数理解析研究所講究録 1264 巻 2002 年 188-202

マルチファクター・モデルにおける動学的最適ポートフォリオ

本多 俊毅 (Toshiki Honda) *

2002 年 1 月 31 日

1 イントロダクション

Sharpe [1964], Lintner [1965] らによる CAPM は，リスクとリターンの関係を表すモデルとして，ファイナンス理論において中心的な役割を果たしている．コーポレート・ファイナンスやファイナンシャル・エコノミクスのテキストでは，最も基本的なモデルとして位置付けられており，例えば資本コストの推定や，ポートフォリオのパフォーマンス評価など，さまざまな局面で CAPM が用いられている．実務上の応用においても，ポートフォリオ構築などでベンチマーク的な役割を果たすなど，非常に大きな影響力を持つモデルである．しかし，一方で CAPM はデータに対する説明力が十分ではない，ということが多くの文献で指摘されている．CAPM では，資産の期待リターンは，マーケット・ポートフォリオのリターンとの相関，すなわちベータによって特徴づけられる．ところが多くのデータ分析によると，企業規模，価格収益率，株価簿価比率といった変数が期待リターンに対する説明力を持つことが明らかになり，ベータだけでは十分な説明力が得られないとされた．[1] また，いわゆる Roll [1977] による CAPM 批判，すなわちマーケット・ポートフォリオ自体が観測できないという問題も指摘されている．

これらの問題に対する修正として，Ross [1976] による APT などのマルチファクター・モデルが積極的に利用されてきた．マルチファクター・モデルについては，どのようなファクターを用いるのか，ファクターの数はいくつ必要なのか，といった問題意識から多くの実証分析が行なわれている．特にポートフォリオ運用の実務においては，企業の財務変数，マクロ経済変数，企業の業種ダミー変数，さらには市場のモメンタム指標などの多くの変数が取り込まれたマルチファクター・モデルがコンピューター上に実装され，利用されている．これらのモデルの開発の歴史を振り返ると，ファクター数は増加したものの，モデルの説明力が大幅に向上するというわけでもなく，またモデルの本質的な性質を理解することが難しくなってしまったという面もある．それでも，少なくともマーケット・ポートフォリオだけを利用するよりは信頼性が高いという認識が，学術文献でも，実務家の間でも共通の理解となっていると言ってよいだろう．

マルチファクター・モデルについての研究は，実証面のみにとどまらず，理論面でも様々な取り組みがなされてきたが，ここでは特に Merton [1973] による連続時間モデルにおける資産価格モデル (Intertemporal CAPM, ICAPM) に注目しよう．このモデルは多期間における意志決定問題にもとづいて資産価格モデルを導いた，という特徴を持つ．これによると，投資家は（通常の一期間モデルにおける投資家のように）資産のリスク・リターンの関係に注意を払うだけでなく，将来の消費・投資機会の変化に対するヘッジのためにも資産を保有する動機があることが明らかにされている．具体的には，最適ポートフォリオは通常の平均分散ポートフォリオに加えて，消費・投資機会の変動を表す状態変数の動きに対するヘッジング・ポートフォリオを保有することが示された．さらに，市場均衡における資産価格のモデルとして，通常のマルチファクター・モデルと同様な価格式が導かれることが示されている．したがって，マルチファクター・モデルは多期間，もしくは連続時間モデルにおける資産価格モデルと考えることもできるのである．

この結果はマルチファクター・モデルを利用した資産運用問題について重要な意味をもつ．すなわち，多期間問題に直面する投資家にとっての最適ポートフォリオは，一期間モデルの解として導かれる平均分散ポートフォリオとは異なるということである．言い替えると，多期間問題に直面する投資家が各期ごとに一期間問題を繰り返し解く，いわゆる近視眼的な行動をとることは最適ではない．また投資家の実際の行動について考えてみても，一期間モデルよりも多期間，もし

* 一橋大学大学院国際企業戦略研究科．(Graduate School of International Corporate Strategy, Hitotsubashi University. E-mail: thonda@ics.hit-u.ac.jp

くは連続時間モデルにおける最適ポートフォリオ問題に直面していると考える方が自然である．例えば年金基金の運用などの場合には，資産の運用期間はかなり長い期間が想定される．また，短期的な運用パフォーマンスと報酬がリンクしているようなファンド・マネージャーにしても，ひとつひとつの取引が評価の対象になるというわけではなく，ある程度の期間の間のパフォーマンスが問題になるのであって，市場環境の変化にともなってリバランスをすることをあらかじめ想定しているという点からすれば，多期間問題に直面していると考えてよいだろう．

多期間，もしくは連続時間モデルにおける最適消費・ポートフォリオ問題の歴史は古く，Samuelson [1969], Merton [1969,71] にまで遡ることができる．その後，多くの理論研究が行なわれているが，実際に最適解を導出することは一般には解析的にも，数値的にも難しい．特に実務上で要請されるような複雑な問題を設定した場合，最適化問題としても複雑な問題となるため，最適解を求めることは著しく困難になり，実務上でこのようなアイデアが利用されることは少なかった．一方で，特に 80 年代以降，コンピュータの計算処理速度の向上や，市場データの整備を背景に多くの実証分析が行なわれた．それらの多くは，市場における投資機会が変動していることを指摘している．GARCH などの手法を用いたボラティリティの変動モデルの成功はその好例であるし，マルチファクター・モデルとの関係でいえば，Chen/Roll/Ross [1986], Fama/French [1996] のように，マーケット・ポートフォリオ以外のファクターによるリターンの説明力を指摘する文献が数多く発表された．すでに指摘したように，投資の機会集合が変動する場合には，投資家はその変動に対するヘッジのために資産を保有するから、（一期間の）平均分散ポートフォリオは最適ポートフォリオとはならない．

ここまでの議論を整理すると，次のようになるだろう．実証研究では投資機会が変動するという結果が認識されており，理論的には一期間の問題から得られる最適解は，投資家の直面している多期間の問題の解とはならないことが明らかになっている．ところが，実際に多期間の最適化問題の解を利用可能な形で得ることは難しいため，理論的には正しい方法ではないことが分かっているものの，実際には近視眼的に行動することを想定する一期間問題から得られる解を利用するしかない．こういった状況を踏まえて，多期間問題から得られる解がどのような性質をもつのかを明らかにしようとする研究が進められてきている．例として，Brandt [1999], Brennan/Schwartz/Lagnando [1997], Campbell/Viceira [1999], Lynch [1998], Xia [2001] などがあげられる．

この論文の目的は，以上のような経緯を踏まえ，マルチファクター・モデルにおける資産運用問題を連続時間モデルの視点から検討することである．その準備段階として，Fama [1996] に注目しよう．Fama はこの論文で，各投資家が Markowithz[1959] の平均分散モデルに直面すると仮定することから CAPM が導かれたことに着目し，どのような投資家を想定すればマルチファクター・モデルが導かれるのかを議論している．具体的には，平均分散の意味で効率的なポートフォリオと CAPM が対応するのに対し，マルチファクター・モデルにおける効率的なポートフォリオとして，次のようなものを考えれば，それらと ICAPM との対応がとれるとしている．マルチファクター・モデルにおける効率性として実際に考えられているのは，期待リターンとファクター・エクスポージャーの値を所与としながら，分散を最小化する（multifactor-minimum-variance）ポートフォリオと，分散とファクター・エクスポージャーの値を所与としながら，期待リターンを最大化する（multifactor-efficient）ポートフォリオである．ICAPM で想定されている多期間問題に直面する投資家を，簡単な一期間問題に直面する投資家としてとらえ直した点で，Fama [1996] は興味深い．また，ファクターに対するエクスポージャーを調整するという行動が，マルチファクター・モデルを利用した運用において，実際に利用されていることにも注目すべきである．いわゆる特定のファクターに対して「ティルト」させるというのがこれにあたる．

