

離散格子モデルにおける非線形波動

京大・大学院工学研究科 川原琢治 (Takuji Kawahara)
Graduate School of Engineering, Kyoto Univ.

1. はじめに

連続体における波動現象は偏微分方程式によって記述されるが、このとき独立変数の時間・空間も従属変数も連続変数である。これに対し、格子モデルでは、離散空間を取り扱うので、支配方程式は連立常微分方程式つまり微差分方程式となる。微分方程式を数値的に解く際には、離散化によって偏差分方程式に書き換えられる。つまり、離散時間・離散空間における連続従属変数が取り扱われるが、非線形波動の分野ではソリトン方程式の可積分性を保持した差分化の問題が興味の対象となっている [1]。また、最近では、従属変数まで離散化する“超離散”という概念がセルオートマトンの問題と関連して導入され、ソリトンやカオスの問題が取り扱われている [2]。

非線形波動は連続体モデルあるいは格子モデルによって記述される。物質を分子レベルでミクロに記述する場合は、分子動力学としての格子モデルが適用されるが、連続体近似により流体や固体の連続体モデルとなる。一方、マクロな格子モデルとして、連続体の要素から構成される周期構造物などが考えられる。たとえば、連続体で記述されるパルスの周期的な配列を格子モデルとして扱う“ソリトン格子”という見方や、弾性体要素から構成される周期構造物（トラス構造など）は、いわば“マクロな格子”であるが、ミクロな格子モデルと数学的に類似の方程式で記述される。また、分子構造をもつ固体の格子モデルは、連続体近似のもとで回転やせん断を考慮した極性連続体 (micropolar continuum) に対応し、Cosserat 理論や Timoshenko 理論と関連して興味を持たれている。さらに、格子モデルにおいては、粘弾性体のモデルとして減衰効果を取り入れることや不純物・非一様性などの導入が比較的容易であること、破壊現象は連続体近似では十分に記述できないことなどから、格子モデルに基づき取り扱いは重要である。

以上のように、離散系の研究は基礎面でも応用面でも多岐にわたっているが、本報告では、非線形格子モデルにおける波動に着目し、離散性によって生じる波動現象に焦点をあてた解説を試みる。まず、格子モデルの離散性に起因する非線形格子に特有の現象を紹介し、格子モデルにおける非線形波動の具体例として、筆者の研究室で行われた研究の一端を略述する。

2. 離散性がもたらすもの

離散性のために格子モデルが連続体モデルと異なる主要な点は、次の2点である。

1) 並進不変性の欠如： 連続体では空間について並進不変性が成り立つが、離散系では格子間隔の並進についての不変性しか成立しない。

2) 波数のカットオフ: 連続体ではいくらでも高波数(短波長)が許されるが、格子では格子間隔に対応する波数より高波数は許されず、波数にカットオフ(スペクトルに上限)が存在する。

以上の性質は、格子中の非線形波動の振る舞いに離散系に特有の現象を引き起こす。たとえば、並進不変性の欠如は連続体でのソリトンに対応する局在パルスの減衰をもたらす。これは、局在パルスが格子中を伝わる時、格子点はパルスの最大振幅点あるいは中心に関して対称性の異なる偶・奇の配置をとり得ること、そしてそれにエネルギー差(Peierls-Nabarro potential barrier)があることによる。

波数のカットオフが関連する現象として、本質的局在モード(intrinsic localized mode)あるいは離散ブリーザー(discrete breather)がある[3]。これは、連続体におけるソリトンとは異なり、少数個の隣接する格子が交互に異なる符号の振幅をもち、高い振動数で振動する格子スケールの局在構造である。非線形性は一般に高波数にエネルギーを移そうとするが、離散系では波数のカットオフのため格子間隔に対応する波数以上にはエネルギーは移れない。このため、非線形効果とカットオフ機構とのつり合いによる局在振動を生じると考えられる。この意味で、離散ブリーザーは非線形離散系特有の現象であると言える。

