ &= \max_i u(x_{ij})d_{ij},\quad j=1,\ldots,n \end{aligned} \tag{21}$$

すなわち，施設jへ要求を配分する需要点の中で最長となる点までの距離d_jを定義する．そうすると問題(A)は

$$\begin{aligned} &\min_{x_j}\max_j\left[\frac{1}{\lambda_j-x_j}+d_j\right] \\ &\text{subject to} \\ &\qquad x_1+\cdots+x_n=\sum_{i=1}^m r_i=R, \\ &\qquad x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\cdots,x_n\geq 0 \end{aligned} \tag{T}$$

と変形できる．ただし

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in D_j}x_{ij}=x_j<\lambda_j, \\ &\sum_{j=1}^n x_{ij}=r_i, \\ &x_{ij}\geq 0,\quad i=1,\ldots,m\ ;\ j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

である．

問題(T)を観察すると，目的関数はd_jが定まるとx_jにつき凸関数かつ増加関数となっており，またd_jはx_jが定まると輸送問題(S)により可能な限り小さく決定されることがわかる．また，問題(T)の解は，d_jがx_jにより変化しないとすると

$$\frac{1}{\lambda_j-x_j}+d_j=\text{一定}\quad \text{for all}\quad j \tag{22}$$

を満足するx_jにより与えられることもわかる．しかしながら，x_jを増加すると$\sum_{i=1}^m x_{ij}=x_j$であるから$x_{ij}>0$となるiの数も増加し，従ってx_{ij}に対応するd_{ij}も大きな値の選択へ向かわざるをえなくなり，結果としてd_jが大きな値に変化することになる。x_jを減少すると同様にしてd_jがより小さな値のd_{ij}の選択へ移行して減少する可能性も出てくる。

したがって，適当なx_jの設定に対して，d_jに変化が生ぜず

$$\frac{1}{\lambda_j-x_j}+d_j=\text{一定}\quad \text{for all}\quad j \tag{23}$$

であれば，このx_jが最適解を与えることとなり，x_jの設定によりd_jが変化し，そのd_jに応じてx_jが変化する関係が発生した時は，

$$D_j\cap D_k\neq\phi \tag{24}$$

の状態で x_j と d_j が相互に影響し合う関係が発生したこととなるので,

$$D_j \cap D_k = \phi \tag{25}$$

となるように x_{ij} を調整し, d_j もできるだけ小さく選ぶようにすることから最適解が得られることになる.
　以上の考察をもとに次の手順を得る.

最適解への手順

1. 初期値を以下のように決定する.

 1.1. x_j^0 を

$$x_j^0 = \lambda_j - \frac{M-R}{n}, \quad j = 1, \dots, n$$

 により定める.

 1.2. 1.1 で求めた x_j^0 をもとに, 輸送問題 (S) を解き, その解を x_{ij}^0 とおく. $(i = 1, \dots, m\,;\ j = 1, \dots, n)$.

 1.3. 1.2 で求めた x_{ij}^0 をもとに

$$D_j^0 = \{\, i \mid x_{ij}^0 > 0\}, \quad j = 1, \dots, n$$

 および

$$d_j^0 = \max_{i \in D_j^0} d_{ij}, \quad j = 1, \dots, n$$

 を定める.

 1.4. 1.3 で定めた d_j^0 が $j \in F$ に関係せず一定, すなわち

$$d_j^0 = d^0 \quad \text{for all} \quad j \in F$$

 であるならば, 1.1 と 1.2 で定めた x_j^0 および x_{ij}^0 は最適解となる. ただし, $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.
 　また, この時, 最適値 v^0 は

$$v^0 = \frac{n}{M-R} + d^0$$

 である. ここで停止.
 　もしそうでなければ 2 へ進む.

2. 1 で最適解が求まらなかった時は, 以下のように改訂し, 最適解を導く.

