数理解析研究所講究録 1267 巻 2002 年 14-25

A SURVEY ON VARIETIES WITH LARGE FUNDAMENTAL GROUPS

九大・数理　高山 茂晴 (Shigeharu TAKAYAMA)
Graduate School of Math., Kyushu Univ.

この小論の目的は János Kollár 著 “Shafarevich Maps and Automorphic Forms” [Kollár] について, どのような動機で研究され始めたのか, どのような問題意識があるのか, そして今のところどのようなことが分かっているのか, 等々, キーワードなどを拾いながらそのほんの一端を (主に数論を専門とする方に) 紹介することにある. 研究集会のときには, 紹介者の力量不足により前置き等に時間をとられ “large π_1”,“existence of automorphic forms” といった本論については説明するまでには至らなかった. この小論でも前置きが少々長めであることは否めないが, その辺りの説明をきちんとしたつもりである.

貴重な交流の機会を与えてくださった研究代表者の中村博昭氏にこの場を借りて感謝の意を表します.

[Kollár] は代数多様体の分類理論における基本群の役割の研究に力点を置いている. その上, 代数多様体の基本群に関する性質, 保型形式についての古典理論から比較的最近の結果まで, 等いろいろと解説も付けてまとめてあり, さらには一般的な小平型消滅定理についても記述しているため, 双有理幾何になじみの少ない者には焦点がぼやけてしまうことであろう. 理論として新しいのは Chapter 3, 14, 15, 16, 17 で, いずれもこの本の元となった論文 [Kollár93b] の幾分かの一般化になっている. Chapter 17 はアーベル多様体への応用で, 幾分細かな予備知識が要求されるため説明しない (できない). よってここでは前の四つの章に焦点を絞り, 次のような構成で紹介をしていく.

§1. Shafarevich conjecture. [Kollár] の動機付け (の動機付け) となった Shafarevich による予想 1.1 とその周辺について述べる.

§2. Albanese map, Shafarevich map, large fundamental group. 分類理論におけるアルバネーゼ写像の役割, その研究手法を手本として §1 を考慮に入れながら Shafarevich map のモデルを考える. そこから large π_1 等の定義がなされる.

§3. Shafarevich map. その存在について述べる.

§4. Non-vanishing theorem. Large π_1 をもつ多様体の性質を分類理論の立場から記述する. これが [Kollár] の主要部分である. 次の §5 で触れるが, §4 の結果は普遍被覆空間上の automorphic form の存在から導かれるもので, これが [Kollár] のタイトルにある “... Automorphic Forms” の由来の一つである.

§5. Method of proof and existence of automorphic forms. §4 の定理の証明についてその背景, 方法を述べる. Large π_1 という性質がどうのように絡んでくるかを見る.

§6. Some problems. おまけ.

以下特に断らない限り, X は滑らかな射影的複素代数多様体, $\pi_1(X)$ をその (古典的) 基本群, $\pi : \widetilde{X} \longrightarrow X$ をその普遍被覆空間とする. あまり現れないが, $\widehat{\pi}_1(X)$ を代数的基本群: $\pi_1(X)$ の profinite completion, 射 $\pi_1(X) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(X)$ の核に対応した X の被覆空間を $\widehat{X}$ とし, X の代数的普遍被覆空間とよぶ. $\widehat{X}$ は代数多様体とは限らないこと, $\widetilde{X} \neq \widehat{X}$ となりうることを注意しておく.

[Kollár] がオリジナルではない命題等についても, 多くの箇所で [Kollár] の対応する箇所を参考文献としてあげていることを了承して頂きたい.

1. Shafarevich Conjecture

1A. What is a conjecture of Shafarevich.

射影的複素代数多様体 X の普遍被覆空間 $\widetilde{X}$ が $\mathbb{C}^n$ 内の単位球 $\mathbb{B}^n$ の場合, 例えば, 保型形式, Poincaré 級数の理論, 解析的にはベルグマン核の理論, 等がある. X がアーベル多様体の場合, $\widetilde{X} = \mathbb{C}^n$ で, このときはテータ関数の理論がある. 上記二例においては, X についての多くの性質 (数論的, 幾何的, 解析的) 性質は, $\widetilde{X}$ 上の関数論を通して理解することができる. このようなことが一般の X についても成立して欲しいと望むことは, あまりに虫がよすぎることではあるが, そんな思いを Shafarevich も幾分か抱いたのであろうか, 氏の著書 "Basic Algebraic Geometry" [Shafarevich74, IX.4.3] において次のような予想, 問題提起をしている (というよりは, 単なる希望的観測といった感じで, "Shafarevich conjecture" などと大々的に取りだたされては氏本人にとっては些か ("かなり" か?) 迷惑な話であろう.)

予想 1.1. $\widetilde{X}$ は関数論的に良い性質を持つであろう. 正確に述べると, $\widetilde{X}$ は正則凸であろう.

複素解析空間の正則凸性は関数論的な完備性の条件である. 定義と基本的な性質を以下に簡単に述べる.

定義 1.2. Y を正規複素解析空間とする.