局在パルスの減衰

局在パルスの減衰の例として、転位のモデルである Frenkel-Kontorova 方程式

$$\frac{d^2 y_n}{dt^2} - (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \sin y_n = 0, \quad (1)$$

を取り上げる。この方程式は連続体近似によって、Sine-Gordon 方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \sin y = 0, \quad (2)$$

となる。Sine-Gordon 方程式はキルク・ソリトン解をもつ可積分なソリトン方程式である。離散系である Frenkel-Kontorova 方程式では、図1 (a)(b)に示されるように、キルクの中心が2つの格子の間に位置する場合とちょうど格子上に位置する場合とがある。前者はエネルギー的に後者よりも低い状態にあり安定であるが、後者は不安定となる。キルクが移動するときには2つの状態を交互にとるが、そのエネルギー差が Peierls-Nabarro barrier である。キルクは移動するに従い波としてのエネルギーを失い、このエネルギーは輻射として放出され、格子間隔のスケールの微小変動となる。図1 (c)(d)は、ある時刻での格子の変位と速度を示しており、キルクの後方に微小な振動が見られる。図1 (e)は初期速度 $v = 0.8$ のキルクの速度の時間変化を示している。キルクは急激にエネルギーを失い減衰(減速)し、最終的には静止することがわかる。Peierls-Nabarro barrier に対応する速度変動が図 (e)の幅広の線となっている(Peyrard [4]より引用)。

離散局在モード

格子中に不純物があるとそのまわりに局在モードを生じることがよく知られているが、

一様な非線形格子中でも空間的に強く局在したモードが生成される。これは不純物による局在モードと異なり、非線形性に起因するものであることから本質的局在モード (intrinsic localized mode) あるいは離散ブリーザー (discrete breather) と呼ばれている。この空間的局在モードの振動数は非線形性のために線形振動の禁止帯に存在する。

4次の非線形ポテンシャルをもつ非線形格子

$$m \frac{d^2 y_n}{dt^2} = K_2(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + K_4[(y_{n+1} - y_n)^3 - (y_n - y_{n-1})^3], \quad (3)$$

に対する定常局在モードは

Sievers-Takeno mode:

$$y_n^{(ST)}(t) = A(\dots, \xi_2, \xi_1, 1, \xi_1, \xi_2, \dots) \exp(-i\omega t), \quad |\xi_1| < 1, |\xi_n| \simeq 0 (n \gg 2),$$

$$\omega = 2\sqrt{K_2/m} \sin(k/2), \quad \omega > \omega_L \equiv 2\sqrt{K_2/m},$$

のように与えられる。これは、Sievers-Takeno [5] によって数値的に導かれた。さらに Page [6] によって対称性の異なる解

Page-mode:

$$y_n^{(P)}(t) = A(\dots, -\xi_2, \xi_1, -1, 1, -\xi_1, \xi_2, \dots) \exp(-i\omega t), \quad |\xi_1| < 1, |\xi_n| \simeq 0 (n \gg 2),$$

が見いだされた。これら局在モードを図2に模式的に示す。(a) は Sievers-Takeno モード、(b) は Page モードである。その後、様々な非線形格子について局在モードの存在が明らかにされている。たとえば、4次の非線形性をもつ2原子格子に対しては、音響型と光学型のそれぞれについて、偶・奇の対称性をもつモードが存在することが明らかにされている [7]。

