

## 空力弾性効果を考慮したはりの非線形波動方程式の定常進行波解

阪大院・基礎工 渡辺陽介 (Yosuke WATANABE),

杉本信正 (Nobumasa SUGIMOTO)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

### 1 はじめに

本研究では、長い円管内の中心軸上を一定速度（亜音速）で動く、はりを伝わる非線形空力弾性波動を記述する方程式の定常進行波解について考察をおこなう。まずこの波動方程式の導出について簡単に述べる [1, 2]。図1のような、円管と、その中に同軸におかれた円形断面をもつ一様な弾性はりからなる系を考える。ここで、円管は無限に長く、内部は圧縮性の理想気体で満たされ

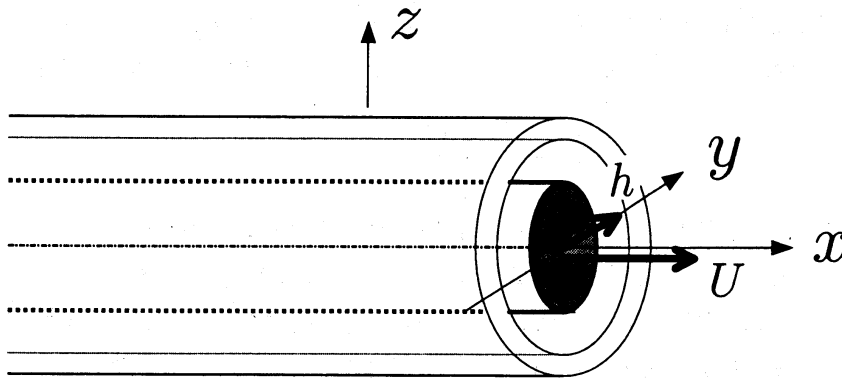


図1: 円管と弾性はりからなる系

ており、非粘性の渦なし流れを仮定する。はりも同じく無限に長く、円管の中心軸上を一定の速度  $U$  で動く。空気とはりの相互作用は、はり側面にはたらく圧力を通して、誘導質量の形でのみ考慮されており、端の効果や粘性の効果は無視する。はりの進行方向を  $x$  軸の正方向とし、はりのたわみは中心軸を含む水平面内、すなわち  $y$  軸方向に限定されているものとする。はりにはその大きさが変位に比例する復元力が作用するものとする。もし復元力がなければ、はりと周囲の空気の相対的な運動のために、不安定を引き起こす。一方、はりの曲げこわさは、波長が短くなるにつれ、不安定を押さえるようにはたらく。また、はりのたわみの波長は長く、はりがたわむ際、はりの中心軸に垂直な断面は円形を保つと仮定する。本研究で取り扱っている円管と弾性はりの系は  $x$ - $y$  平面に関して対称であるから、上半空間に限定して考えるならば、トンネル内を高速で走行する列車の水平方向の低周波数の運動に対する簡略化されたモデルになっている。

この系に対して、断熱の条件の下で、円管内の気体の連続の式、運動方程式、円管壁面での境界条件、はりの表面の運動学的条件およびはりのたわみ運動を支配する方程式を立式し、この系を記述する基礎方程式系とする。これらの方程式は流体の速度ポテンシャル  $\phi$  とはりのたわみ  $h$  を用いて書き表すことができる。この方程式系を円管の半径  $R$ 、はりのたわみ運動の代表的波長  $\lambda$ 、 $y$  方向の代表的変位  $c$ 、音速  $a_0$  および大気圧における流体密度  $\rho_0$  を用いて無次元化する。このと

き二つの微小な無次元パラメータ

$$\mu = \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 \ll 1, \quad \varepsilon = \frac{c}{R} \ll 1$$

を導入する。

まず  $\phi$  をこれらの微小パラメータを用いて展開する。次いで管壁面上の境界条件を満足する解をはり表面の運動学的条件に適用し、高次の項を無視して、 $\phi$  を  $h = h(x, t)$  で表すと、系全体を支配する単一の波動方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + M \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 h + \mu J \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} + Gh = -\sigma s \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \sigma \alpha h \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h^2) + \mu \sigma \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \quad (1)$$

を導くことができる [1]。ここで  $M$  は、はりの速度のマッハ数 ( $= U/a_0$ )、 $J$  と  $G$  は、はりの材質によって決まる正の定数、 $s$ 、 $\alpha$ 、 $\eta$  は幾何的に決まる正の定数である。また、 $\sigma$  は、はりの単位長さ当たりの質量に対する誘導質量の比 ( $0 < \sigma \ll 1$ ) で空力効果を表す量である。波動方程式 (1) の導出の際、 $\mu$  と  $\varepsilon$  による漸近展開を用いているが、式 (1) では  $O(\mu)$  と  $O(\varepsilon^2)$  より小さい項は無視している。以下の解析ではこれらの微小パラメータおよび  $G$  の大きさを同程度、すなわち

$$\frac{\mu}{\sigma} \sim \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \sim \frac{G}{\sigma} \sim O(1)$$