(1) Y が正則凸 $\Longleftrightarrow_{\mathrm{def}}$ 任意に与えられた集積点をもたない点列 $\{y_n\}_{n\in\mathrm{N}}$ に対し, Y 上の正則関数 f で $\sup_{n\in\mathrm{N}} |f(y_n)| = +\infty$ となるものが存在する.

(2) Y が正則分離 $\Longleftrightarrow_{\mathrm{def}}$ 異なる 2 点の各組 (y, y') に対し, Y 上の正則関数 f で $f(y) \neq f(y')$ となるものが存在する.

(3) Y がスタイン空間 $\Longleftrightarrow_{\mathrm{def}}$ Y は正則凸かつ正則分離.

定理 1.3. Y を正規複素解析空間とする.

(1) Y がスタイン空間 $\Longleftrightarrow$ Y 上の全ての解析的連接層 $\mathcal{F}$ と, 全ての $q > 0$ に対して $H^q(Y, \mathcal{F}) = 0$ となる. これは Cartan-Serre によるスタイン空間の基本定理 B と呼ばれるもので, よく知られているように, 後に Serre によりアフィン代数多様体の層のコホモロジーによる特徴付けに特殊化されている.

(2) Y が正則凸 $\Longleftrightarrow$ ある正規スタイン空間 S へのファイバーが連結であるような全射固有正則写像 $f : Y \longrightarrow S$ が存在する．これは双正則同値を除いて一意的に存在し Remmert reduction と呼ばれる．

(3) $\mathbb{C}^n$ 内の領域 D については, D は正則凸 $\Longleftrightarrow$ D はスタイン $\Longleftrightarrow$ 境界の各点 $p \in \partial D$ に対して, そこを超えて解析接続できないような D 上の正則関数が存在する．

予想 1.1 が正しければ, 定理 1.3(2) より $\widetilde{X}$ は正規スタイン空間 (コホモロジー的にはアフィンのようなもの) 上の射影的多様体の族として表され, $\widetilde{X}$ 上の正則関数, 有理型関数の構成, ひいては X 上の関数の構成において大変な advantage となる．

しばらく $\widetilde{X}$ が正則凸と仮定しよう．すると $\widetilde{X}$ の Remmert reduction $\tilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \tilde{S}$ が存在する．このとき基本群 $\pi_1(X)$ の $\widetilde{X}$ への作用は $\tilde{S}$ への作用を引き起こし, それによる商 $\mathrm{Sh}(X) := \tilde{S}/\pi_1(X)$ が存在し, 射 $\mathrm{sh}_X : X \longrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ を得る．自然な全射 $\pi_1(X) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ があるので, この射 sh_X はアルバネーゼ写像を分解する．以上まとめると,

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] & X \arrow[d, "\mathrm{sh}_X"] \arrow[dr, "\mathrm{alb}_X"] & \\
\tilde{S} \arrow[r] & \mathrm{Sh}(X) \arrow[r] & \mathrm{Alb}(X)
\end{tikzcd}$$

この $\mathrm{sh}_X : X \longrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ が後に述べる Shafarevich map の理想とする形である．しかし, 現時点では $\widetilde{X}$ 上の正則関数を見つける方法さえ一般的には知られておらず, 予想 1.1 そのものを解くことは難しい．そこで Kollár 氏は, 分類理論の立場から, その予想を上のようにアルバネーゼ写像の精密化を与えるような, 基本群の性質に関する多様体の構造論として研究し始めた．それに従って, ここでは我々も予想 1.1 へのアプローチ, つまり $\widetilde{X}$ 上の正則関数を構成することなどは一切しない．

ところで, 予想 1.1 (の約半分) が証明できれば, 次の Nori による予想 (cf. [Kollár, 18.21]) が従う (例えば, Remmert reduction $\tilde{f} : \widetilde{X} \longrightarrow \tilde{S}$ に注意すれば分かる)．このことから予想 1.1 の難しさを, 普遍被覆に移らなくても, X 上で感じてもられるだろう．

予想 1.4. $Z_1, \ldots, Z_k$ を X の正規部分多様体で, その和 $Z := \bigcup_{i=1}^k Z_i$ は連結とする．各 $\mathrm{im}\,[\pi_1(Z_i) \longrightarrow \pi_1(X)]$ が有限ならば, $\mathrm{im}\,[\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(X)]$ も有限である．

1B. What is known about Shafarevich's conjecture.

(流れとしては, ここは飛ばして §2 へ進んだほうが良い.) 予想 1.1 提出当時知られていたこととして次がある．

(1) 1 次元の場合．これはよく知られている．

(2) 基本群がアーベル群である場合．このとき $\widetilde{X}$ はアルバネーゼ写像から誘導された $\mathbb{C}^q, q = \dim H^0(X, \Omega^1_X)$, への固有正則写像をもち, よって正則凸になる．さらにアルバネーゼ写像のスタイン分解が Shafarevich map になっている．

(3) $\widetilde{X}$ が $\mathbb{C}^n(n = \dim X)$ の有界領域の場合. このとき $\widetilde{X}$ はスタイン, $\mathrm{Sh}(X) = X$. これは Siegel による定理で, これこそが予想 1.1 の根拠であった. このような X は後で出てくる "large fundamental group をもつ" 多様体の基本的な例になっている.