 2.1. 1 で求められた $x_j^0, x_{ij}^0, d_j^0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ に対して

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} + d_j^0 = w^0 \ (\text{一定}) \quad \text{for all} \quad j \in F$$

$$\text{ただし} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = R$$

 を満足する x_j を x_j^1 とおく. すなわち

$$x_j^1 = \lambda_j - \frac{1}{w^0 - d_j^0}, \quad j = 1, \dots, n$$

とおく．ここにw^0は方程式

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w^0 - d_j^0} = M - R$$

の正の唯一根である．

2.2. 2.1で定まったx_j^1に対して輸送問題(S)を解き，その解をx_{ij}^1とおく．$(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$.

2.3. 2.2で定まったx_{ij}^1をもとに

$$D_j^1 = \{\, i \mid x_{ij}^1 > 0\}, \quad j = 1, \ldots, n$$

および

$$d_j^1 = \max_{i \in D_j^1} d_{ij}$$

を定める．

2.4. 2.1で定まったx_j^1と2.3で定まったd_j^1に対して

$$w_j^1 = \frac{1}{\lambda_j - x_j^1} + d_j^1, \quad j = 1, \ldots, n$$

とおく．さらに

$$w_l^1 = \min_{j \in F} w_j^1 \ ; \ \ w_u^1 = \max_{j \in F} w_j^1$$

とおく．

2.5. 2.4で求められたw_l^1とw_u^1に対して，

$w_l^1 = w_u^1$ならば，

2.1で定められたx_jと2.2で定められたx_{ij}^1は最適解を与える．ただし，$i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$. この時，最適値$v^1$は

$$v^1 = \frac{1}{\lambda_j - x_j^1} + d_j^1 = w_u^1 \quad \text{for all} \quad j \in F$$

$w_l^1 < w_u^1$ならば，

$D_j \cap D_k = \phi, j \neq k$となるように，すなわち$x_{ij} = 0$または$x_{ik} = 0$となるように$x_{ij}^1$を調整する．この調整された$x_{ij}$を$x_{ij}^*$とおく．$(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. この$x_{ij}^*$に従って

$$\begin{aligned} D_j^* &= \{\, i \mid x_{ij}^* > 0\}; \\ d_j^* &= \max_{j \in D_j^*} d_{ij} \\ w_m^* &= \max_{j \in F} \left[\frac{1}{\lambda_j - x_j^1} + d_j^* \right] \end{aligned}$$

を定める．

そうすると$x_j^1 (j = 1, \ldots, n)$と$x_{ij}^* (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$は最適解を与える．この時，最適値$v^*$は

$$v^* = w_m^*$$

である．

5 簡単な例

例 1．最初に，需要点は 4 点 $(m = 4)$，施設は 2 施設 $(n = 2)$ あり，

$$r_i = 1,\ i = 1, \ldots, 4,\quad R = 4$$
$$\lambda_j = 2.5,\ j = 1, 2,\quad M = 5$$

そして移動時間は

$j \backslash i$	1	2	3	4
1	0	2	3	4
2	3	2	2	1

で与えられている場合を扱う．

初期設定として，$x_1^0 = x_2^0 = 2$ となるから，輸送問題 (S) を解くことにより

$$x_{11}^0 = 1,\ x_{21}^0 = 1,\ x_{31}^0 = 0,\ x_{41}^0 = 0,$$
$$x_{12}^0 = 0,\ x_{22}^0 = 0,\ x_{32}^0 = 1,\ x_{42}^0 = 1$$

そして

$$D_1^0 = \{1, 2\}\ ;\ D_2^0 = \{3, 4\},$$
$$d_1 = 2\ ;\ d_2 = 2$$

を得る．そうすると $d_1 = d_2 = 2$ であるから，最適解は

$$x_{11}^0 = x_{12}^0 = 1,\ x_{13}^0 = x_{14}^0 = 0,$$
$$x_{21}^0 = x_{22}^0 = 0,\ x_{23}^0 = x_{24}^0 = 1$$