と仮定する。方程式 (1) の導出の過程から非線形項ははり表面における運動学的条件に帰因していることがわかる。方程式 (1) の線形分散関係については次章で詳しく考察する。

この波動方程式がもつ定常解の解析を試みるために変数変換をおこなう。方程式 (1) における最低次の項、すなわち右辺第 1 項から、 $h$  は  $h(x - Mt)$  の形で  $x$  と  $t$  に依存していると考えられる。そこで新しい変数

$$\xi = x - Mt, \quad \tau = \sqrt{\sigma} t$$

を導入し、 $\beta$  を定数として、 $h(\zeta = x - Mt - \sqrt{\sigma} \beta t)$  なる解を仮定すると、方程式 (1) から常微分方程式

$$C_1 \frac{d^2 h}{d\zeta^2} + \varepsilon^2 C_2 h \frac{d^2}{d\zeta^2} (h^2) + C_3 \frac{d^4 h}{d\zeta^4} + \frac{G}{\sigma} h = 0 \quad (2)$$

を得る。ここで  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  は定数であり、

$$\begin{aligned} C_1 &= \beta^2 + s \left(M + \sigma^{1/2} \beta\right)^2, \\ C_2 &= \alpha M^2, \\ C_3 &= \frac{\mu}{\sigma} [J + \sigma \eta (1 - M^2) M^2] \end{aligned}$$

で与えられる。 $M < 1$  では  $C_1$ 、 $C_2$ 、 $C_3$  は全て正となる。第 3 章では方程式 (2) の解について、解析的、数値的に調べる。

## 2 線形分散関係

導出した波動方程式 (1) の非線形解を求める前に, 方程式の線形分散関係を調べておくことは有益である. 方程式 (1) で非線形項を無視し ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ),  $h$  を  $\exp[i(kx - \omega t)]$  の形の正弦波で与える.  $k, \omega$  はそれぞれ, 波数, 角振動数である. これを  $\varepsilon = 0$  とした方程式 (1) に代入すると分散関係式

$$(\omega - Mk)^2 - \mu Jk^4 - G = -\sigma s\omega^2 - \mu\sigma\eta(\omega^2 - k^2)\omega^2 \quad (3)$$

が得られる.  $\omega$  を  $k$  で表すため,  $\omega$  を  $\sigma^{1/2}$  の冪級数

$$\omega = Mk + \sigma^{1/2}\omega^{(1)} + \sigma\omega^{(2)} + \sigma^{3/2}\omega^{(3)} + \dots \quad (4)$$

で展開すると, 各係数は

$$\omega^{(1)} = \pm \left( \frac{G}{\sigma} - sM^2k^2 + \frac{\mu}{\sigma}Jk^4 \right)^{1/2}, \quad (5a)$$

$$\omega^{(2)} = -sMk, \quad (5b)$$

$$\omega^{(3)} = \frac{1}{2\omega^{(1)}} \left[ -\frac{G}{\sigma}s + 2s^2M^2k^2 - \frac{\mu}{\sigma}sJk^4 + \frac{\mu}{\sigma}\eta(1 - M^2)M^2k^4 \right] \quad (5c)$$

と求まる.  $\omega^{(1)}$  の複号 “ $\pm$ ” は分散曲線の 2 本の “枝” を示しており (図 2),  $\omega^{(3)}$  はそれぞれに対応する. もし  $G$  が無い場合, すなわち復元要素が無い場合,  $\omega^{(1)}$  は  $k < (\sigma s/\mu J)^{1/2}M$  に対して純虚数となるが, これははりと周囲の空気の相対的な運動に起因する不安定性を示唆している. 以下ではそのような場合を除くため条件  $s^2M^4 - 4\mu GJ/\sigma^2 \leq 0$  を課し,  $\omega^{(1)}$  が任意の  $k$  に対して実数となるようにする.