では，特定のファクターに対するエクスポージャーの値は，どのように決められるのであろうか．平均分散問題においては，例えば分散の値を決めれば，それに対応して効率的なポートフォリオの中から期待リターンが決まる．したがって，どのようなポートフォリオの分散を指定するかは，投資家の危険回避度から決められると考えられる．一方で，ファクター・エクスポージャーについては，この点はそれほど自明ではない．この論文では連続時間モデルの枠組から，マルチファクター・モデルを利用した資産運用問題を考え，特にファクターに対するエクスポージャーの値を連続時間モデルの枠組から考察したい．以下，次節では，一期間モデルにおけるマルチファクター・モデルを整理し，3 節で連続時間モデルにおける最適ポートフォリオの一般的な取り扱いについて整理する．4 節で連続時間モデルにおけるマルチファクター・モデルを扱い，アペンディクスの離散時間モデルにおけるマルチファクター・モデルと対比する．5 節でマルチファクター・モデルにおける最適ポートフォリオの性質について分析する．

2 一期間モデルにおけるマルチファクター・モデル

この節では離散時間モデルにおける標準的なマルチファクター・モデルを考え，(一期間の) 最適ポートフォリオの性質について議論する．特に標準的な平均分散問題に加えて，ファクターに対するエクスポージャーについての制約条件が課されるような問題を考察し，その問題についての最適ポートフォリオを分析する．この節で得られる最適ポートフォリオは，以下の節で分析される連続時間モデルにおけるポートフォリオと比較され，分析の上でのベンチマークとなる．

この節では離散時間モデルを扱い，次節以降では連続時間モデルを扱うため，変数の記号を注意深く用いる必要がある．離散時間モデルにおける変数と，連続時間モデルにおける変数を区別するために，離散時間モデルにおける変数には立体の文字を用い，連続時間モデルにおける変数には斜字体を用いる．例えば，証券のリターンを表す変数として，離散時間モデルを用いるこの節では r を用いるが，連続時間モデルを用いる次の節からは r を用いることにする．

投資の対象となる証券として，N 種類の証券があり，その t 時点における証券のリターンからなるベクトルを $\mathrm{r}_t = (\mathrm{r}_{1t}, \ldots, \mathrm{r}_{Nt})$ とする．また，K 種類の状態変数が存在し，その t 時点における変数の値を $\mathrm{x}_t = (\mathrm{x}_{1t}, \ldots, \mathrm{x}_{Kt})$ とする．以下，この節では，一期間モデルを考えるため，時間を示す添字 t は省略する．単純化のため，r と x は多変量正規分布に従うものと仮定しよう．また，状態変数である x は一般性を失うことなく，平均がゼロであると仮定しておく．このとき，N 種類の証券を組み合わせて構成されるポートフォリオのリターン r_p と x も多変量正規分布に従う．したがって，ポートフォリオのリターン r_p を以下のように，線形回帰の式で表すことができる．

$$\mathrm{r}_p = \mathrm{E}[\mathrm{r}_p] + \sum_{k=1}^{K} \beta_{pk}\mathrm{x}_k + \epsilon_p, \quad \mathrm{E}[\epsilon_p] = 0, \quad \mathrm{Cov}[\epsilon_p, \mathrm{x}_k] = 0, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{1}$$

ただし，$\beta_p = (\beta_{p1}, \ldots, \beta_{pK})$ は回帰係数として，以下のように与えられる．

$$\beta_p = [\mathrm{Cov}[\mathrm{x}, \mathrm{x}]]^{-1}\,\mathrm{Cov}[\mathrm{x}, \mathrm{r}_p].$$

ここで，$\mathrm{Cov}[\mathrm{x}, \mathrm{x}]$ は $\mathrm{Cov}[\mathrm{x}_k, \mathrm{x}_{k'}]$ を (k, k') 成分にもつ $K \times K$ 行列，$\mathrm{Cov}[\mathrm{x}, \mathrm{r}_p]$ は $\mathrm{Cov}[\mathrm{x}_k, \mathrm{r}_p]$ を第 k 成分にもつ $K \times 1$ ベクトルである．

このモデルにおいて，ポートフォリオのリターンは，1. 期待リターン $\mathrm{E}[\mathrm{r}_p]$, 2. リターンの分散 $\mathrm{Var}[\mathrm{r}_p]$, 3. リターンと状態変数の共分散 $\mathrm{Cov}[\mathrm{r}_p, \mathrm{x}]$ によって決まることがわかる．さらに，$\mathrm{Cov}[\mathrm{x}, \mathrm{x}]$ はポートフォリオの選択に依存しないから，(1) より，これは $\mathrm{E}[\mathrm{r}_p]$, $\mathrm{Var}[\mathrm{r}_p]$, β_p を決めることと同じである．したがって，投資家は資産の組み合わせを選択することによって，ポートフォリオの期待リターン，分散，そして各状態変数に対するエクスポージャー β_p を調整することによって，リターンの分布特性を決定することができる．

第 i 証券のリターン r_i も，多変量正規分布の仮定により

$$\mathrm{r}_i = \mathrm{E}[\mathrm{r}_i] + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\mathrm{x}_k + \epsilon_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

と書くことができる．r_i を第 i 成分にもつ N ベクトルを r, β_{ik} を (i, k) 成分にもつ $N \times K$ 行列を β, ϵ_i を第 i 成分にもつ N ベクトルを ϵ とすると，証券のリターンは

$$\mathrm{r} = \mathrm{E}[\mathrm{r}] + \beta\mathrm{x} + \epsilon$$

で表される．以下では，単純化のため，安全資産が存在するものとし，そのリターンを r_f とする．第 i 証券への投資比率を φ_i とし，φ_i を第 i 成分に持つ N ベクトルを φ とすると，

$$\mathrm{r}_p = \varphi^\top E[\mathrm{r}] + \varphi^\top\beta\mathrm{x} + \varphi^\top\epsilon + (1 - \varphi^\top \mathbf{1})\mathrm{r}_f$$

である．ここで 1 は各成分が 1 であるベクトルである．このとき，ポートフォリオの期待リターンと分散はそれぞれ

$$\mathrm{E}[\mathrm{r}_p] = \varphi^\top\mathrm{E}[\mathrm{r}] + (1 - \varphi^\top\mathbf{1})\,\mathrm{r}_f$$

$$\mathrm{Var}[\mathrm{r}_p] = \varphi^\top\mathrm{Cov}[\mathrm{r}, \mathrm{r}]\,\varphi$$

で与えられる．ただし，$\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]$ は $\mathrm{Cov}[\mathrm{r}_i,\mathrm{r}_j]$ を (i,j) 成分に持つ $N\times N$ 行列である．また，ポートフォリオのファクターに対するエクスポージャー，すなわちポートフォリオがファクターの変動によるリスクにさらされる程度は，$\varphi^{\top}\beta$ で与えられる．

ここで次のような，与えられた期待リターン $\overline{m}$，ファクター・エクスポージャー $\overline{b}$ を実現させながら，ポートフォリオの分散を最小化するという問題を考えよう．ここで $\overline{b}$ は $\overline{b}_k$ を第 k 要素にもつ $(1\times K)$ 行列である．

$$\min \varphi^{\top}\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\varphi \tag{2}$$
$$\mathrm{s.t.}\ \varphi^{\top}\mathrm{E}[\mathrm{r}]+(1-\varphi^{\top}1)\mathrm{r}_f=\overline{m} \tag{3}$$
$$\varphi^{\top}\beta=\overline{b}. \tag{4}$$

ここで制約条件 (4) がなければ，この問題は通常の平均分散分析に帰着する．ここではそれに加えて，ポートフォリオのファクター・エクスポージャーを決められた値 $\overline{b}$ にすることを要求している．Fama [1996] は問題 (2), (3), (4) で与えられる解をマルチファクター・最小分散ポートフォリオ (Multifactor-Minimum-Variance) と呼んでいる．