カオスのブリーザー

非線形格子に長波長の正弦波を初期条件として与え、周期境界条件のもとに数値的に解くと再帰現象を起こすことは、Fermi-Pasta-Ulam の問題として有名である。ところが非常に高波数 (格子間隔の波数に対応する最大波数モード) の初期条件の場合には、非線形格子 (1) は、変調不安定の後には多数の離散ブリーザーを生じることがある。それらは相互に衝突を繰り返した後、少数の局在ブリーザーになり、最終的には単一のほぼ定常なブリーザーとなり格子に捕捉されるか、最終的に減衰するという結果が数値計算によって得られている。この場合のブリーザーは不規則な運動をするので“カオスのブリーザー (chaotic breather)” と呼ばれている。Cretegnny 達 [8] による数値計算の例を図3に示す。図3 (a) は格子点におけるエネルギーの時間変化を濃淡表示したもので、白い部分のエネルギーは0、エネルギーの大きい部分が濃く表示されている。図3 (b)~(d) は3つの時刻におけるエネルギー分布を表す。(b) は変調不安定が発生した時刻 $t_1 = 70$ 、(c) は単一の局在構造が形成された時刻 $t_2 = 3000$ 、(d) は局在構造が消え一種の熱平衡状態になった時刻 $t_3 = 6 \times 10^5$ におけるエネルギー分布を表す。

3. 離散型非線形シュレディンガー方程式

局在モードとその性質を理解するのに適当な例として Kivshar-Campbell [9] による結果を紹介する。彼らは、離散非線形シュレディンガー方程式

$$i\frac{d\psi_n}{dt} + K(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + \lambda|\psi_n|^2\psi_n = 0, \quad (4)$$

について以下のような局在解を導いている。

a) 低周波数局在モード (音響的モード): $(\lambda > 0)$

A-mode:

$$\psi_n^{(A)}(t) = A(\cdots, 0, \xi_1, 1, \xi_1, 0, \cdots) \exp(-i\omega t), \quad \xi_1 = K/\lambda A^2, \quad \omega \simeq -\lambda A^2.$$

B-mode:

$$\psi_n^{(B)}(t) = B(\cdots, 0, \xi_2, 1, 1, \xi_2, 0, \cdots) \exp(-i\omega t), \quad \xi_2 = K/\lambda B^2, \quad \omega \simeq -\lambda B^2.$$

保存量 $N = \sum_n |\psi_n|^2$ より $A^2 = 2B^2$ となり、A, B モードのエネルギー差は

$$\Delta E_{AB} = E_A - E_B = -\frac{1}{2}\lambda A^4 + \lambda B^4 = -\frac{1}{4}\lambda A^4 < 0.$$

A モードのエネルギーは B モードのエネルギーより小さくなり、この差が Peierls-Nabarro potential barrier である。音響的モードであるソリトンは伝播にともない輻射波を放出し減衰する。

b) 高周波数局在モード (光学的モード): $(\lambda < 0)$

A-mode: (Sievers-Takeno mode)

$$\psi_n^{(A)}(t) = A(\cdots, 0, -\nu_1, 1, -\nu_1, 0, \cdots) \exp(-i\omega t), \quad \nu_1 = K/|\lambda|A^2, \quad \omega \simeq 4K + |\lambda|A^2.$$

B-mode: (Page mode)

$$\psi_n^{(B)}(t) = B(\cdots, 0, -\nu_2, 1, -1, \nu_2, 0, \cdots) \exp(-i\omega t), \quad \nu_2 = K/|\lambda|B^2, \quad \omega \simeq 4K + |\lambda|B^2.$$

エネルギー差は

$$\Delta E_{AB} = E_A - E_B = \frac{1}{4}|\lambda|A^4 > 0.$$

B モードのエネルギーは A モードのエネルギーより小さく、Sievers-Takeno モードは不安定であるが Page モードは安定である。以上、4種類のモードの概念図を図4に示す。図(a) (b) の音響的モードは長波長近似で連続体のソリトンに一致するのに対し、図(c) (d) の光学的モードは離散系に固有のモードである。

(4) 式と非線形項が異なる Ablowitz-Ladik 方程式

$$i\frac{d\psi_n}{dt} + K(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + \frac{1}{2}\lambda|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}) = 0, \quad (5)$$

は、可積分な離散方程式である。この場合には、低周波数局在モードとして、次の2つの解がある。

A-mode:

$$\psi_n^{(A)}(t) = A(\cdots, 0, \xi_1, 1, \xi_1, 0, \cdots) \exp(-i\omega t), \quad \xi_1 = K/\lambda A^2, \quad \omega \simeq -2\sqrt{\lambda K A^2}.$$