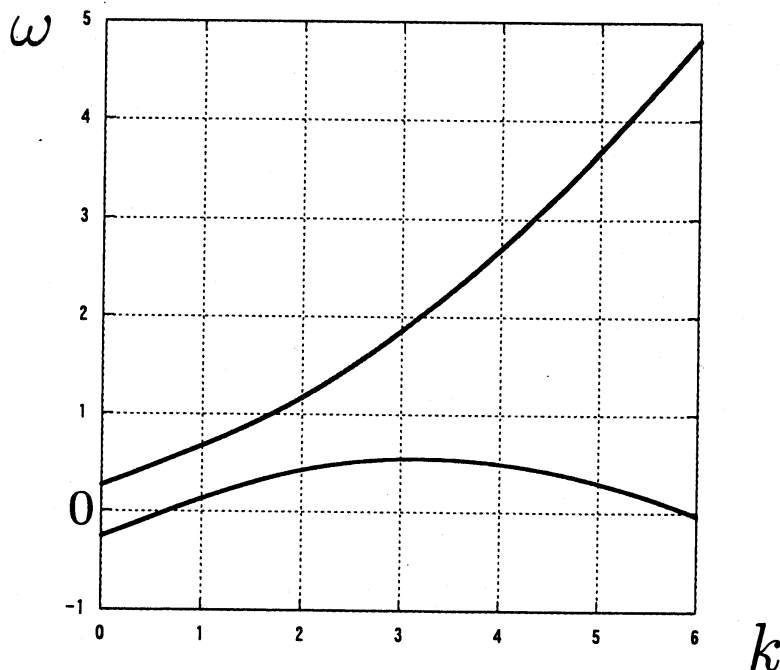


図 2: 分散曲線 ( $M = 0.4, J = 0.29, G = 0.07, \mu = 0.0156, \sigma = 0.0035$ )

いま一定速度で伝播する定常な線形解を探すと、解は正弦波で、位相速度  $\omega/k$  がその速度に等しくなるように求まる。作図的には  $(\omega, k)$  平面で原点を通る直線を引いて分散曲線との交点を求めることで見出される。図 2 から、明らかに実数の波数が求められない、すなわち有界な線形解が存在しない領域があることがわかる。この領域の上限は分散曲線の上の枝における位相速度の最小値で与えられ、下限は下の枝における最大値で与えられる。 $(\omega, k)$  平面においてこれらの限界を与える点を以下では critical point とよぶことにする。

critical point の値を微小パラメータ  $\sigma$  を用いた摂動展開により求める。 $(\omega, k)$  平面上で  $\beta$  を任意の定数として直線  $\omega = Mk + \sigma^{1/2}\beta k$  を引くとき、交点はこの直線と分散曲線 (4) を等しくおくことによって得られる:

$$\sigma^{1/2}\omega^{(1)} + \sigma\omega^{(2)} + \sigma^{3/2}\omega^{(3)} + \dots - \sigma^{1/2}\beta k \equiv W(k) = 0. \quad (6)$$

critical point は直線が分散曲線と接する点であるから、 $dW/dk = 0$  より次のように表される:

$$[(\beta + \sigma^{1/2}sM)^2 + sM^2]k^2 - \frac{\mu}{\sigma}Jk^4 - \frac{G}{\sigma} = 2\sigma\omega^{(1)}\omega^{(3)}, \quad (7)$$

$$2[(\beta + \sigma^{1/2}sM)^2 + sM^2]k - \frac{4\mu}{\sigma}Jk^3 = 2\sigma\frac{d}{dk}(\omega^{(1)}\omega^{(3)}). \quad (8)$$

ここでは  $O(\sigma)$  まで考慮している。以下では critical point を与える  $\beta$  と  $k$  をそれぞれ  $\beta_c$  と  $k_c$  で表す。まず微小な (7) と (8) の右辺を無視することにより、 $\beta_c$  と  $k_c$  の最低次の解が

$$\beta_c + \sigma^{1/2}sM = \pm \left( -sM^2 + \frac{2\mu}{\sigma}Jk_c^{(0)2} \right)^{1/2} \equiv \pm\beta_c^{(0)}, \quad (9a)$$

$$k_c = \left( \frac{G}{\mu J} \right)^{1/4} \equiv k_c^{(0)} \quad (9b)$$

と得られる。ここで  $\beta_c^{(0)}$  は正である。(9b) から上の枝と下の枝の critical point の波数が等しいことに注意する。高次の修正項は  $\beta_c$  と  $k_c$  をそれぞれ

$$\beta_c = \pm\beta_c^{(0)} - \sigma^{1/2}sM \pm \sigma\beta_c^{(2)}, \quad (10a)$$

$$k_c = k_c^{(0)} + \sigma k_c^{(2)} \quad (10b)$$

と展開することにより求めることができる (複号同順)。これから  $\beta_c^{(2)}$  と  $k_c^{(2)}$  は

$$\beta_c^{(2)} = \frac{1}{2\beta_c^{(0)}} \left[ 2s^2M^2 - \frac{2\mu}{\sigma}sJk_c^{(0)2} + \frac{\mu}{\sigma}\eta(1-M^2)M^2k_c^{(0)2} \right], \quad (11a)$$

$$k_c^{(2)} = -\frac{\eta}{4J}(1-M^2)M^2k_c^{(0)} \quad (11b)$$

と計算される。以上より、上の枝は

$$\beta = \beta_c^{(0)} - \sigma^{1/2}sM + \sigma\beta_c^{(2)} \equiv \beta_c^+ \quad (12)$$