であり，この時，最適値は

$$v^0 = \frac{1}{2.5 - 2} + 2 = 4$$

となる．

次に，移動時間はそのままにしておいて

$$r_1 = r_2 = 1,\ r_3 = r_4 = 1.5,\ R = 5$$
$$\lambda = 4,\ M = 8$$

と変化させた場合を扱う．

やはり初期設定として，$x_1^0 = x_2^0 = 2.5$ となるから，輸送問題 (S) を解くと

$$x_{11}^0 = x_{21}^0 = 1.0,\ x_{31}^0 = 0.5,\ x_{41}^0 = 0,$$
$$x_{12}^0 = 0,\ x_{22}^0 = 0,\ x_{32}^0 = 1.0,\ x_{42}^0 = 1.5$$

そして

$$D_1^0 = \{1, 2, 3\}\ ;\ D_2^0 = \{3, 4\}$$
$$d_1^0 = 3\ ;\ d_2^0 = 2$$

を得る．そうすると$d_1^0 \neq d_2^0$だから

$$w^0 = \frac{1}{4 - x_1} + 3 = \frac{1}{4 - (5 - x_1)} + 2$$

となるようにx_1を選んで，$x_1^1 \approx 1.70$, $x_2^1 \approx 3.30$, $w^0 \approx 4.43$. したがって

$$x_{11}^1 = 1.00,\ x_{21}^1 \approx 0.70,\ x_{31}^1 = 0,\ x_{41}^1 = 0,$$
$$x_{12}^1 = 0,\ x_{22}^1 \approx 0.30,\ x_{32}^1 = 1.5,\ x_{42}^1 = 1.5$$

また

$$D_1^1 = \{1, 2\},\ D_2^1 = \{2, 3, 4\}$$
$$d_1 = 2,\ d_2 = 2$$

となる．そうすると

$$w_1^1 = \frac{1}{4 - x_1^1} + 2 < \frac{1}{4 - x_2^1} + 2 = w_2^1$$

であるから，$D_1^* \cap D_2^* = \phi$となるように調整する．そうすると

$$x_{11}^* = 1,\ x_{21}^* = 1,\ x_{31}^* = 0,\ x_{41}^* = 0,$$
$$x_{12}^* = 0,\ x_{22}^* = 0,\ x_{32}^* = 1.5,\ x_{42}^* = 1.5$$

が最適解となり，最適値は

$$v^* = \max\left(\frac{1}{4-2} + 2,\ \frac{1}{4-3} + 2\right) = 3$$

となる．

例２．次に，もっと一般的な例，需要点は３点 $(m = 3)$，施設は５施設 $(n = 5)$ あり，

$$r_1 = 3,\ r_2 = 4,\ r_3 = 5,$$
$$\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 2,\ \lambda_5 = 3$$

そして移動時間は

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	r_i
1	3	6	7	5	2	3
2	2	8	6	4	6	4
3	8	3	4	3	5	5
λ_j	4	4	3	2	3	

ここに，

$$R = \sum r_i = 12;\ M = \sum \lambda_j = 16$$

で与えられている場合を扱う．

初期設定として，d_{ij}を無視して

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} = \text{一定} \quad \text{for all } j$$
$$\text{ただし} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j = R = 12$$

より x_j^0 を決定する．そうすると

$$x_1^0 = 3.2,\ x_2^0 = 3.2,\ x_3^0 = 2.2,\ x_4^0 = 1.2,\ x_5^0 = 2.2$$

となるから，d_{ij} を輸送費用とみなした輸送問題 (S) を解くことにより，

$$\begin{array}{lllll} x_{11}^0 = 0.8, & x_{12}^0 = 0, & x_{13}^0 = 0, & x_{14}^0 = 0, & x_{15}^0 = 2.2, \\ x_{21}^0 = 2.4, & x_{22}^0 = 0, & x_{23}^0 = 0.4, & x_{24}^0 = 1.2, & x_{25}^0 = 0, \\ x_{31}^0 = 0, & x_{32}^0 = 3.2, & x_{33}^0 = 1.8, & x_{34}^0 = 0, & x_{35}^0 = 0 \end{array}$$