この問題のラグランジアンは，

$$G=\varphi^{\top}\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\varphi+2\lambda\left(\overline{b}-\varphi^{\top}\beta\right)+2\gamma\left(\overline{m}-\varphi^{\top}\mathrm{E}[\mathrm{r}]-(1-\varphi^{\top}1)\mathrm{r}_f\right)$$

で与えられる．ただし，λ と γ はラグランジュ乗数で，λ は λ_k を第 k 要素に持つ K ベクトルである．一階の条件は

$$\frac{\partial G}{\partial\varphi}=2\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\varphi-2\beta\lambda-2\gamma(\mathrm{E}[\mathrm{r}]-\mathrm{r}_f)=0$$

である．したがって，最適ポートフォリオ φ は

$$\varphi=\gamma(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}(\mathrm{E}[\mathrm{r}]-\mathrm{r}_f)+(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}\beta\lambda \tag{5}$$

となる．ここで，制約条件 (4) がない場合の最適解は $\gamma=0$ とおいてラグランジアンの一階の条件をとれば得られ，また制約条件 (3) がない場合の最適解は $\lambda=0$ と置くことによって得られる．したがって，ラグランジュ乗数 λ，γ の値で調整すれば，通常の平均分散分析から得られるポートフォリオは

$$\varphi=\gamma(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}(\mathrm{E}[\mathrm{r}]-\mathrm{r}_f)$$

と表すことができる．また，期待リターンに対する制約を置かずに，ファクターに対するエクスポージャー $\overline{b}$ を実現しながら分散を最小にするようなポートフォリオは

$$\varphi=(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}\beta\lambda$$

と表すことができる．

最適ポートフォリオの性質をさらに分析するために，次のように定義される $\mathrm{h}=(\mathrm{h}_k)_{k=1,\cdots,K}$ を考えよう．

$$\mathrm{h}_k=[(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}\beta\mathrm{Cov}[\mathrm{x},\mathrm{x}]]\ の\ k\ 列目. \tag{6}$$

つまり，h_k は (5) 式の右辺第 2 項を

$$\left[(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}\beta\mathrm{Cov}[\mathrm{x},\mathrm{x}]\right]\times\left[(\mathrm{Cov}[\mathrm{x},\mathrm{x}])^{-1}\lambda\right]$$

と書き直したものである．よく知られているように，h_k を基準化して得られるポートフォリオ，すなわち $\mathrm{h}_k/1^{\top}\mathrm{h}_k$ は，そのリターンが状態変数 x_k と最も大きな相関を持つようなポートフォリオで，その意味でファクターをミミックするポートフォリオ (factor mimicking portfolio) と呼ばれる．ここで 1 はすべての要素が 1 からなるベクトルである。第 k ファクターをミミックするポートフォリオのリターンを $\mathrm{r}_k^x=(\mathrm{h}_k\cdot\mathrm{r})/1^{\top}\mathrm{h}_k$ で表し，$\mathrm{r}^x=(\mathrm{r}_1^x,\ldots,\mathrm{r}_K^x)$ とする．すなわち，r^x は各ファクターをミミックするポートフォリオのリターンからなるベクトルである．

同様に h_{K+1} を

$$\mathrm{h}_{K+1}=(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}(\mathrm{E}[\mathrm{r}]-\mathrm{r}_f) \tag{7}$$

と定義する．すなわち，$\mathbf{h}_{K+1}$ は (5) 式の右辺第 1 項であり，これを基準化して得られるポートフォリオ $\mathbf{h}_{K+1}/\mathbf{1}^{\mathsf{T}}\mathbf{h}_{K+1}$ はファクター・エクスポージャーに対する制約条件がない場合の危険資産に対する配分比率であるから，CAPM におけるマーケット・ポートフォリオに相当する．

さらに

$$\mathrm{q}_k = \left[(\mathrm{Cov}[x,x])^{-1}\lambda \text{の } k \text{ 番目の要素}\right],$$

$\mathrm{q}_{K+1} = \gamma$ とおけば，最適ポートフォリオは

$$\varphi = \sum_{k=1}^{K+1} \mathrm{q}_k \mathbf{h}_k \tag{8}$$

という簡単な形に書くことができる．すなわち，問題 (2), (3), (4) に対する最適ポートフォリオは K 個のファンド $\mathbf{h}_k$, $k = 1,\dots,K$, と，$\mathbf{h}_{K+1}$ の合計 $K+1$ 個の線形結合として与えられ，そのウェイトは q_k, $k = 1,\dots,K+1$ によって与えられる．ここで注目すべきことは，問題 (2), (3), (4) に直面する投資家は，ポートフォリオの期待リターン $\overline{m}$，ファクターに対するエクスポージャー $\bar{b}$ の値に関わらず，$K+1$ 個の共通なファンドを保有することである．制約条件を決める $\overline{m}$ と $\bar{b}$ の値は，それぞれのファンドをどのように組み合わせるか，というウェイトである q_k, $k = 1,\dots,K+1$, にのみ反映されている．

通常の平均分散問題，すなわち制約条件 (3) のもとで，分散 (2) を最小化する問題において，投資家のリスクに対する態度はポートフォリオの期待リターンである $\overline{m}$ の水準に集約されている．例えば，他の条件を一定として，$\overline{m}$ の水準が高ければその投資家はリスク許容度が高いと考えられる．その意味で，平均分散問題は非常に自然な解釈が与えられる問題である．

一方で，平均分散問題に加えて，ポートフォリオに対するエクスポージャーを特定の値に制限するという制約条件 (4) を課した最適化問題はどのように解釈することができるのであろうか．もし投資家の選好がリターンの一次と二次のモーメント，すなわちリターンの期待値と分散にしか依存しないような場合には，ポートフォリオが各ファクター・リスクにどの程度さらされているかは問題ではなく，あくまでもポートフォリオ全体の期待リターンと分散のみが問題になるはずである．したがって，ポートフォリオのファクターに対するエクスポージャーを制約するという行動は，投資家の選好がリターンの三次以上のモーメントにも依存するなど，何らかの状況を仮定しないことには，問題 (2), (3), (4) を解釈することはできないであろう．

ファクター・エクスポージャーを特定化するということの正確な意味はともかくとして，マルチファクター・モデルはいくつかの理由で，資産運用の実務上の応用では非常に便利である．その一つの理由は問題 (2), (3), (4) を考えることによって，ポートフォリオのファクターに対するエクスポージャーをコントロールし，それによって投資家の予測をポートフォリオに反映できることである．たとえば，ファクターの一つとして長期金利と短期金利の差を考えてみよう．ある投資家が長短金利差が上昇し，ファクターの値が大きくなるだろう，という予測を持っている場合，そのファクターに対するエクスポージャーを正にしておけば，ファクターの値が大きくなった場合に，ポートフォリオのリターンに対して正の効果が実現するはずである．逆に，長短金利差が下落し，ファクターの値が小さくなるだろう，という予測を持っている場合には，そのファクターに対するエクスポージャーを負の値にしておけば，実際に長短金利差が小さくなった時に正のリターンが得られる．このように，マルチファクター・モデルを利用することによって，マクロ経済変数や株式の業種別リターンなどをファクターとして用いることができ，投資家はポートフォリオ構築にファクターの動きに対する予測を反映させることができる．一般に、構成するポートフォリオのリターン特性を把握することは難しいが、マルチファクター・モデルを利用することによって、マクロ経済変数などの変動予測が行いやすい変数を通じて、ポートフォリオの特性をコントロールできるのである。