B-mode:

$$\psi_n^{(B)}(t) = B(\cdots, 0, \xi_2, 1, 1, \xi_2, 0, \cdots) \exp(-i\omega t), \quad \xi_2 = K/\lambda B^2, \quad \omega \simeq -\lambda B^2.$$

方程式の保存量より $A^2 = \lambda B^4/4K$ が導かれ、2つのモードのエネルギー差は

$$\Delta E_{AB} = E_A - E_B = 4A\sqrt{K/\lambda} - 2B^2 = 0,$$

となり、Peierls-Nabarro potential barrier は0である。したがって、音響的モードは減衰せずに伝わる。これは Ablowitz-Ladik 方程式が可積分なソリトン方程式であることを反映している。

4. 格子モデルの数値シミュレーション結果

前節までには、格子モデルにおける波動の特徴的な点について述べた。以下では、筆者の研究室の大学院生が行った格子モデルに関する数値シミュレーションの結果の中から、格子モデルの特徴である‘ソリトンの減衰’と‘カオスのブリーザー’を示す具体例を取り上げて概要を紹介する。

1) 2原子格子における音響ソリトンの減衰[10] :

4次の非線形ポテンシャルをもつ2原子格子方程式は無次元形で

$$\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} + \alpha'\{(\xi_{n+1} - \xi_n)^3 - (\xi_n - \xi_{n-1})^3\}, \quad (n : \text{odd}), \quad (6-a)$$

$$\gamma\frac{d^2\xi_n}{dt^2} = \xi_{n+1} - 2\xi_n + \xi_{n-1} + \alpha'\{(\xi_{n+1} - \xi_n)^3 - (\xi_n - \xi_{n-1})^3\}, \quad (n : \text{even}), \quad (6-b)$$

と書ける。ここで、 $\gamma \equiv m/M$ ($0 < \gamma \leq 1$) は質量比、 α' は非線形性の強さを表すパラメータである。(6) 式に対応する連続体近似では音響型ソリトンと光学型の包絡ソリトンが存在する[11]。

4次のルンゲ・クッタ法によって(6)式を数値的に解いた結果[11]の中から、音響ソリトンの減衰を表す結果の一例を図5に示す。初期条件としては格子左端の1つの格子($n=1$)のみに大きさ1の速度を与えた($\xi_1=1$ 、他の $\xi_n, \dot{\xi}_n$ はすべて0)。格子中には初期条件に含まれる波数成分の各々に対応する波が伝わるが、適当な非線形パラメータに対しては、音響ソリトンが形成され波群の先頭を伝わる。その伝播の様子を質量比 $\gamma=0.8$ 、非線形パラメータ $\alpha'=2.0$ の場合の相対変位 $u_n \equiv \xi_n - \xi_{n-1}$ について示したのが図5(a)である。この図から明らかなように、音響ソリトンの振幅は伝播とともに減衰し、後方に微小な振動が発生している。この微小な振動は前述の Peierls-Nabarro potential barrier に関連して生成されたものと考えられ、離散性の効果である。

次に、同一の初期条件に対し、質量比と非線形性を変えて、格子上の一点($n=501$)で観測される最大相対変位 $|u_n|$ と最大エネルギー E_n をプロットしたのが図5(b)である。この結果より、質量比が $0.5 < \gamma < 0.7$ の領域で減衰が大きいこと、また、非線形性が強くなるほど減衰が大きくなることがわかる。この結果は減衰率を与えるものではないが、少なくとも以下のことは言える。 $\gamma=1$ とすると1原子格子の場合になり、このときソリトンは1原子格子の離散性による減衰は受けるが質量比の影響は受けないはずである。これに比べ、特定の質量比の領域でソリトンは強く減衰している。これは、音響ソリトンの対称性の異なるモードのエネルギー差が質量比 γ に依存するため、あるいは光学モードの影響を強く受けるためであると考えられる。また、減衰は非線形性が強いほど大きくなっている。非線形性が強いソリトンほど幅が狭くなって格子スケールに近づくため離散性の影響がより大きく現れると考えられる。