に対して  $k = k_c$  で直線  $\omega = Mk + \sigma^{1/2}\beta k$  と接し、下の枝は

$$\beta = -\beta_c^{(0)} - \sigma^{1/2}sM - \sigma\beta_c^{(2)} \equiv \beta_c^- \quad (13)$$

に対して  $k = k_c$  で直線  $\omega = Mk + \sigma^{1/2}\beta k$  と接する。 $-\sigma^{1/2}sM$  の項のために上の枝と下の枝では  $|\beta_c^\pm|$  は異なる値をとることを注意しておく。

### 3 定常進行波解

非線形波動方程式 (1) の定常進行波解, すなわち常微分方程式 (2) の解を求める. 線形化を行うと方程式 (2) は  $k$  を波数として  $\exp(ik\zeta)$  の形の解を許す. 実数の  $k$  に対しては  $C_1^2 - 4GC_3/\sigma \geq 0$  が要求される. 前章の議論から, これは上の枝で  $\beta \geq \beta_c^+$ , 下の枝で  $\beta \leq \beta_c^-$  の条件に一致している.  $\beta_c^- < \beta < \beta_c^+$  なる  $\beta$  に対しては有界な線形の定常解は存在しない.

#### 3.1 厳密解

線形解の拡張の観点から Jacobi の楕円関数で表される解について考えるならば, 方程式 (2) がこの形の解を厳密解として許すことがわかる. 実際,  $h_0, k_0$  をそれぞれ非線形周期波の振幅, 波数;  $m^2$  を楕円関数の母数として,  $h$  を

$$h = h_0 \operatorname{cn}(k_0\zeta, m) \quad (14)$$

と表すと, 方程式 (2) に代入することにより  $h_0$  と  $k_0$  について, 関係式

$$h_0^2 = \frac{4k_0^2 m^2 C_3}{\varepsilon^2 C_2}, \quad k_0^2 = \frac{C_1}{2(1-2m^2)C_3} = \left(\frac{G}{\sigma C_3}\right)^{1/2} \quad (15)$$

が得られる. ちなみに,  $\operatorname{sn}, \operatorname{dn}$  で表される楕円関数も方程式 (2) を満足することができるが, このとき振幅または波数が実の関係式を満足することができない. 関係式 (15) の第 1 式は  $h_0$  が  $O(1)$  であるためには  $m^2$  が  $O(\varepsilon^2)$  程度に小さくしなければならないことを意味している. それゆえ厳密解は非線形であるが線形化された方程式の正弦波解に近いことがわかる. また第 2 式から, 線形分散関係から得られる最小または最大の位相速度において,  $k_0$  は  $k_c$  に  $O(\sigma)$  まで一致していることがわかる. これら二つの関係式から母数を消去すると波数は振幅を用いて

$$k_0^2 = \frac{C_1}{2C_3} + \frac{C_2}{2C_3} h_0^2 \quad (16)$$

と表せる.  $C_1, C_2, C_3$  の定義を代入すると関係式 (16) は

$$\begin{aligned} (\beta + \sigma^{1/2} sM)^2 + sM^2 &= \sigma s^2 M^2 - \sigma s \beta^2 \\ &+ 2\frac{\mu}{\sigma} [J + \sigma\eta(1 - M^2)M^2] k_0^2 - C_2 h_0^2 \end{aligned} \quad (17)$$

となる.  $(\omega, k)$  平面上でこの厳密解が存在する領域を調べるために  $\beta$  を  $\beta = \beta_c^\pm + \sigma\beta'$  とおき, 関係式 (17) に代入すると

$$\pm 2\sigma\beta_c^{(0)}\beta' = -\varepsilon^2 C_2 h_0^2 \quad (18)$$

となる. ここで正負の複号はそれぞれ分散曲線の上下の枝を示す.  $C_2 > 0$  であることを考慮すると,  $k = k_c$  で, 分散曲線の上の枝の下側 ( $\beta' < 0$ ) または下の枝の上側 ( $\beta' > 0$ ) に非線形の厳密解 (14) が存在することがわかる. critical point に近づくとき, すなわち  $\beta' \rightarrow 0$  のとき, 振幅  $h_0$  は 0 となり,  $h$  は波数  $k_c$  をもつ線形の正弦波解に帰着する.