また，マルチファクター・モデルは運用パフォーマンスの分析においても威力を発揮する．特に大規模なポートフォリオを運用している場合，取り扱い銘柄が数千に及ぶようなことも少なくない．その場合，実際にポートフォリオから得られたパフォーマンスを評価することは容易ではない。例えば，ポートフォリオのリターンが低かった場合，それはどのようなポートフォリオを組み，どのような市場環境の下で，なぜ低いパフォーマンスになってしまったのかを分析することは難しい。マルチファクターモデルを用いると，特定のファクターに対する感応度が高いポートフォリオを構成し，そのファクターの変動によってポートフォリオ全体のパフォーマンスが悪かった，というような解釈を与えることができる．

これは大規模な資産の運用を委託されている運用担当者と，運用の委託者との間での意志疎通を図る際には極めて便利なツールとなる．

このように便利な性質を持つマルチファクター・モデルであるが，上で指摘したように，どの程度のファクター・エクスポージャーにすればよいのか，という問題は自明ではない．実際には，ポートフォリオ管理のソフトウェアを利用して，ファクター・エクスポージャーを指定し，同時にリターンの分布特性を分析するなどしながら，投資家の経験や勘によってエクスポージャーを決めることが多いようである．特定のファクターについてのエクスポージャーを調整すれば，ポートフォリオ全体のリスクとリターンの構造が変化するのであるから，投資家のリスク回避度や運用上の制約が，ファクター・エクスポージャーにどのように影響するのかを理論的に検討しておくことは興味深い問題である．

アペンディクスでは，問題 (2)，(3)，(4) から，良く知られたマルチファクター・モデルにおけるリターンの関係式

$$\mathrm{E}[\mathrm{r}_i] - \mathrm{r}_f = \beta_{iM}(\mathrm{E}[\mathrm{r}_M] - \mathrm{r}_f) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}(\mathrm{E}[\mathrm{r}_k^x] - \mathrm{r}_f)$$

が得られることを導出している．次節以降では連続時間モデルの枠組で，対応するリターンのモデルの下での最適ポートフォリオを分析する．

3 連続時間モデルにおける最適ポートフォリオ

この節では連続時間モデルにおけるマルチファクター・モデルを考え，最適ポートフォリオの一般的な性質を分析する．ここでは $i = 1, \ldots, N$ 種類の危険資産についての K ファクターモデルを考える．ファクターとしての状態変数を $x = (x_1, \ldots, x_K)$ とする．ここで，x_k，$k = 1, \ldots, K$，は確率過程で，次の確率微分方程式

$$dx_k(t) = \mu_k(t)\,dt + \sigma_k(t)\,dB^x(t)$$

を満たすと仮定する．ここで，B^x は K 次元のブラウン運動で，$\sigma_k = (\sigma_{k1}, \ldots, \sigma_{kK})$ は $1 \times K$ ベクトルである．特に $\mu_k(t) = 0$ とすると，ファクターの Δt の間の変化 Δx_k は平均 0 の正規分布に従うことになる．実務上の応用では，株式などの危険資産のリターンとの関係が強いと考えられるような様々な変数を合成し，ディスクリプターと呼ばれる変数を作り，それを正規化することによって，ファクターが平均ゼロの正規分布に従う，というモデル化が行なわれることがある．

資産 i の価格 S_i は次の確率微分方程式

$$dS_i(t) = S_i(t)\mu_i(t)\,dt + S_i(t)\sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} x_k(t)\,dt + S_i(t)\sigma_i(t)\,dB^S(t)$$

の解として与えられるものとする．ここで B^S は N 次元のブラウン運動で，$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{iN})$ は $1 \times n$ ベクトルである．離散時間モデルと同様な価格式を得るためには，資産のリターンの確率過程を考えると便利である．ここでは，R_i を資産 i の累積リターン過程，すなわち，

$$\begin{aligned} dS_i(t) &= S_i(t)\,dR_i(t) \\ dR_i(t) &= \mu_i(t)\,dt + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} x_k(t)\,dt + \sigma_i(t)\,dB^S(t) \end{aligned}$$

と定義し，さらにその変化率である収益率過程 r_i を，$R_i(t) = \int_0^t r_i(s)\,ds$, $dR_i(t) = r_i(t)\,dt$ で定義すると，

$$r_i(t)\,dt = \mu_i(t)\,dt + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} x_k(t)\,dt + \sigma_i(t)\,dB^S(t)$$

となる．離散時間モデルとの類推で考えると，

$$r_i(t)\,\Delta t = \mu_i(t)\,\Delta t + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} x_k(t)\,\Delta t + \sigma_i(t)\,\Delta B^S(t)$$

となり，前節の離散時間モデルの記号を使って書き直すと，

$$\mathrm{r}_i(t) = m_i + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} \mathrm{x}_k(t) + \varepsilon, \quad \mathrm{x}_k \sim N(0, \sigma_k^2), \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma_i^2)$$

と対比されることがわかる．

連続時間モデルに戻って，危険資産の価格過程を $S = (S_1, \ldots, S_N)$ とすると，

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)(\mu(t) + \beta\mu^x(t))\,dt + S(t)\sigma^S(t)\,dB^S(t) + S(t)\beta\sigma^x(t)\,dB^x(t) \\ &= S(t)(\mu(t) + \beta\mu^x(t))\,dt + S(t)\sigma(t)\,dB(t) \end{aligned}$$

となる．ここで，$\beta = (\beta_{ik})$ は $N \times K$ 行列，$\sigma^S = (\sigma_i)$ は $N \times N$ 行列，$\sigma^x = (\sigma_k)$ は $K \times K$ 行列である．また，

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^S & \beta\sigma^x \end{pmatrix}$$

は $N \times (N+K)$ 行列，$B = (B_1^S, \ldots, B_N^S, B_1^x, \ldots, B_K^x)$ は $N+K$ 次元のブラウン運動である．さらに，x は

$$dx(t) = \mu^x(t)\,dt + \begin{pmatrix} 0 & \sigma^x \end{pmatrix} dB(t)$$

の解として与えられる．ここで $(0\ \sigma^x)$ は $K \times (K+N)$ 行列，μ^x は μ_k を k 番目の要素にもつ K ベクトルである．

さらに，安全資産が存在すると仮定し，その利子率を r_f とする．投資家は各時点において，自らの資産を N 種類の危険資産，および安全資産に投資する．時点 t における消費率過程を $c(t)$ と表すことにし，各時点での危険資産への投資比率を $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ と表し，投資家の資産総額を W で表すことにすれば，W の動きは

$$dW(t) = [W(t)[\varphi(t) \cdot (\mu(t) + \beta\mu^x(t) - r_f(t)) + r_f(t)] - c(t)]\,dt + W(t)\varphi(t)^\top \sigma(t)\,dB(t) \tag{9}$$

で与えられる．投資家は各時点でどの程度の消費を行なうか，またどのように資産を危険資産と安全資産に振り分けるかを決定し，各時点での消費と，最終時点において実現される資産総額から効用を得るものとしよう．特に，投資家の目的関数は，期待効用関数 $E[\int_0^T u(c_t)\,dt + F(W_T)]$ によって与えられると仮定する．すなわち，投資家の最適化問題は，$t = 0$ における資産水準 w_0 が与えられたもとで

$$\begin{array}{ll} \sup_{c,\varphi} & E\left[\int_0^T u_t(c_t)\,dt + u_T(W_T)\right] \\ \text{s.t.} & W(0) = w_0 \\ & (9), \quad W(t) \geq 0 \end{array} \tag{10}$$