2) 外部弾性力のある Toda 格子の変調不安定性[12] :

Toda 格子に外部線形弾性力が加わった場合の方程式

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = 2 \exp(-u_n) - \exp(-u_{n+1}) - \exp(-u_{n-1}) - \alpha u_n, \quad (7)$$

は、周期構造物の格子モデルの最も簡単な例の一つである。Toda 格子は可積分な格子方程式であり、音響的なソリトン解をもつが、外部弾性力が加わると光学的な振る舞いを示し、包絡ソリトンのような解をもつことが示されている[13]。ここでは、正弦波を初期条件(i.e. $u_n(0) = A_0 \cos Kn$, $\dot{u}_n(0) = \Omega A_0 \sin Kn$, $\Omega^2 \equiv 4 \sin^2(K/2) + \alpha$)として(7)式を周期境界条件(格子数 $N=256$)のもとに解き、変調不安定性を調べた結果の一部を示す。

Toda 格子($\alpha=0$)の場合には、初期正弦波は常に変調不安定であり、非線形周期解に移行することが示される。 $\alpha \neq 0$ の場合には、低波数域(K が小さい領域)に変調安定領域が現れ α の増大にともないこの安定波数域が広がる。初期振幅 A_0 と波数 K を変えたときの変調不安定性の判定結果(無次元時間 $t=8000$ で判定)を表1(a)~(c)に示す。また、表1(d)には、変調不安定の結果形成された局在構造が長時間の後にも存在するか消失するかを調べた結果を示す。この結果についての詳細な議論はここでは省略し、変調不安定の場合に、前述した chaotic breather と呼ばれる現象が現れた例を示すことにする。

図6は初期正弦波として最大波数 ($K = \pi$) モードを与え、変調不安定となった後の適当な時刻におけるエネルギー分布を示す。(a)は $\alpha = 0.1$ 、(b)は $\alpha = 10$ の場合である。図6(a)は $t = 6000$ に存在した2つの局在構造が融合し、 $t = 14000$ で単一の局在構造に変化していることを示している。この場合にはさらに時間が経つと局在構造は減衰し、一種の熱平衡状態となる。図6(b)は $\alpha = 10$ の場合で、時刻 $t = 30000$ には単一の鋭い局在構造が形成されている。この局在構造は減衰せずに、非常に長時間にわたって存在し続ける。

以上より、 α が大きい場合には、高波数正弦波 ($K = \pi$) は、変調不安定の後、局在構造を生じ、それらが相互作用して融合し、単一の局在構造が形成されることを示している。この局在構造は前述の Cretegnny 達[8]の chaotic breather と類似のものである。これは数値シミュレーションの結果で、局在構造の相互作用や融合、減衰のメカニズムはまだよく分かっていない。

5. まとめ

本報告では、格子の離散性がひき起こす特徴的な波動現象の一端について述べた。それは、格子の離散性による波動の減衰、離散ブリーザーと呼ばれる格子系特有の波動、あるいはカオス的ブリーザーと称される局在構造である。離散ブリーザーの概念は約10年前に武野先生らによって導入されたのが始まりで、その後、数多くの多岐にわたる研究が行われてきた。しかしながら、例えば、カオス的ブリーザーをはじめとして、離散ブリーザーのメカニズムの詳細については、まだよく分かっていない点も多い。

非線形性による局在化はソリトンなどのエネルギー集中や破壊における応力集中などとして重要であり、固体や構造物の強度の問題、破壊の問題と関連する研究も行われてきたが、非線形性が増大すれば局在化が強まるので、離散系では離散性の効果がますます重要となる。このことは、離散ブリーザーの重要性を示唆しており、構造物における波動や破壊現象を考えると、離散ブリーザーの役割を明らかにする必要があることを示している。また、これらの問題では、格子の不均一性 (impurity, defect, crack, disorder) を考慮すべき場合が多く、従来考慮されることのなかった離散ブリーザーと不均一性との関係を明らかにすることも重要な課題であると思われる。本講究録中の土井祐介氏の報告は、不均一性を考慮して離散ブリーザーの基本的なメカニズムを探ろうとする研究の一つであることを付記しておく。