### 3.2 漸近解析

次に常微分方程式 (2) を微小パラメータ  $\sigma$  を用いて漸近的に解く.  $h$  と  $\beta$  を  $\sigma^{1/2}$  によってそれぞれ

$$h = h^{(0)} + \sigma^{1/2}h^{(1)} + \sigma h^{(2)} + \dots, \quad (19a)$$

$$\beta = \beta^{(0)} + \sigma^{1/2}\beta^{(1)} + \sigma\beta^{(2)} + \dots \quad (19b)$$

と展開し,  $\zeta_n = \sigma^{n/2}\zeta$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) で定義される多重スケールを導入する.  $\zeta$  に関する微分は

$$\frac{d}{d\zeta} = \frac{\partial}{\partial\zeta_0} + \sigma^{1/2}\frac{\partial}{\partial\zeta_1} + \sigma\frac{\partial}{\partial\zeta_2} + \dots \quad (20)$$

と展開する.

$h^{(0)}$  に対する最低次の関係式は

$$Lh^{(0)} = 0 \quad (21)$$

と書くことができる. ここで微分演算子  $L$  は

$$L \equiv (\beta^{(0)2} + sM^2)\frac{\partial^2}{\partial\zeta_0^2} + \frac{\mu}{\sigma}J\frac{\partial^4}{\partial\zeta_0^4} + \frac{G}{\sigma} \quad (22)$$

である. 関係式 (21) の解として正弦波解

$$h^{(0)} = A \exp(i\kappa\zeta_0) + A^* \exp(-i\kappa\zeta_0) \quad (23)$$

を仮定する. ここで  $A$  は  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  に依存する複素振幅であり,  $A^*$  は  $A$  の複素共役である. 波数  $\kappa$  は分散関係

$$-(\beta^{(0)2} + sM^2)\kappa^2 + \frac{\mu}{\sigma}J\kappa^4 + \frac{G}{\sigma} \equiv D(\kappa) = 0 \quad (24)$$

を満足しなければならない.

計算を  $O(\sigma^{1/2})$  に進めると,

$$Lh^{(1)} = \left\{ i \left[ -2(\beta^{(0)2} + sM^2)\kappa + \frac{4\mu}{\sigma}J\kappa^3 \right] \frac{\partial A}{\partial\zeta_1} + 2(\beta^{(1)} + sM)\beta^{(0)}\kappa^2 A \right\} \times \exp(i\kappa\zeta_0) + \text{c.c.} \quad (25)$$

を得る.  $h^{(1)}$  で永年項が生じないようにするため次の 2 つの条件を要求する:

$$-2(\beta^{(0)2} + sM^2)\kappa + \frac{4\mu}{\sigma}J\kappa^3 = \frac{dD}{d\kappa} = 0, \quad 2(\beta^{(1)} + sM)\beta^{(0)} = 0. \quad (26)$$

第 1 の条件と (24) は,  $\beta^{(0)}$  と  $\kappa$  が critical point における  $\beta_c$  と  $\kappa_c$  の最低次で一致していることを示しており,  $\beta^{(0)}$  と  $\kappa$  はそれぞれ  $\pm\beta_c^{(0)}$  と  $\kappa_c^{(0)}$  で与えられる. 加えて第 2 の条件は  $\beta^{(1)} = -sM$  を与えており, これは  $\beta$  が  $\beta_c^\pm$  と  $O(\sigma^{1/2})$  まで一致していることを意味している.

展開を  $O(\sigma)$  まで実行すると, 次の関係式

$$Lh^{(2)} = \left( P \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_1^2} + Q|A|^2 A - RA \right) \exp(i\kappa\zeta_0) + \text{terms in } \exp(3i\kappa) + \text{c.c.} \quad (27)$$

が得られる. ここで  $P, Q, R$  は

$$P = \frac{1}{2} \frac{d^2 D}{d\kappa^2} = -(\beta^{(0)2} + sM^2) + \frac{6\mu}{\sigma} J\kappa^2 = \frac{4\mu}{\sigma} J\kappa^2, \quad (28a)$$

$$Q = \frac{4\varepsilon^2}{\sigma} \alpha M^2 \kappa^2, \quad (28b)$$

$$R = \left[ -2\beta^{(0)}\beta^{(2)} + 2s^2 M^2 - \frac{2\mu}{\sigma} s J\kappa^2 + \frac{\mu}{\sigma} \eta(1 - M^2) M^2 \kappa^2 \right] \kappa^2 \quad (28c)$$