で与えられる．すなわち，目的関数を最大化するような確率過程 c と φ を選択する確率制御問題である．

この問題の解を分析するために，次の Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程式を考えよう．

$$\sup_{c \in \mathbb{R}_+, \varphi \in \mathbb{R}^N} \mathcal{D}J(w, x, t) + u_t(c) = 0,$$

$$J(w, x, T) = u_T(w)$$

である．ここで $\mathcal{D}J(w, x, t)$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{D}J(w, x, t) &= J_w(w[\varphi(\mu + \beta\mu^x - r_f) + r_f] - c) + J_x\mu^x + J_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathrm{trace}\left[\begin{pmatrix} w\varphi^\top\sigma \\ (0 \quad \sigma^x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w\varphi^\top\sigma \\ (0 \quad \sigma^x) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} J_{ww} & J_{wx} \\ J_{xw} & J_{xx} \end{pmatrix}\right] \end{aligned}$$

で与えられ，$J_{.}$, $J_{..}$ はそれぞれ関数 J の添字についての偏微分を意味する．また，trace は行列の対角成分の和をとる操作である．HJB 方程式の解が実際に存在すると仮定すれば，関数 J によって，問題 (10) の最適解における目的関数の値，すなわちバリュー関数 $V(w, x)$ の値が

$$V(w, x) = J(w, x, 0)$$

によって与えられる．言い替えると，$V(w, x)$ の値は $t = 0$ において資産水準が w, 状態変数が x であるときに，各時点 $t \in [0, T]$ において，投資家が最適な行動をとった場合に得られる期待効用の値である．

HJB 方程式の一階の条件から，t 時点における最適消費と最適ポートフォリオは，

$$u_t'(c) = J_w \tag{11}$$

$$\varphi = -\frac{1}{J_{ww}w}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\left[J_w(\mu - r_f) + \beta\sigma^x(\sigma^x)^{\top}J_{wx}\right] \tag{12}$$

で与えられることがわかる．すなわち，最適ポートフォリオ φ は，二つの部分にからなる．第一項目の

$$-\frac{1}{J_{ww}w}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}J_w(\mu - r_f) \tag{13}$$

は，瞬間的な意味での平均分散ポートフォリオで，一期間モデルにおける平均分散ポートフォリオに対応する．第二項目の

$$-\frac{1}{J_{ww}w}(\sigma\sigma^{\top})^{-1}\beta\sigma^x(\sigma^x)^{\top}J_{wx} \tag{14}$$

は，各状態変数の変化によって生じる投資機会の変動をヘッジのために保有されるポートフォリオで，ヘッジング・ポートフォリオと呼ばれる．(Merton [1973].) 効用関数の形を特定化したり，モデルを単純化することによって，最適ポートフォリオの形を探しだすことができる場合もあるが，一般に最適ポートフォリオを明示的な形で求めるのは難しい．特にヘッジング・ポートフォリオの部分は J_{wx} という項を含んでおり，最適な行動をとることによって得られる（資産水準に対する）限界効用が，状態変数の値の変化によってどのように影響をうけるのかを求める必要がある．したがって，状態変数の動きと資産価格の変動の間にどのような関係があるかを詳しく分析する必要があり，一般的には非常に困難な作業である．

以下の節では，とくにヘッジング・ポートフォリオの性質に注目しながら，マルチファクター・モデルにおける最適ポートフォリオの分析を行なうが，まず次節でマルチファクターモデルにおける期待リターンのモデルを導出し，離散時間モデルとの対比を行なう．

4 連続時間モデルにおける期待リターン

この節では，連続時間における期待リターンのモデルとして状態価格ベータ・モデルをとりあげ，離散時間モデルとの関係を確認すると同時に，マルチファクター・モデルにおける状態価格デフレーターの性質を明らかにする．前節と同様に $i = 1, \ldots, N$ 種類の危険資産についての K ファクターモデルを考える．N 資産の価格過程

$$dS(t) = S(t)(\mu(t) + \beta\mu^x(t))\,dt + S(t)\sigma(t)\,dB(t)$$

と安全資産利子率 r_f が与えられた下で，状態価格デフレーター π が

$$d\pi_t = \mu_\pi(t)\,dt + \sigma_\pi(t)\,dB(t)$$

で与えられたと仮定する．すなわち π は，$S_i^\pi = S_i\pi$ で定義される確率過程 S_i^π がマルチンゲールとなるような確率過程である．定義により，S_i^π のドリフトはゼロであるから，伊藤のレンマより，

$$0 = \mu_\pi S_i(t) + S_i(t)\mu_S(t)\pi(t) + S_i(t)\sigma_i(t)\cdot\sigma_\pi(t)$$

となり，

$$\frac{S_i(t)\mu_i(t)}{S_i(t)} = -\frac{\mu_{\pi(t)}}{\pi(t)} - \frac{S_i(t)\sigma_i(t)\cdot\sigma_\pi(t)}{\pi(t)S_i(t)}$$

が成立する．資産 i の累積リターン過程を R_i とすると，それは

$$dR_i(t) = \mu_i^R(t)\,dt + \sigma_i^R(t)\,dB(t) = \frac{S_i(t)\mu_i(t)}{S_i(t)}\,dt + \frac{S_i(t)\sigma_i(t)}{S_i(t)}\,dB(t)$$

を満たす．状態価格デフレターの定義より，安全資産利子率 r_f は

$$r_f(t) = -\frac{\mu_\pi(t)}{\pi(t)}$$

となることが示される．したがって

$$\mu_i^R(t) - r_f(t) = -\frac{1}{\pi(t)}\sigma_i^R(t)\cdot\sigma_\pi(t) \tag{15}$$

が成立する．

各時点 t において $\sigma(t)$ の各列が一次独立であると仮定すれば，

$$(\sigma_\pi(t))^\top = (S(t)\sigma(t))^\top(\phi_1(t)+\cdots+\phi_K(t)) + \varepsilon(t), \quad \sigma(t)\varepsilon(t) = 0$$

となるような N ベクトル $\phi_k(t)$, $k = 1,\ldots,K$, が存在する．すなわち，$\sigma_\pi(t)$ から $S(t)\sigma(t)$ への射影を考えればよい．これを利用して (15) を書き換えると

$$\mu_i^R(t) - r_f(t) = -\frac{1}{\pi(t)}\sigma_i^R(t)\cdot\left[(S(t)\sigma(t))^\top(\phi_1(t)+\cdots+\phi_K(t))\right] \tag{16}$$

が成り立つ．ここで，各資産をベクトル ϕ_k の各要素の単位だけ保有するような戦略を考えよう．各資産をベクトル ϕ_k に応じて保有したときの資産総額を W_k^* とすると，その値は

$$W_k^*(t) = \phi_k(t)\cdot S(t)$$

で与えられる．資産総額 W_k^* の累積リターン過程 R_k^* は

$$R_k^*(t) = \int_0^t \frac{1}{W_k^*(s)}dW_k^*(s)$$

で定義され，R_k^* の拡散項 σ_k^* は

$$\sigma_k^* = \frac{(S(t)\sigma(t))^\top\phi_k}{W_k^*(t)}$$

となる．そこで (16) より，

$$\begin{aligned}
\mu_i^R(t) - r(t) &= -\frac{1}{\pi(t)}\sigma_i^R(t)\cdot\left[\begin{pmatrix}W_1^*(t) & \ldots & W_K^*(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}\right] \\
&= \sigma_i^R(t)\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}^\top\left(-\frac{1}{\pi(t)}\right)\begin{pmatrix}W_1^*(t) & \ldots & W_K^*(t)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が導かれる．さらに危険資産を θ_k で保有したときの資産総額 W_k^* の累積リターン過程のドリフトを μ_k^R とすれば，

$$\mu_k^R(t) - r_f(t) = \sigma_k^R(t)\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}^\top\left(-\frac{1}{\pi(t)}\right)\begin{pmatrix}W_1^*(t) & \ldots & W_K^*(t)\end{pmatrix}$$

となる．したがって，

$$\left(-\frac{1}{\pi(t)}\right)\begin{pmatrix}W_1^*(t) & \ldots & W_K^*(t)\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}^\top\right]^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1^*(t) - r_f\\ \vdots \\ \mu_K^*(t) - r_f\end{pmatrix}$$