参考文献

- [1] 中村佳正編: 可積分系の応用数理、裳華房 (2000).
- [2] 薩摩順吉他: 超離散、数理科学特集 435号 サイエンス社 (1999).
- [3] S.Flach, C.R.Willis: Discrete breathers, *Phys.Rep.* **295** (1998) 181–264.
- [4] M.Peyrard: Simple theories of complex lattices, *Physica D* **123** (1998) 403–424.
- [5] A.J.Sievers, S.Takeno: Intrinsic localized modes in anharmonic crystals, *Phys.Rev.Lett.* **61** (1988) 970–973.
- [6] J.B.Page: Asymptotic solutions for localized modes in strongly anharmonic periodic systems, *Phys.Rev.B* **41** (1990) 7835–7838.
- [7] A.Franchini, V.Bortolani, R.F.Wallis: Intrinsic localized modes in the bulk and at the surface of anharmonic diatomic chains, *Phys.Rev.B* **53** (1996) 5420–5429.
- [8] T.Cretegny, T.Dauxois, S.Ruffo, A.Torcini: Localization and equipartition of energy in the β -FPU chain: Chaotic breathers, *Physica D* **121** (1998) 109–126.
- [9] Y.S.Kivshar, D.K.Campbell: Peierls-Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes, *Phys. Rev. E* **48** (1993) 3077–3081.
- [10] 津本宏樹: 2原子格子モデルにおける非線形波動、京都大学大学院工学研究科修士論文 (2000).
- [11] N.Yajima, J.Satsuma: Soliton solutions in a diatomic lattice system, *Prog.Theor.Phys.* **62** (1979) 370–378.
- [12] 松岡 憲: 非線形格子における波動の変調不安定性とエネルギーの局在化現象、京都大学大学院工学研究科修士論文 (2000).
- [13] D.Yagi, T.Kawahara: Strongly nonlinear envelope soliton in a lattice model for periodic structure, *Wave Motion* **34** (2001) 97–107.