であり,  $\beta^{(0)} = \beta_c^{(0)}$ ,  $\kappa = k_c^{(0)}$  である. また  $\beta^{(2)}$  は未定の定数である.  $\partial A/\partial \zeta_2$  と  $\partial A/\partial \zeta_1$  の項は条件 (26) のために自動的に消えることを注意しておく.  $h^{(2)}$  に対して永年項を生じない条件から (ここで  $D(3\kappa) \neq 0$ ), 方程式

$$P \frac{\partial^2 A}{\partial \zeta_1^2} + Q|A|^2 A - RA = 0 \quad (29)$$

を得る. これは正に定常な非線形 Schrödinger 方程式である. 方程式 (29) に至る過程で  $\beta$  と  $\kappa$  が  $\beta_c^\pm$  と  $k_c$  に  $O(\sigma^{1/2})$  まで一致することを見てきたが, 複素振幅  $A$  のゆっくりとした変調を考慮しているので,  $h$  は波数が  $\kappa = k_c^{(0)}$  のまわりで  $O(\sigma^{1/2})$  の狭いバンド幅をもつ準単色波であることに注意すべきである. また, もし未定定数  $\beta^{(2)}$  が  $\beta_c^{(2)}$  と選ばれたならば,  $R$  は 0 となることにも注意すべきである. このことから  $R$  の正の値は分散曲線の上の枝のすぐ下側または下の枝のすぐ上側の領域に対応していることがわかる.

方程式 (29) は一般に準単色波の波の変調を記述する一方で, 一定の振幅をもつ単色波の解をもつ. 実際, 解

$$A = A_0 \exp(i\kappa_1 \zeta_1 + \text{const.}) \quad (30)$$

を見出すのは容易い. ここで  $-P\kappa_1^2 = R - Q|A_0|^2$  である. この解が厳密解である周期解 (14) に一致するかどうかを調べる. 解 (14) の波数は  $k_c$  で与えられるので (式 (10a) も見よ),  $k_0$  は  $O(\sigma^{1/2})$  の項をもたない. また  $\zeta_1 = \sigma^{1/2} \zeta$  であるので, (14) は  $\kappa_1 = 0$  である解に一致すべきである. それゆえ  $|A_0|^2$  は

$$|A_0|^2 = R/Q \quad (31)$$

と決定される. ここで前と同様に  $\beta^{(2)} = \beta_c^{(2)} + \beta'$  とおいて, これを  $R$  に代入すると,  $R$  は  $\mp 2\kappa^2 \beta_c^{(0)} \beta'$  に帰着する. 関係式 (28) の  $Q$  を用い,  $2|A_0| = h_0$  に注意すれば, 関係式 (31) は関係式 (18) と等価である. それゆえ  $\kappa_1 = 0$  の単色波解 (30) は厳密解の周期解に一致していることがわかる. しかし漸近解析によって  $\kappa_1 \neq 0$  である別の周期解が critical point の周囲に存在することがわかる.

これらの解の他に, 無限遠方で攪乱の無い条件を課すと, 方程式 (29) は  $R > 0$  に対して孤立波解を許す. このとき  $A$  は

$$A = A_s \operatorname{sech}(\Lambda_s \zeta_1 + \text{const.}) \quad (32)$$

で与えられる. ここで  $A_s^2 = 2R/Q$ ,  $\Lambda_s^2 = R/P$  である. これを式 (23) に代入すると,  $h$  は

$$h = 2\sqrt{\frac{2R}{Q}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{\sigma R}{P}} \zeta + \text{const.}\right) \cos(\kappa \zeta) + O(\sigma) \quad (33)$$

と与えられる.

もし無限遠方で有限値をとる境界条件を課し,  $A$  を  $|A| \exp(i\psi)$  の形で探るとき, 任意定数  $\psi_0$  で固定された位相  $\psi$  をもつクノイダル波列解

$$|A|^2 = z_2 + (z_3 - z_2) \operatorname{cn}^2 \left\{ \left[ \frac{(z_3 - z_1)Q}{2P} \right]^{1/2} (\zeta_1 + \text{const.}) \right\} \quad (34)$$