を利用すると，

$$\begin{aligned}
\mu - r_f &= \sigma\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}^\top\left[\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_1^*(t)\\ \vdots \\ \sigma_K^*(t)\end{pmatrix}^\top\right]^{-1}\begin{pmatrix}\mu_1^*(t) - r_f\\ \vdots \\ \mu_K^*(t) - r_f\end{pmatrix} \\
&\equiv \beta\begin{pmatrix}\mu_1^*(t) - r_f\\ \vdots \\ \mu_K^*(t) - r_f\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり，β をこのように定義すれば通常のマルチファクターモデルが得られることが確認できる．特に資産 i については

$$\mu_i - r_f = \sum_{k=1}^{K} \beta_k(\mu_k^* - r_f)$$

と書くことができ，離散時間モデルとの対応を確認することができる．

5 最適ポートフォリオの性質

この節では，前節までに考えた連続時間のマルチファクター・モデルにおける最適ポートフォリオ問題を，マルチンゲール・アプローチを用いることによって分析する．特に効用関数の形をパワー型に特定化し，確率的流れの手法を利用することによって，最適ポートフォリオの性質を分析する．

5.1 マルチンゲール・アプローチ

資産価格 S が

$$dS(t) = S(t)\,(\mu(t) + \beta\mu^x(t))\,dt + S(t)\sigma(t)\,dB^k(t)$$

で与えられた下で，同値マルチンゲール測度 Q が存在すると仮定する．定義により，Q の下で資産価格 S の確率微分方程式は

$$dS(t) = S(t)r_f(t)\,dt + S(t)\sigma(t)\,d\hat{B}(t)$$

で与えられる．ここで $\hat{B}$ は，

$$\mu(t) + \beta\mu^x(t) - r_f(t) = \sigma(t)\theta(t) \tag{17}$$

を満たす $(N+K)$ ベクトル $\theta(t)$ を使って $d\hat{B}(t) = dB(t) + \theta(t)\,dt$ で定義され，Q の下でのブラウン運動となる．

さらに ξ を

$$\xi(t) = \exp\left[-\int_0^t \theta(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t {\theta_s}^2 ds\right],$$

状態価格デフレーター π を

$$\pi_t = \left(\exp\left[-\int_0^t r_f(s)ds\right]\right)\xi_t \tag{18}$$

によって定義する．伊藤の補題により，ξ と π は

$$d\xi_t = -\xi_t\theta_t dB_t, \qquad d\pi_t = -\pi_t(r_f(t)dt + \theta_t dB_t), \tag{19}$$

$\xi_0 = 1$, $\pi_0 = 1$ を満たす．

以下では，最適ポートフォリオの性質をできるだけ詳しく分析するために，最適化問題を簡略化し，途中期間の消費を考えずに，最終時点での資産水準だけから得られる期待効用の値を最大化するような問題を考える．すなわち，資産水準 W の確率微分方程式は

$$dW(t) = [W(t)(\varphi(t)\cdot(\mu(t) + \beta\mu^x(t) - r_f(t)) + r_f(t))]\,dt + W(t)\varphi(t)^\top\sigma(t)\,dB(t) \tag{20}$$

で与えられ，最適化問題は

$$\begin{array}{ll} \sup_\varphi & E\left[u_T(W_T)\right] \\ \text{s.t.} & W(0) = w_0 \\ & (20), \quad W(t) \geq 0 \end{array} \tag{21}$$

によって定義される．さらに効用関数として，具体的に

$$u_T(w) = \frac{w^\alpha}{\alpha}, \quad \alpha < 1, \quad \alpha \neq 0 \tag{22}$$

を仮定する．マルチンゲール・アプローチを利用すると，状態価格デフレーターを用いて，最適化問題 (10) を

$$\begin{array}{ll} \sup_{Z\in\mathcal{F}_T} & E\left[u_T(Z)\right] \\ \text{s.t.} & E\left[\pi_T Z\right] \leqslant w_0 \end{array} \tag{23}$$

に変換することができる．[2] この問題のラグランジアン $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L}(Z,\lambda) = E\left[\frac{Z^{\alpha}}{\alpha}\right] - \lambda\left(E[\pi_T Z] - w_0\right) \tag{24}$$

となる．ここで $\lambda > 0$ はラグランジュ乗数で，補間的スラック性の条件は $E[\pi_T Z] = w_0$ である．一階の条件を各状態ごとにとると，最適解 Z^* において

$$(Z^*)^{\alpha-1} - \lambda\pi_T = 0$$

となる．したがって，

$$Z^* = (\lambda\pi_T)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \qquad w_0 = E[\pi_T Z^*] = E\left[\pi_T(\lambda\pi_T)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right]$$

となるが，これを λ について解くと最適解におけるラグランジュ乗数 λ^* が

$$\lambda^* = {w_0}^{\alpha-1} E[\pi_T{}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]^{1-\alpha}$$

によって得られることがわかる．よって最適解 Z^* は

$$Z^* = w_0 \frac{\pi_T{}^{\frac{1}{\alpha-1}}}{E[\pi_T{}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]} \tag{25}$$

となる．(25) を問題 (23) の目的関数に代入すると，バリュー関数 $V(w_0, x_0)$ は

$$V(w_0,x_0) = E[u(Z^*)] = \frac{{w_0}^{\alpha}}{\alpha} E[\pi_T{}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]^{1-\alpha} \equiv \frac{w_0^{\alpha}}{\alpha} f(x_0) \tag{26}$$

で与えられることがわかる．ここで関数 f は $E[\pi_T{}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]^{1-\alpha}$ を状態変数 x の初期値 x_0 の関数とみて定義される実数値関数である．

5.2 状態価格デフレーターとミミッキング・ポートフォリオ

以上の議論から分かったように，バリュー関数 V の値を計算するためには，関数 $f(x_0)$ の値，すなわち $E[\pi_T{}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]^{1-\alpha}$ を評価できればよい．この積分値は，モデルが単純な場合には期待値を実際に計算することも可能である．たとえばブラック・ショールズモデルのように，資産価格が幾何ブラウン運動で与えられ，安全資産利子率が一定であるような場合には，状態価格デフレーター π も幾何ブラウン運動になり，積分値の評価も容易である．しかし，資産価格が複雑な確率微分方程式によって与えられている場合などには，積分値を解析的に求めることは難しく，数値計算に頼らざるを得ない場合が多い．具体的には，例えばモンテカルロ・シュミレーションによって π のサンプルパスを発生させ，その平均値を計算することができる．

もう一つの大きな問題点は，π の確率微分方程式が必ずしも一意には決まらないことである．市場が完備である場合には同値マルチンゲール測度が一意に決まり，したがって状態価格デフレーター π も一意に決まるが，市場が完備でない場合には一意性は保証されない．したがって，不完備市場においては，$E[\pi_T{}^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]^{1-\alpha}$ の値を評価する以前の問題として，π が一意に決まらないという問題がある．

前節までで考えたマルチファクター・モデルの場合，ブラウン運動の次元が $N+K$ であるのに対し，危険資産の数は N であるから，市場は完備ではない．具体的には (17) において，σ が $N \times (N+K)$ 行列であるために逆行列がとれず，$N+K$ ベクトル θ が一意に決まらない，ということに表れている．不完備市場における最適ポートフォリオ問題の解を求めること，特に実際に解を明示的に求めることは一般に難しい．連続時間におけるマルチファクター・モデルを用いた最適ポートフォリオを特徴づけるには，この不完備性の問題を何らかの形で避けなければならない．

