数理解析研究所講究録 1267 巻 2002 年 2-4

Geometric Diophantine Problems —有理点分布と値分布

東大・数理　野口潤次郎 (Junjiro Noguchi)
Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo

講演では，次の三つの話題に関連して，有限性も含めて有理点の分布と値分布（小林双曲性や Nevanlinna 理論）を論じた:

(i) 有理点の算術的問題.

(ii) 複素幾何的問題.

(iii) 関数体上の問題.

この講演で取り上げた内容について，論説や論文が新旧いくつかあるので，それを紹介することで報告としたい・

まずは，S. Lang 予想であるが，これは [L74, L86] で問題として提起されてきた．小林双曲的空間での類似問題は一応解決され，解説が [N89, N91] にある．その時点では未解決だったコンパクト双曲的空間への支配的写像の有限性も [N92] で解決された．[N94] では，代数体上の代数多様体の有理点間の小林双曲的擬距離を定義した．極限として $\mathbf{C}$ 上の場合の小林擬距離が出てくるので，何か意味ある応用があると良いのだが.

S. Lang 予想が小林双曲性との関連で想起され，小林双曲性を示す最も有力な手段である Nevanlinna 理論は，P. Vojta 予想のモデルとなった ([Vo87])．この間の解説では，[L87] がよく書けている.

双曲的でない空間での整数点集合と整正則曲線の分布には類似性があり [NW02] で扱った.（準）アーベル多様体内で考えるとき，豊富因子の外に整数点が高々有限個しかないということと，豊富因子の外の整正則曲線は定値であることが対応する類似となる．これらはそれぞれ，[F91], [V96], [SY96], [N98] で解決された．この場合は，初めて有理点分布の算術理論が値分布理論を先行した.

しかし [NWY00, NWY02] では，正則曲線の理論を更に定量的結果に進展させた．これは値分布理論での第二主要定理を証明するもので，算術理論でのイロハ (abc-) 予想がその類似に対応する．ここで，再び値分布論が先行することとなった．この話題については関数体上の場合も含めて，[N02a], [N02b] で論じている.

最後に，最近以下のような有理点の有限性結果を得たので報告したい．次のように置く．$d, e \in \mathbf{N}$ は互いに素で次をみたす.

$$d > 2e + 8.$$

$$P(w_0, w_1) = w_0^d + w_1^d + w_0^e w_1^{d-e}$$

本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究 (A)(1), 13304009 の補助を受けた.

と定め，帰納的に

$$P_1(w_0, w_1) = P(w_0, w_1),$$
$$P_n(w_0, w_1, \dots, w_n) = P_{n-1}(P(w_0, w_1), \dots, P(w_{n-1}, w_n)), \quad n = 2, 3, \dots,$$

と定める．P_n は, $\mathbf{Z}$ 上定義された次数 d^n の同次多項式である．$e \geqq 2$ とすると，

$$X = \{P_n(w_0, w_1, \dots, w_n) = 0\} \subset \mathbf{P}^n_{\mathbf{Q}}$$

は小林双曲的である (城崎 '98).

定理 0.1 (野口 [No02c]) $e \geqq 2$ として X を上の様に定義する．すると，任意の代数体 K にたいし その有理点集合 $X(K)$ は有限である．

実は，X は，次数 d^{n-1} の d 個の小林双曲的超曲面の和になっていることが分かる．任意多変数・単独の不定方程式でかかる算術的有限性をもつものはこれまで知られていなかたと思う．

参考文献

[F91] G. Faltings, Diophantine approximation on abelian varieties, Ann.. Math. **133** (1991), 549-576.

[L74] S. Lang, Higher dimensional Diophantine problems, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 779-787.

[L86] S. Lang, Hyperbolic and Diophantine analysis, Amer. Math. Soc. **14** (1986), 159-205.

[L87] S. Lang, Introduction to Complex Hyperbolic Spaces, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1987.

[L91] S. Lang, Number Theory III, Encycl. Math. Sci. vol. **60**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong-Barcelona, 1991.

[N89] 野口潤次郎, 双曲的多様体と Diophantus 幾何学, 数学 Vol. **41**, pp. 320-334, 日本数学会, 岩波書店, 1989.

[N91] J. Noguchi, Hyperbolic Manifolds and Diophantine Geometry, Sugaku Exposition Vol. **4** pp. 63-81, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1991.

[N92] J. Noguchi, Meromorphic mappings into compact hyperbolic complex spaces and geometric Diophantine problems, International J. Math. **3** (1992), 277-289.

[N94] J. Noguchi, Some topics in Nevanlinna theory, hyperbolic manifolds and Diophantine geometry, Geometry and Analysis on Complex Manifold, Festschrift for S. Kobayashi's 60th Birthday, pp. 140–156, World Scientific, Singapore, 1994.

[N98] J. Noguchi, On holomorphic curves in semi-Abelian varieties, Math. Z. **228** (1998), 713-721.

[N02a] Some results in view of Nevanlinna theory, preprint UTMS 2001-24, in Number Theoretic Methods-Future Trends, China-Japan Seminar 2001, Eds. S. Kanemitsu and Chaohua Jia, Kluwer Acad. Publ., 2002 (in press).

[N02b] ネヴァンリンナ理論とイロハ (abc-) 予想,「解析的整数論の新しい展開」, 京都大学数理解析研究所講究録, 2002.

[N02c] An arithmetic property of Shirosaki's hyperbolic projective hypersurface, preprint.

[NW02] Noguchi, J. and Winkelmann, J., Holomorphic curves and integral points off divisors, preprint UTMS 99-6, math/9902014, 1999, to appear in Math. Z. (2002).

[NWY00] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The value distribution of holomorphic curves into semi-Abelian varieties, C.R. Acad. Sci. Paris t. **331** (2000), Serié I, 235-240.

[NWY02] J. Noguchi, J. Winkelmann and K. Yamanoi, The second main theorem for holomorphic curves into semi-Abelian varieties, preprint UTMS 99-49, math/9912086, 1999, to appear in Acta Math. Vol. 188 No. 1 (2002).

[SY96] Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, A generalized Bloch's theorem and the hyperbolicity of the complement of an ample divisor in an Abelian variety, Math. Ann. **306** (1996), 743-758.

[Vo87] Vojta, P., Diophantine Approximations and Value Distribution Theory, Lecture Notes in Math. vol. **1239**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[V96] P. Vojta, Integral points on subvarieties of semiabelian varieties, I, Invent. Math. **126** (1996), 133-181.

注. プレプリントシリーズ UTMS は, '01 年分より http://kyokan.ms.u-tokyo.ac.jp/ から ∗.ps, ∗.pdf ファイルで落とせます.