(4) 予想 1.1 は代数的な場合に正しければ, コンパクトケーラー多様体に対しても正しいであろうと思われている. ケーラー性を外すと次のように反例: Hopf 曲面 Y がある.

$$\tilde{Y} = \mathbb{C}^2 - \{0\} \longrightarrow Y := \mathbb{C}^2 - \{0\}/\sim,$$

ここで $(z_1, z_2) \sim (\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2), \alpha_i \in \mathbb{C},\ |\alpha_i| > 1$.

予想 1.1 が提出されて Kollár 氏が注目するまではあまり研究されていなかった. 主だったものとして

(5) [Gurjar87] 2 次元でその小平次元 $\kappa(X)$ が 1 以下の場合. 曲面 (主に楕円曲面) の分類理論により, 予想 1.1 が正しい. つまり, 2 次元でも殆ど分かっていない.

[Kollár93b] 以降, 多くの関係した論文が出版されたが, 予想 1.1 に取り組んでいるもので主なものとしては

(6) [Katzarkov97] $\pi_1(X)$ がベキ零の場合. この場合もアルバネーゼ写像のスタイン分解が Shafaravich map になっている. スタイン分解で得られたファイバー空間の混合ホッジ構造を調べることで証明している.

(7) きちんとは述べられないが調和写像による方法がある. Mok, Jost, Zuo, ...

2. Albanese Map, Shafarevich Map, Large Fundamental Group

§1A の後半で述べた Kollár 氏の着想を順に見ていこう.

2A. Abelian Theory.

Irregular varieties を研究する一つの重要な方法としてアルバネーゼ写像の解析がある ([Ueno75] 参照). 今 $q(X) = \dim H^0(X, \Omega_X^1) = 2^{-1}\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H_1(X, \mathbb{Z}) > 0$ とする. まずはアルバネーゼ写像を次のようにスタイン分解する:

$$\mathrm{alb}_X : X \xrightarrow[(2)]{\alpha_X} A(X) \xrightarrow[(1)]{\beta_X} \mathrm{Alb}(X).$$

部分多様体 $Z \subset X$ に対し,

$$\alpha_X(Z) = \text{ a point } \Longleftrightarrow \sharp \mathrm{im}\,[H_1(Z, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})] < \infty.$$

特に, alb_X: generically finite $\Longleftrightarrow$ 殆ど全ての正次元の部分多様体 $Z \subset X$ に対し, $\sharp \mathrm{im}\,[H_1(Z, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})] = \infty$.

するとアルバネーゼ写像を通して多様体を調べるには, 次のように 2 つに分けて考えるのが基本的である.

(2A.1) アルバネーゼ写像が generically finite な 多様体のクラスを調べる. これは上の $A(X)$ は一般に特異点をもつので適当な特異点解消のアルバネーゼ写像のもつ性質を表わしている. このような多様体のクラスについては, [Green-Lazarsfeld87] [Green-Lazarsfeld91] [Ein-Lazarsfeld97] らによって興味深い, 重要な結果が得られている. これについては §6 でも少し触れる.

(2A.2) 次元について帰納的に, ファイバー空間 $\alpha_X : X \longrightarrow A(X)$ を調べる.

2B. Non-Abelian Theory.

Abelian theory 2A の研究の流れに着目して, §1A の射 $\mathrm{sh}_X : X \longrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ をモデルとして次のようなアルバネーゼ写像の基本群版を考える: 各滑らかな射影的代数多様体 X に対し, ある正規代数多様体 S と連結ファイバーをもつ射 $f : X \longrightarrow S$ が存在して, 部分多様体 $Z \subset X$ に対し,

$$f(Z) = \text{ a point } \iff \sharp\,\mathrm{im}\,[\pi_1(Z) \longrightarrow \pi_1(X)] < \infty$$

が成立すると仮定する. 自然な全射 $\pi_1(X) \longrightarrow H_1(X, \mathbb{Z})$ があるので, 上のような射はアルバネーゼ写像を分解する. すると §2A のように次の二つが基本的となる.

(2B.1) 上の射 $f : X \longrightarrow S$ が generically finite (つまり birational) であるような多様体のクラスを調べる.

(2B.2) 次元について帰納的に, ファイバー空間 $f : X \longrightarrow S$ を調べる.

2C. Large fundamental group.

(2B.1) のような多様体のクラスは Kollár (cf. [Kollár, 4.1–4.6]) により以下のように命名された. (注意: その定義には §2B のような射 $f : X \longrightarrow S$ の存在は仮定しなくてよい.)

定義 2.1. (1) X の基本群 $\pi_1(X)$ が大きい: large $\iff_{\mathrm{def}}$ すべての正次元部分多様体 $Z \subset X$ に対し, $\sharp\,\mathrm{im}\,[\pi_1(\overline{Z}) \longrightarrow \pi_1(X)] = \infty$ となる. ここで $\overline{Z} \longrightarrow Z$ は正規化とする.

(2) X の基本群 $\pi_1(X)$ が一般的に大きい: generically large $\iff_{\mathrm{def}}$ 殆どすべての正次元部分多様体 $Z \subset X$ に対し, $\sharp\,\mathrm{im}\,[\pi_1(\overline{Z}) \longrightarrow \pi_1(X)] = \infty$ となる.