また，実務でマルチファクター・モデルを用いる場合，投資対象となる資産の総数 N は数千銘柄にものぼることが多い．一方で，ファイナンスの実証研究の結果を総合すると，マルチファクター・モデルにおけるファクターの数としては，5 個か 6 個程度，もしくは高々 10 個程度のファクターを考えれば十分である，というのが多くの先行研究での結論である．[3] したがって典型的なマルチファクター・モデルにおいては，ファクターの数 K に比べると，資産の数 N がかなり大きいことが多い．バリュー関数の計算でモンテカルロ・シュミレーションを利用する場合，数千にも及ぶ変数のパスを発生させてゆくのは計算上のコストが非常に大きく，したがって N 次元のブラウン運動 B^S のサンプル・パスを発

生させるのは，実際には困難である．モンテカルロ・シュミレーションを用いてバリュー関数の値を計算する場合には，この問題も障害となる．

これらの問題に対処するために，(17) で定義される θ を B^S に対応する部分と，B^x に対応する部分に分割し，それぞれ N 次元ベクトル θ^S と，K 次元ベクトル θ^x を考え，(19) を書き換えて，

$$d\pi_t = -\pi_t r_f dt - \pi_t \theta_t^S \, dB_t^S - \pi_t \theta_t^x \, dB_t^x$$

という確率微分方程式を考えよう．資産の数 N が十分に大きければ，APT において，各資産の固有リスクは分散可能であると仮定されるのと同様に，$-\pi_t \theta_t^S \, dB_t^S \approx 0$ と仮定することができる．現在の文脈では，分散効果のために状態価格デフレーターの変動がファクターリスクによってほぼ決まり，各資産の固有リスクによる影響は無視できると仮定することに相当する．このように仮定すれば，数値計算の際に状態価格デフレーターのパスを発生させる必要があるような場合には，

$$d\pi_t = -\pi_t r_f dt - \pi_t \theta_t^x \, dB_t^x \tag{27}$$

に従ってパスを発生させれば，必要な乱数の次元は K で済むため，数値計算を簡略化することができる．

では，ファクターリスクに対する価格を決める θ^x をどのように決めればよいだろうか．実際にポートフォリオの値を計算するためには，さらに仮定を強めた方が便利である．具体的には例えば $\theta^S = 0$ と仮定することができる．APT との関係で考えれば，これはファクター・モデルが近似ではなく，厳密な関係で成り立つことを仮定しているのと同じである．このように仮定すれば，各資産の固有リスクが状態価格デフレターに影響しないだけでなく，θ^x の値も簡単に求めることができる．これを確認するために，状態変数と相関が最も大きくなるようなポートフォリオ，いわゆるミミッキング・ポートフォリオを利用しよう．

ポートフォリオ $h = (h_1, \ldots, h_k)$ を，

$$h_k = \left[(\sigma\sigma^\top)^{-1}\beta\sigma^x(\sigma^x)^\top \text{の } k \text{ 列目}\right] \tag{28}$$

によって定義する．ここで $\sigma\sigma^\top$ は (i,j) 成分に $\mathrm{Cov}(r_i, r_j)$ を持つ，資産のリターンの共分散行列と考えることができ，$\beta\sigma^x(\sigma^x)^\top$ は資産 i と状態変数 k の共分散を第 (i,k) 成分に持つ $(N \times K)$ 行列と考えられる．したがって，h_k を基準化したポートフォリオ $h_k/1^\top h_k$ は状態変数 X_k と最も相関が大きいポートフォリオで，この意味で h_k は状態変数 X_k のミミッキング・ポートフォリオと考えることができる．また離散時間モデルとの類推でいえば，この h_k は (6) の $\mathbf{h}_k$ と同じものである．

ミミッキング・ポートフォリオ h_k について，

$$\mu_k - r_f = \frac{1}{1^\top h_k} h_k^\top (\mu + \beta\mu^x - r_f), \qquad \beta_k = \frac{1}{1^\top h_k} h_k^\top \beta$$

と定義する．すなわち，$\mu_k - r_f$ はミミッキング・ポートフォリオの超過リターン，β_k はミミッキング・ポートフォリオのファクターに対する感応度を表す．すると，(17) と $\theta^S = 0$ という仮定から，

$$\mu_k - r_f = \beta_k \sigma^x \theta^x$$

となる．したがって，θ^x の値は

$$\theta^x = \left[\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \vdots \\ \beta_K\end{pmatrix} \sigma^x\right]^{-1} \begin{pmatrix}\mu_1 - r_f \\ \vdots \\ \mu_K - r_f\end{pmatrix} \tag{29}$$

によって求めることができる．以上の議論より，(29) によって θ^x の値を決め，(27) に従って状態価格デフレーター π についてモンテカルロ・シミュレーションを行なえば，(26) 式のバリュー関数 $V(w_0, x_0)$ の値を数値計算することができる．

5.3 確率的流れの応用とヘッジング・ポートフォリオの性質

(12) を見ればわかるように，最適ポートフォリオの計算のためには，バリュー関数の w と x に関する二階微分を計算する必要がある．特に効用関数がパワー型であるときには，バリュー関数が変数について分離できるため，(12) と (26)

$$-\frac{J_{wx_k}}{J_{ww}w}=\frac{1}{1-\alpha}\frac{\partial f/\partial x_k}{f}$$

が評価できればよい．ここで確率的流れを利用することができる．状態変数 X_k の確率微分方程式 $dX_k=\mu_k\,dt+\sigma_k\,dB_t^x$ について，確率的流れが存在するための技術的条件が成立しているとして，X_k の初期値 X_k^0 についての微分を $Y_k=\partial X_k/\partial X_k^0$ とする．このとき Y_k は $Y_k(0)=1$,

$$dY_k(t)=\frac{\partial\mu_k}{\partial X_k}Y_k(t)\,dt+\frac{\partial\sigma_k}{\partial X_k}Y_k(t)\,dB_t^x$$

の解として与えられる．さらに，π_T の初期値 X_k^0 についての微分は，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\pi_T}{\partial X_k^0}&=\pi_T\left(-\int_0^T\frac{\partial r_t}{\partial X_k(t)}Y_k(t)\,dt-\int_0^T\frac{\partial\theta_t^x}{\partial x_k(t)}Y_k(t)\,dB_t^x-\int_0^T\theta_t^x\frac{\partial\theta_t^x}{\partial X_k(t)}Y_k(t)\,dt\right)\\&\equiv\pi_T Z_T^k\end{aligned}\tag{30}$$

となるから，関数 $f(w,x)=E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right]^{1-\alpha}$ の初期値 X_k^0 に関する微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(w,X_k^0)&=(1-\alpha)E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right]^{-\alpha}E\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\pi_T^{1/(\alpha-1)}\frac{\partial\pi_T}{\partial X_k^0}\right]\\&=-\alpha E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right]^{-\alpha}E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}Z_T^k\right]\end{aligned}$$

と表すことができる．

以上の結果をまとめると，平均分散ポートフォリオは (13) より

$$\frac{1}{1-\alpha}(\sigma\sigma^\top)^{-1}(\mu-r)\equiv\frac{1}{1-\alpha}h_{K+1}$$

で与えられる．離散時間モデルとの類推でいえば，h_{K+1} は (7) の $\mathbf{h}_{K+1}$ と同じものである．ヘッジング・ポートフォリオは (14), (28) より

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{\partial f/\partial x_k}{f}h_k=\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\frac{E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}Z_T^k\right]}{E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right]}h_k$$

で与えられる．したがって，$q_{K+1}=1/(1-\alpha)$,

$$q_k=\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)\frac{E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}Z_T^k\right]}{E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right]}$$

とおけば，最適ポートフォリオ φ は

$$\varphi=\sum_{k=1}^{K+1}q_kh_k\tag{31}$$

と表すことができる．ここで，h_k, $k=1,\ldots,K+1$ は投資家の危険回避度や投資ホライズンからは独立に決まる．これらをどれだけ保有するかを表すウェイト q_k は投資家の危険回避度や投資ホライズン，および状態価格デフレーターとその初期値に対する感応度である確率的流れによって決まる．さらに確率的流れは (30) を見れば分かるように，安全資産利子率 r_f とファクター・リスクに対する市場価格 θ^x が状態変数 X にどのように依存するかによって決まる．