そして

$$D_1^0 = \{1,2\},\ D_2^0 = \{3\},\ D_3^0 = \{2,3\},\ D_4^0 = \{2\},\ D_5^0 = \{1\}$$
$$d_1^0 = 3,\ d_2^0 = 3,\ d_3^0 = 6,\ d_4^0 = 4,\ d_5^0 = 2$$

を得る．このとき

$$w^0 = \max_j \left(\frac{1}{\lambda_j - x_j^0} + d_j^0 \right) = 7.35$$

となる．

次に，今求めた d_j^0 をもとにして

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} + d_j^0 = 一定 \quad \text{for all} \quad j$$
$$\sum_{j=1}^{5} x_j = 12$$

より x_j^1 を決定する．そうすると

$$x_1^1 \approx 3.71,\ x_2^1 \approx 3.71,\ x_3^1 \approx 0.23,\ x_4^1 \approx 1.56,\ x_5^1 \approx 2.77$$

前段と同様にして，輸送問題 (S) を解いて

$$\begin{array}{lllll} x_{11}^1 = 0.23, & x_{12}^1 = 0, & x_{13}^1 = 0, & x_{14}^1 = 0, & x_{15}^1 = 2.77, \\ x_{21}^1 = 3.48, & x_{22}^1 = 0, & x_{23}^1 = 0, & x_{24}^1 = 0.52, & x_{25}^1 = 0, \\ x_{31}^1 = 0, & x_{32}^1 = 3.71, & x_{33}^1 = 0.23, & x_{34}^1 = 1.06, & x_{35}^1 = 0 \end{array}$$

および

$$D_1^1 = \{1,2\},\ D_2^1 = \{3\},\ D_3^1 = \{3\},\ D_4^1 = \{2,3\},\ D_5^1 = \{1\}$$

したがって

$$d_1^1 = 3,\ d_2^1 = 3,\ d_3^1 = 4,\ d_4^1 = 3,\ d_5^1 = 2$$

を得る．

前段と同様に，上記で求めた d_j^1 をもとにして

$$\frac{1}{\lambda_j - x_j} + d_j^1 = 一定 \quad \text{for all} \quad j$$
$$\sum x_j = 12$$

により x_j^2 を決定する．そうすると

$$x_1^2 \approx 3.37,\ x_2^2 \approx 3.37,\ x_3^2 \approx 1.26,\ x_4^2 \approx 1.37,\ x_5^2 \approx 2.63$$

再び輸送問題 (S) を解いて

$$
\begin{array}{lllll}
x_{11}^2 = 0.37, & x_{12}^2 = 0, & x_{13}^2 = 0, & x_{14}^2 = 0, & x_{15}^2 = 0, \\
x_{21}^2 = 3.00, & x_{22}^2 = 0, & x_{23}^2 = 0, & x_{24}^2 = 1.00, & x_{25}^2 = 0, \\
x_{31}^2 = 0, & x_{32}^2 = 3.37, & x_{33}^2 = 1.26, & x_{34}^2 = 0.37, & x_{35}^2 = 2.63
\end{array}
$$

したがって

$$D_1^2 = \{1,2\},\ D_2^2 = \{3\},\ D_3^2 = \{3\},\ D_4^2 = \{2,3\},\ D_5^2 = \{1\}$$

および

$$d_1^2 = 3,\ d_2^2 = 3,\ d_3^2 = 4,\ d_4^2 = 3,\ d_5^2 = 2$$

を得る．この結果を観察すると

$$d_j^1 = d_j^2 \quad \text{for all } j$$

となっている．この結果，今上で求めたx_{ij}^2がこの例の最適割り当てとなっていることがわかる．このとき

$$v^* = \frac{1}{\lambda_j - x_j^2} + d_j^2 \approx 4.57$$

が最適期待時間となる．

参考文献

[1] Berman, O. and Larson, R. (1985) Optimal 2-Facility Network Districting in the Presence of Queuing, Transpotation Science, v19, p,261-277.

[2] Cooper, R. B. (1990) Queuing theory. In Handbooks in Operations Research and Management Science, 2, D. P Heyman and MJ. Sobel (eds). North-Holland, New York.