ここで "殆どすべての $Z \subset X$" とは, X に付随してある高々可算個の部分多様体 $D_i \neq X$ が定まって, $Z \not\subset \bigcup_i D_i$ なることを意味する. 以下の定義-命題 2.2 においては, $\widetilde{X} \setminus \pi^{-1}(\bigcup_i D_i)$ の点を非常に一般の点と呼ぶことにする.

定義 2.1 は基本群の性質についての定義である. それは普遍被覆空間のある幾何的性質と同値で, それを定義とすることもできる.

定義-命題 2.2. (1) X の基本群 $\pi_1(X)$ が大きい $\iff_{\mathrm{def}}$ $\widetilde{X}$ の正次元コンパクト部分多様体は存在しない.

(2) X の基本群 $\pi_1(X)$ が一般的に大きい $\iff_{\mathrm{def}}$ $\widetilde{X}$ の非常に一般の点を通る正次元コンパクト部分多様体は存在しない.

以上のことがらは代数的基本群 $\widehat{\pi}_1(X)$ についても同様に定義される.

定義 2.3. (1) X の代数的基本群 $\widehat{\pi}_1(X)$ が大きい $\iff_{\mathrm{def}}$ すべての正次元部分多様体 $Z \subset X$ に対し, $\sharp\,\mathrm{im}\,[\widehat{\pi}_1(\overline{Z}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(X)] = \infty$ となる $\iff$ $\widehat{X}$ の正次元コンパクト部分多様体は存在しない.

(2) X の代数的基本群 $\widehat{\pi}_1(X)$ が一般的に大きい $\iff_{\mathrm{def}}$ 殆どすべての正次元部分多様体 $Z \subset X$ に対し, $\sharp\,\mathrm{im}\,[\widehat{\pi}_1(\overline{Z}) \longrightarrow \widehat{\pi}_1(X)] = \infty$ となる $\iff$ $\widehat{X}$ の非常に一般の点を通る正次元コンパクト部分多様体は存在しない.

注意 2.4. 幾つかの簡単な事実を列挙する.

(1) Ball quotient や, アーベル多様体は large π_1 をもち, その部分多様体, その分岐被覆なども large π_1 をもつ.

(2) Generically large π_1 は滑らかな代数多様体の双有理不変な性質である. Generically large $\widehat{\pi}_1$ についてもそうである.

(3) (Generically) large $\widehat{\pi}_1 \Longrightarrow$ (Generically) large π_1.

次は予想 1.1 の重要な特別な場合である.

予想 2.5. Large $\pi_1(X) \Longleftrightarrow \widetilde{X}$ はスタイン多様体.

3. Shafarevich Map

現時点で証明されている Shafarevich map は以下のような形である.

定理 3.1. [Kollár, 3.6] 正規完備多様体 $\mathrm{Sh}(X)$, 支配的有理写像 $\mathrm{sh}_X : X \dashrightarrow \mathrm{Sh}(X)$, (Hausdorff) 開集合 $X^0 \subset X$, $S^0 \subset \mathrm{Sh}(X)$ が存在して, 以下の条件 (1)–(4) を満たす.

(1) $X^0 \supset X \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$. ここで D_i は $D_i \neq X$ なる X のある部分多様体.

(2) 制限 $\mathrm{sh}_X|_{X^0} : X^0 \longrightarrow S^0$ は全射正則, 固有, ファイバーは連結.

(3) 各 $s \in S^0$ のファイバー X_s に対し, $\sharp\,\mathrm{im}\,[\pi_1(X_s) \longrightarrow \pi_1(X)] < \infty$ となる.

(4) 上の (1)–(3) を満たす各 $h : X \dashrightarrow S$ に対し, 支配的有理写像 $f : S \dashrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ が存在して, $f \circ h = \mathrm{sh}_X$ となる.

これには, $\widehat{\pi}_1(X)$ に関するもの, 正規多様体に関するもの等, 幾つかの variants がある. [Campana94] も [Kollár93a] [Kollár] とは独立にコンパクトケーラー多様体に対して本質的に同じ結果を得ている.

この Shafarevich map のイメージとしては, まず普遍被覆 $\widetilde{X}$ のコンパクト部分多様体の族 $\mathcal{V} = \{V_t\}_{t\in T}$ で, $\bigcup_{t\in T} V_t$ が $\widetilde{X}$ 内で dense, かつ $\dim V_t$ が最大なものを考える. そのような族が存在し, それから得られる X のコンパクト部分多様体の族 $\pi(\mathcal{V}) := \{\pi(V_t)\}_{t\in T}$ が上記の存在定理の Shafarevich map に対応していることは Hilbert scheme の理論から従う. 証明は上の直感的な説明の正当化であり, それを読む必要はないであろう. Kollár 氏本人も言っているように, その証明は味気ないものである. また, 期待される本当の Shafarevich map (§1A, 又は §2B) の存在とはまだまだ天と地ほどの差があり, 条件 (1) において $\{D_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を有限個の $D_1, \ldots, D_k$ にできるかどうかさえも確かめるのは一般に難しい. 予想 1.1 の一つの難しさは, その差 $\widetilde{X} \setminus \bigcup_{t\in T} V_t$ の性質である. 実際 Nori 予想 1.4 はこの差に関するものである.