以上のことから，一期間のマルチファクター・モデルでの最適ポートフォリオと，連続時間のマルチファクター・モデルでの最適ポートフォリオとの関係を次のように整理することができる．一期間の問題では，ファクターに対するエクスポージャー $\bar{b}$ が外生的に与えられたものとして，その水準を達成しながら平均分散の意味で最適なポートフォリオを選択する問題を考えた．連続時間モデルでは，期待効用を最大にするような動学的最適問題の解としての最適ポートフォリオを求めた．一期間問題の解である (8) と連続時間問題の解である (31) は基本的に同じ形をしており，いわゆる平均分散ポートフォリオと，各ファクターのミミッキング・ポートフォリオの加重平均として表すことができる．一期間問題に

おいては，ファクターに対するエクスポージャーが与えられたものとし，その値からファクターのミミッキング・ポートフォリオへの投資比率が計算された．連続時間モデルでは最適ポートフォリオが連続時間の最適ポートフォリオ問題の解として求められた．ミミッキング・ポートフォリオに対する投資比率は，投資家の危険回避度や投資ホライズンなどから決まってくる．したがって，一期間問題のときには外生的に与えられたファクターに対するエクスポージャーである $\bar{b}$ を，連続時間モデルにおける最適ポートフォリオから逆算することができる．これは実務上，よく用いられる手法であるファクターに対するティルティングを，連続時間モデルの視点から解釈したものと考えることができる．

最後に短期利子率，および状態変数の変動から生じるリスクの市場価格が，状態変数の値についての感応度がゼロである場合を考えよう．すなわち，

$$\frac{\partial r_f}{\partial X_t^k} = 0, \quad \frac{\partial \theta^x(t)}{\partial X_t^k} = 0$$

となる場合である．これは例えば，安全資産利子率と，ファクター・リスクの市場価格が一定の場合など，市場の投資機会集合が一定な場合である．この場合，

$$\frac{\partial \pi_T}{\partial X_k^0} = \pi_T$$

であるため，

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = (1-\alpha)E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right]^{-\alpha} E\left[\frac{\alpha}{\alpha-1}\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right] = -\alpha E\left[\pi_T^{\alpha/(\alpha-1)}\right]^{1-\alpha}$$

となる．したがって

$$\frac{\partial f/\partial x_k}{f} = -\alpha$$

と単純化され，最適ポートフォリオは

$$\varphi = \sum_{k=1}^{K} \frac{\alpha}{\alpha-1} h_k + \frac{1}{1-\alpha} h_{K+1}$$

となる．すなわち，最適ポートフォリオは投資家の満期までの残り時間に影響をされず，ヘッジング・ポートフォリオに対するウェイトは投資家の危険回避度である α にのみ依存する．したがって，投資機会が一定のマルチファクター・モデルを考える場合には，投資家の投資ホライズンが長期であったとしても最適ポートフォリオには投資ホライズンは影響せず，あたかも一期間問題に直面しているかのように行動すればよい．またその際にポートフォリオのファクター・リスクに対するエクスポージャーは投資家の危険回避度にのみ依存して決まる．

6 アペンディクス．離散時間モデルにおける期待リターン

ここでは，問題 (2)，(3)，(4) からよく知られたマルチファクター・モデルにおけるリターンの関係式が得られることを確認する．$\overline{\varphi}$ をマルチファクター・最小分散ポートフォリオ，すなわち問題 (2)，(3)，(4) の解となるようなポートフォリオであるとする．すると，ラグランジアンの一階の条件から

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\mathrm{r}] - \mathrm{r}_f &= \frac{1}{\gamma}\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\overline{\varphi} - \frac{1}{\gamma}\beta\lambda \\ &= \frac{1}{\gamma}\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\overline{\varphi} - \frac{1}{\gamma}(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}\beta\mathrm{Cov}[\mathrm{x},\mathrm{x}](\mathrm{Cov}[\mathrm{x},\mathrm{x}])^{-1}\lambda \end{aligned}$$

となる．ここでファクターをミミックするポートフォリオは，$(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}])^{-1}\beta\mathrm{Cov}[\mathrm{x},\mathrm{x}]$ を基準化したものであるから，ラグランジュ乗数の値を調整して，

$$\mathrm{E}[\mathrm{r}] - \mathrm{r}_f = \begin{pmatrix}\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\overline{\varphi} & \mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}^x]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\gamma \\ -(1/\gamma)\lambda\end{pmatrix}$$

と書くことができる．これを利用して，マルチファクター・最小分散ポートフォリオ $\overline{\varphi}$ と ファクターをミミックするポートフォリオ h について

$$\begin{pmatrix}\mathrm{E}[\overline{\varphi}\cdot\mathrm{r}] - \mathrm{r}_f \\ \mathrm{E}[\mathrm{r}^x] - \mathrm{r}_f\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{\varphi}^{\mathrm{T}} \\ \mathrm{h}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\overline{\varphi} & \mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}](\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}^x])\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\gamma \\ -(1/\gamma)\lambda\end{pmatrix}$$

が成立することがわかる．よって

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[\mathrm{r}] - \mathrm{r}_f \\
&= \left(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\overline{\varphi} \quad \mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}^x]\right) \left[\begin{pmatrix} \overline{\varphi}^{\mathsf{T}} \\ (\varphi^x)^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \left(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\overline{\varphi} \quad \mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}^x]\right) \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{E}[\mathrm{r}] - \mathrm{r}_f \\ \mathrm{E}[\mathrm{r}^x] - \mathrm{r}_f \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．特にマーケット・ポートフォリオがマルチファクター最小分散ポートフォリオであることを利用し，φ_M をマーケット・ポートフォリオ，r_M をそのリターンとすると，市場均衡条件から

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\mathrm{r}] - \mathrm{r}_f &= \left(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\varphi_M \quad \mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}^x]\right) \left[\begin{pmatrix} \varphi_M^{\mathsf{T}} \\ h^{\mathsf{T}} \end{pmatrix} \left(\mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}]\varphi_M \quad \mathrm{Cov}[\mathrm{r},\mathrm{r}^x]\right) \right]^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{E}[\mathrm{r}_M] - \mathrm{r}_f \\ \mathrm{E}[\mathrm{r}^x] - \mathrm{r}_f \end{pmatrix} \\
&\equiv \begin{pmatrix} \beta_{1M} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{NM} & \beta_{N1} & \cdots & \beta_{NK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{E}[\mathrm{r}_M] - \mathrm{r}_f \\ \mathrm{E}[\mathrm{r}_1^x] - \mathrm{r}_f \\ \vdots \\ \mathrm{E}[\mathrm{r}_K^x] - \mathrm{r}_f \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

が得られ，よく知られた形のマルチファクター・モデル

$$
\mathrm{E}[\mathrm{r}_i] - \mathrm{r}_f = \beta_{iM}(\mathrm{E}[\mathrm{r}_M] - \mathrm{r}_f) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}(\mathrm{E}[\mathrm{r}_k^x] - \mathrm{r}_f)
$$

が得られることが確認される．

注

1. この点については，例えば Campbell/Lo/MacKinlay [1997] が詳しい．
2. マルチンゲール・アプローチについては，例えば Duffie [2001] 参照．
3. この点については例えば，Campbell/Lo/MacKinlay [1997] 参照．

参考文献

Campbell, J., A. W. Lo., and C. MacKinlay [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton, NJ, Princeton University Press.

Duffie, D. (1996). *Dynamic Asset Pricing Theroy*, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.

Fama, E. F. [1996], "Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(4): pp.441-465.

Merton, R. C. [1973], "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica* 41: pp.867-87.