が存在する. ここで  $z_1, z_2, z_3$  は 3 次方程式  $-Qz^3 + 2Rz^2 + Sz = Q(z - z_1)(z - z_2)(z_3 - z) = 0$  の実解であり,  $z_1 \leq z_2 < z_3$  である. また  $z_1$  と  $z_2$  のどちらかは 0 であり,  $S$  は  $R^2 + QS \leq 0$  を満足する任意の定数, 楕円関数の母数  $m$  は  $[(z_3 - z_2)/(z_3 - z_1)]^{1/2}$  で与えられる.  $|A|^2$  に対する解は  $z_2$  と  $z_3$  の間で存在可能である.  $R > 0$  かつ  $-R^2/Q < S < 0$  に対して根は  $z_1 = 0 < z_2 < z_3$  と順序づけられ,  $R > 0$  かつ  $S > 0$  に対しては根は  $z_1 < z_2 = 0 < z_3$  と順序づけられる. 一方  $R < 0$  の場合,  $S > 0$  に対しては  $z_1 < z_2 = 0 < z_3$  となり,  $S < 0$  に対しては正の根が存在せずそれゆえ  $|A|^2$  の適切な解が存在しない.  $R > 0$  で  $S \rightarrow 0$ , 従って  $z_2 \rightarrow z_1 = 0$ ,  $z_3 \rightarrow 2R/Q$ ,  $m^2 \rightarrow 1$  なる極限をとると, クノイダル波列は孤立波に帰着する. 解 (34) は critical point の近傍で存在するが, 孤立波は分散曲線の上の枝の critical point のすぐ下側または下の枝の critical point のすぐ上側で存在できることに注意すべきである. さらにもし  $\partial\psi/\partial\zeta_1 \neq 0$  ならば, 振幅だけでなく位相においても変調を受けた波列が存在する.

### 3.3 数値解析

前節の解析の結果を利用して方程式 (2) を数値的に解く. 方程式 (2) は次のように, 一回積分できて

$$C_1 \left( \frac{dh}{d\zeta} \right)^2 + 2\varepsilon^2 C_2 \left( h \frac{dh}{d\zeta} \right)^2 + C_3 \left[ 2 \frac{dh}{d\zeta} \frac{d^3 h}{d\zeta^3} - \left( \frac{d^2 h}{d\zeta^2} \right)^2 \right] + \frac{G}{\sigma} h^2 = C \quad (35)$$

となる. 前方で攪乱の無い条件を満たす解を探るとき, 積分定数  $C$  は 0 である.  $C_1 < 2\sqrt{C_3 G/\sigma}$  の場合, 無攪乱状態  $h \equiv 0$  は線形不安定になる. このとき  $\zeta \rightarrow -\infty$  で  $h \rightarrow 0$  を仮定すると線形不安定の解の振る舞いは漸近的に

$$h = h_0 \exp(k_d \zeta) \cos(k_0 \zeta - \Theta) \quad (36)$$



と書くことができる。ここで  $h_0 (\ll 1)$  と  $\Theta$  は任意定数であり、 $k_d$  と  $k_0$  は

$$\begin{aligned} k_d &= \sqrt{\frac{-C_1 + 2\sqrt{C_3 G/\sigma}}{4C_3}}, \\ k_0 &= \sqrt{\frac{C_1 + 2\sqrt{C_3 G/\sigma}}{4C_3}} \end{aligned} \quad (37)$$

である。この漸近解を用いて、方程式 (2) を Runge-Kutta 法で数値的に解く。計算の各段階において保存量  $C (= 0)$  の値を調べることにより計算誤差の評価を行う。定数に適当な値<sup>1)</sup>を与えたときの数値計算結果を図 3 と図 4 に示す。図 4 は図 3 の部分拡大図である。図 3 は得られた定