注意 3.2. (1) Generically large $\pi_1(X)$ ならば, $\mathrm{sh}_X = \mathrm{id}_X; X \longrightarrow \mathrm{Sh}(X) = X$ ととれる.

(2) $\mathrm{sh}_X : X \dashrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ は双有理同値を除いて一意的である.

(3) 予想 1.1 が正しければ, sh_X は X 全体で正則で, $\mathrm{Sh}(X)$ は双正則同値を除いて一意的に存在する.

4. Non-vanishing Theorem

さて, 今までの話では large π_1 と言っても定義があるだけで多様体について何も新しい情報を与えていない. 次の Kollár による定理 4.1 により, large π_1 等の定義が意味をもつことになる.

その前に言葉を復習をする. K_X を X の標準因子 (標準束) とし, 因子 (直線束) L に対し $K_X + L$ を随伴束と呼ぶ. 分類理論において, $K_X + L$ の切断の存在, 大域生成性, very ampleness 等の条件, 性質を調べることは重要である (cf. [KMM]). X 上の因子 L が big であるとは,

$$\limsup_{m \to +\infty} \dim H^0(X, mL)/m^n > 0,$$

$n = \dim X$, が成立することである. 因子の bigness は次の性質と同値である: アンプル因子 A に対し, ある正数 m と, エフェクティヴ因子 D が存在して $mL \sim A + D$ となる.

定理 4.1. [Kollár, 14.5, 16.2] $\hat{\pi}_1(X)$ は generically large とする. このとき X 上の任意の big 因子 L に対し, $H^0(X, K_X + L) \neq 0$ となる.

これは (2B.1) に関するものである. さらに, (2B.2) に関し, 定理 4.1 のある一般化として Kollár は次のような予想をした.

予想 4.2. [Kollár, 18.9] F を Shafarevich map $\mathrm{sh}_X : X \dashrightarrow \mathrm{Sh}(X)$ の一般ファイバーとする. L を X 上の big 因子で $H^0(F, K_F + L|_F) \neq 0$ なるものとする. このとき $H^0(X, K_X + L) \neq 0$ であろう.

これらについては [Eyssidieux99], [Takayama99a] により独立に次の結果が得られている.

定理 4.3. $\pi_1(X)$ は generically large とする. このとき X 上の任意の big 因子 L に対し, $H^0(X, K_X + L) \neq 0$ となる.

定理 4.4. 予想 4.2 は L がアンプル (もう少し弱められる (例えば nef-big) が big までは今のところ弱められない) ならば正しい.

応用として, 次のようなことが分かる.

定理 4.5. [Kollár, 16.3, 16.4] [Takayama99b] X を一般型 (つまり K_X が big) で generically large $\pi_1(X)$ をもつとする. このとき,

(1) 各 $m \geq 2$ に対して, $\dim H^0(X, mK_X) \geq 1$ となる.

(2) 各 $m \geq 4$ に対して, $\dim H^0(X, mK_X) \geq 2$ となる.

(3) 各 $m > 10^n (n = \dim X)$ に対して, 線形系 $|mK_X|$ は双有理写像を与える.

[Mumford79] の例: 2 次元 ball quotient X で K_X アンプル, $H^0(X, K_X) = 0$, により定理 4.5(1) が最良であることが分かる.

ちなみに, 分類理論においては, 次のようなもっと一般的な有限性の予想がある: すべての滑らかな一般型射影的代数多様体 X に対し, (i) その次元 n にしか依らない正数 m_n が存在して, 各 $m > m_n$ について $|mK_X|$ は双有理写像を与える, (ii) 標準環 $R(X) := \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, mK_X)$ は $\mathbb{C}$ 上有限生成である.

5. Method of Proof and Existence of Automorphic Forms

定理 4.1, 定理 4.3 の基本的な場合 (large $\widehat{\pi}_1(X)$, または large $\pi_1(X)$, L: アンプル) について, その証明の概略を説明する. 定理 4.1 は 定理 4.3 の特別な場合になっているが, (代数的) 基本群の役割, 被覆空間との関係, 等が一般の場合よりも分かり易いので定理 4.1 についても説明をする. その前に随伴束の切断を構成する方法について述べる. それはいかにも分類論的手法で, §4 の結果に対する基本的な道具, 背景である.

5A. Effective base point freeness of adjoint bundles.

X を滑らかな n 次元射影的代数多様体 ($\pi_1(X), \widehat{\pi}_1(X)$ 等については何も仮定しない), L を X 上のアンプル因子とする.

$$\begin{array}{l}\text{もし } L \text{ が点 } x \in X \text{ において “数値的に十分正” であるならば,} \\ s(x) \neq 0 \text{ なる切断 } s \in H^0(X, K_X + L) \text{ が存在する.}\end{array} \tag{5A.1}$$

ここで L が点 $x \in X$ において “数値的に十分正” であるとは, 各 d, $1 \leq d \leq n$, に対して, “適当に大きな” 正数 m_d が存在して, 点 x を通る全ての d 次元部分多様体 Z に対して, 交点数 $L^d \cdot Z \in \mathbb{N}$ が

$$L^d \cdot Z > m_d$$

となることを言う. 気持ち的には, L が “十分アンプル” であることの交点数に関する言い換えである. また, 各 d 次元部分多様体 Z に対して,

$$\dim H^0(Z, \mathcal{O}(kL)) \sim \frac{L^d \cdot Z}{d!}\, k^d \quad \text{as } k \longrightarrow +\infty \tag{5A.2}$$

を注意しておく.

m_d がどの程度で “大きい” と言うかは, 今のところ確定はしていないが, 藤田予想 (cf. [Kollár, 14.3]) は $m_d = n^d$ で “大きい” ことを主張している. その帰結として $|K_X+(n+1)L|$ は固定点を持たないことが導かれる (これは最良. 実際 $X = \mathbb{P}^n$, $L = \mathcal{O}(1)$ を考えればよい). 藤田予想は現在の所, 4 次元以下で確かめられている [Reider88] [Ein-Lazarsfeld93] [Kawamata97]. また一般次元では

$$m_d > \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^d$$

ならば “大きい” と言える. これは [Angehrn-Siu95] による定理である. [Helmke99] によれば, もう少し良い評価があるのだが, 定式化しにくいことと, ここでは m_d は n と d にしか依存しない数であれば幾ら大きくても構わないので, これ以上立ち入らないでおく. [Kollár] においては [Kollár93a] の評価 ($m_d \sim n^{nd}$) を使っている.

もう少し言うと, 各 d, $1 \leq d \leq n$, に対して, d 次元の部分多様体のある列 $x \in X_1 \subset \cdots \subset X_d \subset \cdots \subset X_n = X$ が存在して, $L^d \cdot X_d > m_d$ $(1 \leq d \leq n)$ ならば, $s(x) \neq 0$ なる $s \in H^0(X, K_X + L)$ の存在が言える. $X_{n-1}, \ldots, X_1$ は証明の途中に出てくるもので, 始めからこれとは言えないが, とにかくある有限個の部分多様体との交点数 $L^d \cdot X_d$ の情報から $H^0(X, K_X + L) \neq 0$ が導かれる.

以上については, より一般的な解説として, 代数的には [Kollár97], より解析的には [Demailly96] がある.

5B. Large $\widehat{\pi}_1(X)$ case.

まず $\widehat{\pi}_1(X)$ が無限群であることを使うと, 有限次不分岐被覆 $p: Y \longrightarrow X$ で, その次数が十分大きなもの, 例えば $\deg p > m_n (:= (n(n+1)/2)^n)$, が存在する. 次の基本的な関係式に注意する.

(1) $(p^*L)^n = (\deg p) L^n$.

(2) $\chi(Y, K_Y + p^*L) = (\deg p)\chi(X, K_X + L)$.

(2') $\dim H^0(Y, K_Y + p^*L) = (\deg p) \dim H^0(X, K_X + L)$.

ここで, $\chi(X, K_X + L) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \dim H^q(X, K_X + L)$ 等で, (2') は (2) と小平消滅定理: $H^q(Y, K_Y + p^*L) = 0$, $H^q(X, K_X + L) = 0$ $(q > 0)$ から従う.

次に $\widehat{\pi}_1(X)$ が large であることを使う. このことは, 与えられた有限個の部分多様体 $V_1, \dots, V_k \subset X$ に対して, 有限次不分岐被覆 $p: Y \longrightarrow X$ で, $(p^*L)^{d_i} \cdot V_i' > m_{d_i}$ となるものが存在することを意味している, ここで V_i' は $p^{-1}(V_i)$ の任意の既約成分, $d_i = \dim V_i$ である. つまり与えられた有限個の部分多様体の (p^*L に関する) 次数をも大きくするような被覆 $p: Y \longrightarrow X$ が存在する. このとき Y, p^*L に対し §5A: Effective base point freeness を適応することにより, $H^0(Y, K_Y + p^*L) \neq 0$ となり, 上のようにリーマン-ロッホ, 小平消滅定理より $H^0(X, K_X + L) \neq 0$ となる.

5C. Large $\pi_1(X)$ case.

$\widehat{\pi}_1(X)$ についての議論では, 全て代数多様体の範疇で話が進んでいたが, ここではそうは行かない. ここでの鍵は下記の補題 5.1 と Atiyah の L^2-指数定理 5.2 である. 補題 5.1 の性質は $\widetilde{X}$ のある種の凸性と密接に関係している (cf. [Kollár, 18.18]).