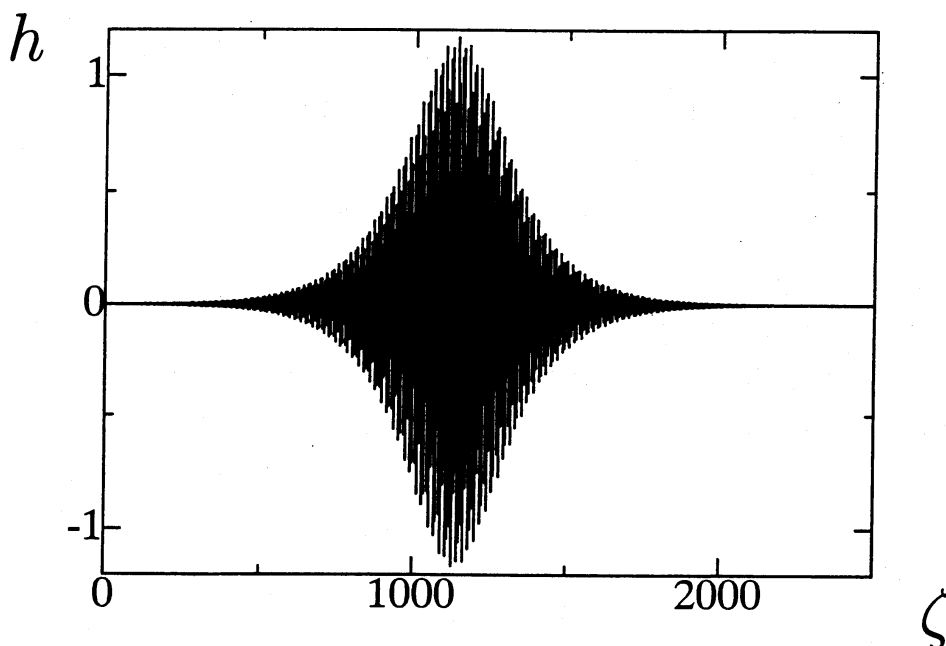


図 3: 数値解 ( $C_1 = 10.1585$ ,  $\varepsilon = 0.1$ ,  $C_2 = 0.0351$ ,  $C_3 = 1.29$ ,  $G = 0.07$ ,  $\sigma = 0.0035$ )

常進行波解が包絡孤立波解の様相を呈していることを示している。これまで議論からわかるように、この種の解の存在は  $C_1$ , すなわち  $\beta$  の値に強く依存している。分散曲線の上の枝の下側または下の枝の上側で、原点を通る直線が critical point から大きく離れるように  $\beta^{(2)}$  を与えていくなれば、それにつれて波の振幅は増大し、遂には壁に接触するようになり、最後には計算誤差の増大とともに包絡線も壊れてしまうことがわかる。

#### 4 まとめ

長い円管と弾性はりからなる系において、円管の中心軸上を一定速度で動くはり上を伝播する非線形空力弾性波動を記述する方程式 (1) の導出の概要を述べ、その定常進行波解に関する考察を、偏微分方程式 (1) から得られる常微分方程式 (2) を解析的、数値的に解くことによりおこなっ

<sup>1)</sup>定数の値は山梨リニア実験線や新幹線で用いられている材料定数を参考にしてている。

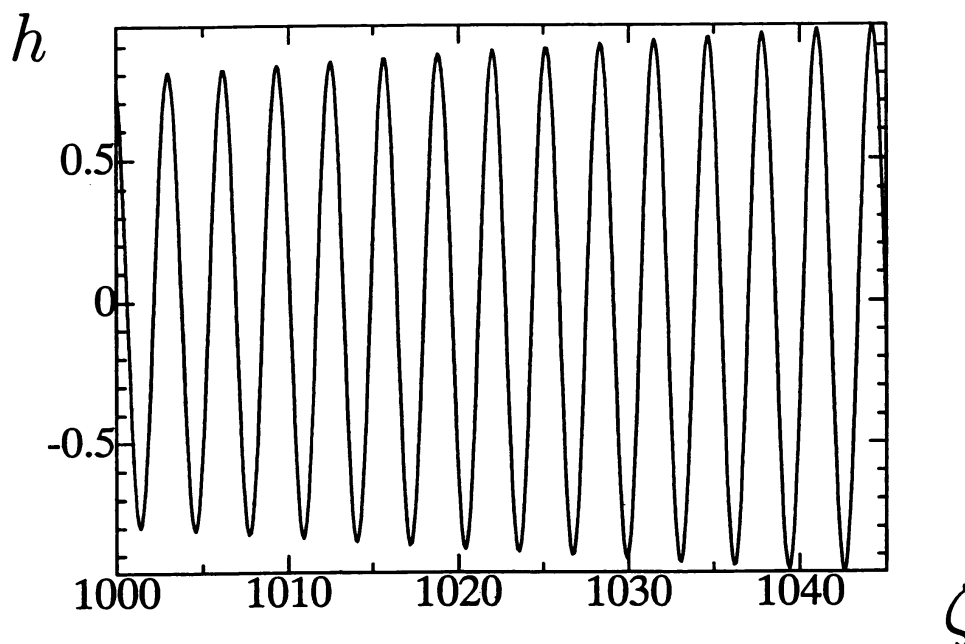


図 4: 図 3 の部分拡大図

た. その結果, (i) 方程式 (2) が cn 関数で表される厳密解をもつこと, (ii)  $\sigma$  による多重尺度法を用いた漸近解析から周期波列と包絡孤立波を解としてもつこと, (iii) 線形分散曲線と, (i), (ii) で得られた解の存在領域の関係, (iv) 上流で攪乱の無い境界条件の下で得られる数値解が (ii) の包絡孤立波解とよい一致を示すことを明らかにした.

## 参考文献

- [1] N. Sugimoto, K. Kugo, Y. Watanabe, Derivation of nonlinear wave equation for flexural motions of an elastic beam traveling in an air-filled tube, *Journal of Fluids and Structures* 16 (2002) in press.
- [2] N. Sugimoto, Aeroelastic stability of a beam traveling in a tunnel lined with resonators, *AIAA Journal* 34 (1996) 2005-2013.