L はアンプルなので, L (より正確には L に対応した正則直線束 $\mathcal{O}_X(L)$) のエルミート計量 h でその曲率形式 $\sqrt{-1}\,\bar{\partial}\partial \log h$ がケーラー形式 ω となるものが存在する. これにより組 (X, ω) をコンパクトケーラー多様体と見做す. これらを普遍被覆の上に持ち上げる.

$$\begin{array}{ccc} (\widetilde{L}, \widetilde{h}) & \longrightarrow & (L, h) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \pi : (\widetilde{X}, \widetilde{\omega}) & \longrightarrow & (X, \omega) \end{array}$$

このとき気持ち的には Serre 消滅定理 (: 連接層 $\mathcal{F}$ と $q > 0$ に対し, k が十分大きいなら $H^q(X, \mathcal{F} \otimes L^{\otimes k}) = 0$) の類似により, 次が分かる [Takayama99a, §4A]:

補題 5.1. Y を $\widetilde{X}$ の閉部分解析空間で, 既約, かつ非コンパクトであるものとする. (Y は X の部分多様体の被覆に対応しているとは限らない.) 各 $k > 0$ に対して

$$I^k := \mathrm{Image}\,[H^0_{(2)}(\widetilde{X}, \widetilde{L}^{\otimes k}) \longrightarrow H^0(Y, \widetilde{L}^{\otimes k})]$$

とおく. このとき, 十分大きな全ての k に対して $\dim I^k = +\infty$ となる.

ここで $H^0_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{L}^{\otimes k})$ は計量 $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{h}^{\otimes k}$ に関する $\widetilde{L}^{\otimes k}$ の二乗可積分な正則切断のなす空間である. 同様に $H^q_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})$ は計量 $\widetilde{\omega},\widetilde{h}$ に関する q-th L^2-cohomology を表わす.

これにより, 関係式 (5A.2) を根拠として, 形式的に交点数が無限大だと思える (思う):

$$\widetilde{L}^d\cdot Y=+\infty,$$

$d=\dim Y$. このとき定義-命題 2.2 "large $\pi_1(X)\iff\widetilde{X}$ の正次元閉部分解析空間は全て非コンパクト" に注意すれば, $\widetilde{L}$ は数値的に十分正と思うことができて, §5A: Effective base point freeness のある一般化により, large $\pi_1(X)\implies H^0_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})\neq 0$ を得る.

ここで Atiyah の L^2-指数定理 (の特別な場合) を引用する [Atiyah76] [Kollár, Chapter 6]. この定理 5.2(2) により, 定理 4.3: $H^0(X,K_X+L)\neq 0$ が得られる.

定理 5.2. (1) $\chi(X,K_X+L)=\chi_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L}):=\sum_{q=0}^n(-1)^q\dim_{\pi_1(X)}H^q_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})$.

(2) $H^0(X,K_X+L)\neq 0\iff H^0_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})\neq 0$.

ここで "$\dim_{\pi_1(X)}$" は $\pi_1(X)$ の作用をもつヒルベルト空間 $H^q_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})$ の von-Neumann 次元と呼ばれるもので, $\pi_1(X)$ が有限群ならば $\dim_{\pi_1(X)}H^q_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})=(\sharp\pi_1(X))^{-1}\dim H^q(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})$ となっている. これ以上詳しくは説明できないが, この定理 5.2 (1) はオイラー標数 $\chi(X,K_X+L)$ が有限次不分岐被覆でその被覆の次数倍になることの無限次被覆への一般化である. 定理 5.2(2) は 定理 5.2(1) と X 上の小平消滅定理, $\widetilde{X}$ 上の小平型 L^2 消滅定理: $H^q_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}}+\widetilde{L})=0$ $(q>0)$ により得られる.

注意 5.3. Automorphic form の存在との関係は次のようなことから伺える.

(1) K_X は big, generically large $\pi_1(X)$ とすると, $L=K_X$ として以上の議論の幾分かの修正により $H^0_{(2)}(\widetilde{X},mK_{\widetilde{X}})\neq 0$ $(m\geq 2)$ が得られる.

(2) E を X 上の因子 (直線束) とする, 例えば $E=K_X$. Generically large $\pi_1(X)$, かつ, ある $m>0$ に対して $H^0_{(2)}(\widetilde{X},\widetilde{E}^{\otimes m})\neq 0$ と仮定する. このとき E は big 因子となる. これは [Gromov91] による Poincaré 級数の理論から従う (cf. [Kollár, Chapter 13]).

6. Some Problems

最後に [Kollár, Chapter 18] から個人的に興味のある問題, 予想等を述べる. 以下においては X は滑らかな n 次元射影的代数多様体とする.

予想 6.1. [Kollár, 18.8] K_X はアンプル, $\pi_1(X)$ は large と仮定する. このとき普遍被覆 $\widetilde{X}$ は零でない二乗可積分な正則 n 形式をもつ.

特殊な多様体については, これは既に知られていた [Gromov91]. §§4–5 の定理とその証明は, 根本的に小平消滅定理: アンプルな L に対し $H^q(X,K_X+L)=0$ $(q>0)$ に依っている. 実際, 定理 4.5 より $m\geq 2$ なら $H^0_{(2)}(\widetilde{X},mK_{\widetilde{X}})\neq 0$ である. しかし, $H^0_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}})$, $H^q_{(2)}(\widetilde{X},K_{\widetilde{X}})$ に対しては方法論的に何か新しいものが要求される.

次の問題は, 結果の美しさがそう思わせる, 今のところ反例がない, 以外にはあまり根拠はないようである. (Shafarevich 予想 1.1 もそのようなものだが.)

問題 6.2. [Kollár, 18.11] K_X はアンプル, $\pi_1(X)$ は large と仮定する. このとき $|3K_X|$ は双有理写像を与える. 特に以下の各場合 (1)–(3) にどうか.

(1) X は ball quotient である.

(2) X はあるアーベル多様体の部分多様体になっている.

(3) X は n 次元アーベル多様体の分岐被覆になっている.

予想 6.3. [Kollár, 18.13] X がアーベル多様体に双有理同値であるための必要十分条件は, $H^1(X,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2n}$ かつ $H^0(X,2K_X) \cong \mathbb{C}$ である.

これは当時 (1999 年 2 月) 未解決であったが [Chen-Hacon01] により完全に解かれた.

REFERENCES

[Angehrn-Siu95] Angehrn U.-Siu Y. -T. *Effective freeness and point separation for adjoint bundles*, Invent. math. **122** (1995) 291–308.

[Atiyah76] Atiyah M., *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32-33** (1976) 43–72.

[Campana94] Campana F., *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes*, Bull. Soc. math. France **122** (1994) 255–284.

[Chen-Hacon01] Chen J. A.-Hacon C. D., *Characterization of Abelian varieties*, Invent. math. **143** (2001) 435–447.

[Demailly96] Demailly J.-P., *L^2 vanishing theorem for positive line bundles and adjunction theory*, Transcendental Methods in Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1646, Springer-Verlag, New York, 1996, pp. 1–97.

[Ein-Lazarsfeld93] Ein L.-Lazarsfeld R., *Global generation of pluricanonical and adjoint linear systems on smooth projective threefolds* Jour. Amer. Math. Soc. **6** (1993) 875–903.

[Ein-Lazarsfeld97] Ein L.-Lazarsfeld R., *Singularities of theta divisors and the birational geometry of irregular varieties*, Jour. Amer. Math. Soc. **10** (1997) 243–258.

[Eyssidieux99] Eyssidieux P., *Systèmes linéaires adjoints L^2*, Ann. Inst. Fourier **49** (1999) 141–176.

[Green-Lazarsfeld87] Green M.-Lazarsfeld R., *Deformation theory, generic vanishing theorems and some conjectures of Enriques, Catanese and Beauville*, Invent. math. **90** (1987) 389–407.

[Green-Lazarsfeld91] Green M.-Lazarsfeld R., *Higher obstructions to deforming cohomology groups of line bundles*, Jour. Amer. Math. Soc. **4** (1991) 87–103.

[Gromov91] Gromov M., *Kähler hyperbolicity and L_2-Hodge theory*, J. Diff. Geom. **33** (1991) 263–292.

[Gurjar87] Gurjar R. V., *Covering of algebraic varieties*, Algebraic Geometry (Sendai 1985), Advanced Studies in Pure Math. **10** (1987), North-Holland, 179–184.

[Helmke99] Helmke S., *On global generation of adjoint linear systems*, Math. Ann. **313** (1999) 635–652.

[Katzarkov97] Katzarkov L., *Nilpotent groups and universal coverings of smooth projective varieties*, J. Diff. Geom. **45** (1997) 336–348.

[Kawamata97] Kawamata Y., *On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds*, Math. Ann. **308** (1997) 491–505.

[KMM] Kawamata Y., Matsuda K.- Matsuki K., *Introduction to the Minimal Model Problem*, Algebraic Geometry, Sendai, 1985, Advanced Studies in Pure Math., vol. 10 North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 283–360.

[Kollár93a] Kollár J., *Effective base point freeness*, Math. Ann. **296** (1993) 595–605.

[Kollár93b] Kollár J., *Shafarevich maps and plurigenera of algebraic varieties*, Invent. math. **113** (1993) 177–215.

[Kollár] Kollár J., *Shafarevich Maps and Automorphic Forms*, Princeton University Press, 1995.

[Kollár97] Kollár J., *Singularities of Pairs*, Alg. Geom. Santa Cruz 1995, Kollár, Lazarsfeld, Morrison eds., Proc. Symp. Pure Math. **62** Part 1 (1997), Amer. Math. Sci., pp. 221–287.

[Mumford79] Mumford D., *An algebraic surface with K ample, $(K^2) = 9$, $p_g = q = 0$*, Amer. J. Math. **101** (1979) 233–244.

[Reider88] Reider I., *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. Math. **127** (1988) 309–316.

[Shafarevich74] Shafarevich I. R., *Basic Algebraic Geometry*, Grundlehren der Math. **213** (1974), Springer-Verlag, Heidelberg.

[Takayama99a] Takayama S., *Nonvanishing theorems on an algebraic variety with large fundamental group*, J. Alg. Geom. **8** (1999) 181–195.

[Takayama99b] Takayama S., *On effective very bigness over varieties with large fundamental groups*, preprint, 1999.

[Ueno75] Ueno K., *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*, Lecture Notes in Math. **439**, Springer, 1975.

Shigeharu TAKAYAMA

Graduate School of Mathematics
Kyushu University
Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka
812-8581, JAPAN
e-mail address: `taka@math.kyushu-u.ac.jp`