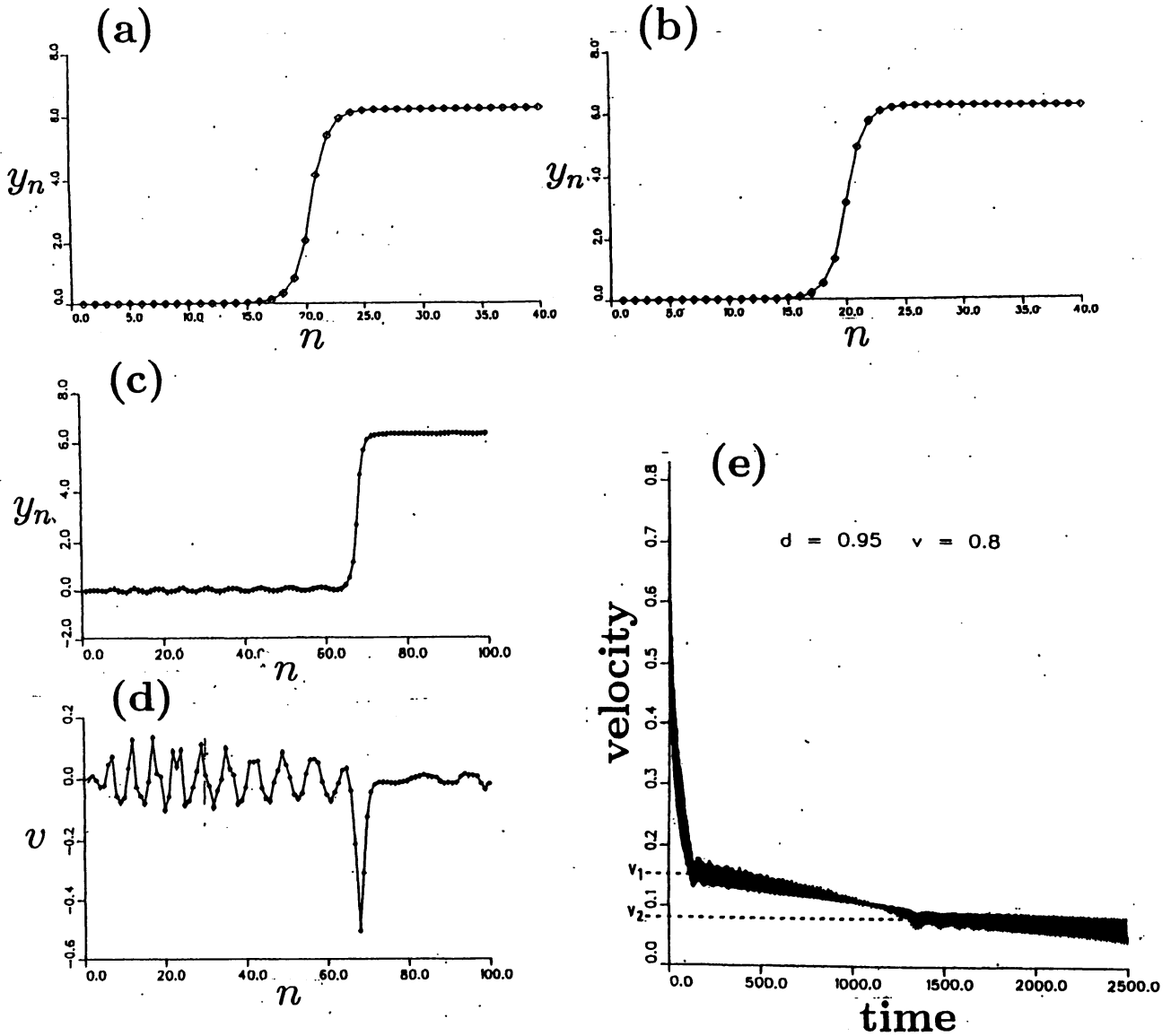


図1 : Frenkel-Kontorova 方程式のキंक解 (a) キंक中心が格子の中間 (安定) (b) キंक中心が格子上 (不安定) (c),(d) 速度 $v = 0.22$ のキंकの格子変位と速度変動 (e) キंक速度の減衰 (初期速度 $v_0 = 0.8$) (キंकが Peierls-Nabarro barrier を越えるときに生じる速度変動が幅広の線となっている) (Ref.[4] より引用)

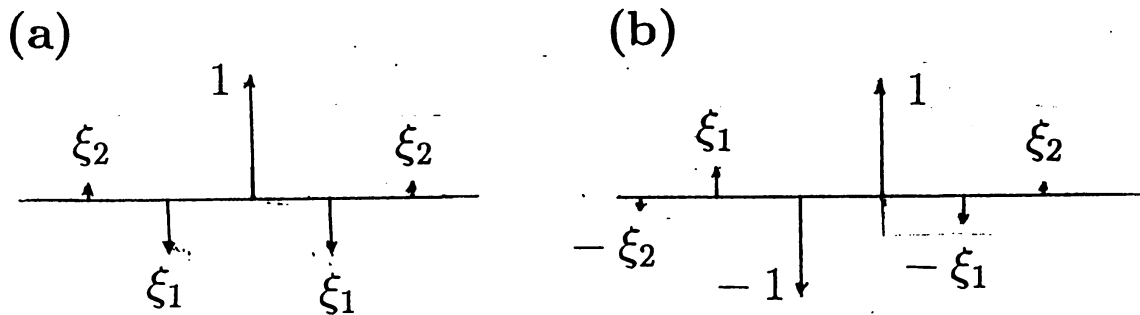


図2 : 定常局在モードの概念図 (a) Sievers-Takeno モード (b) Page モード

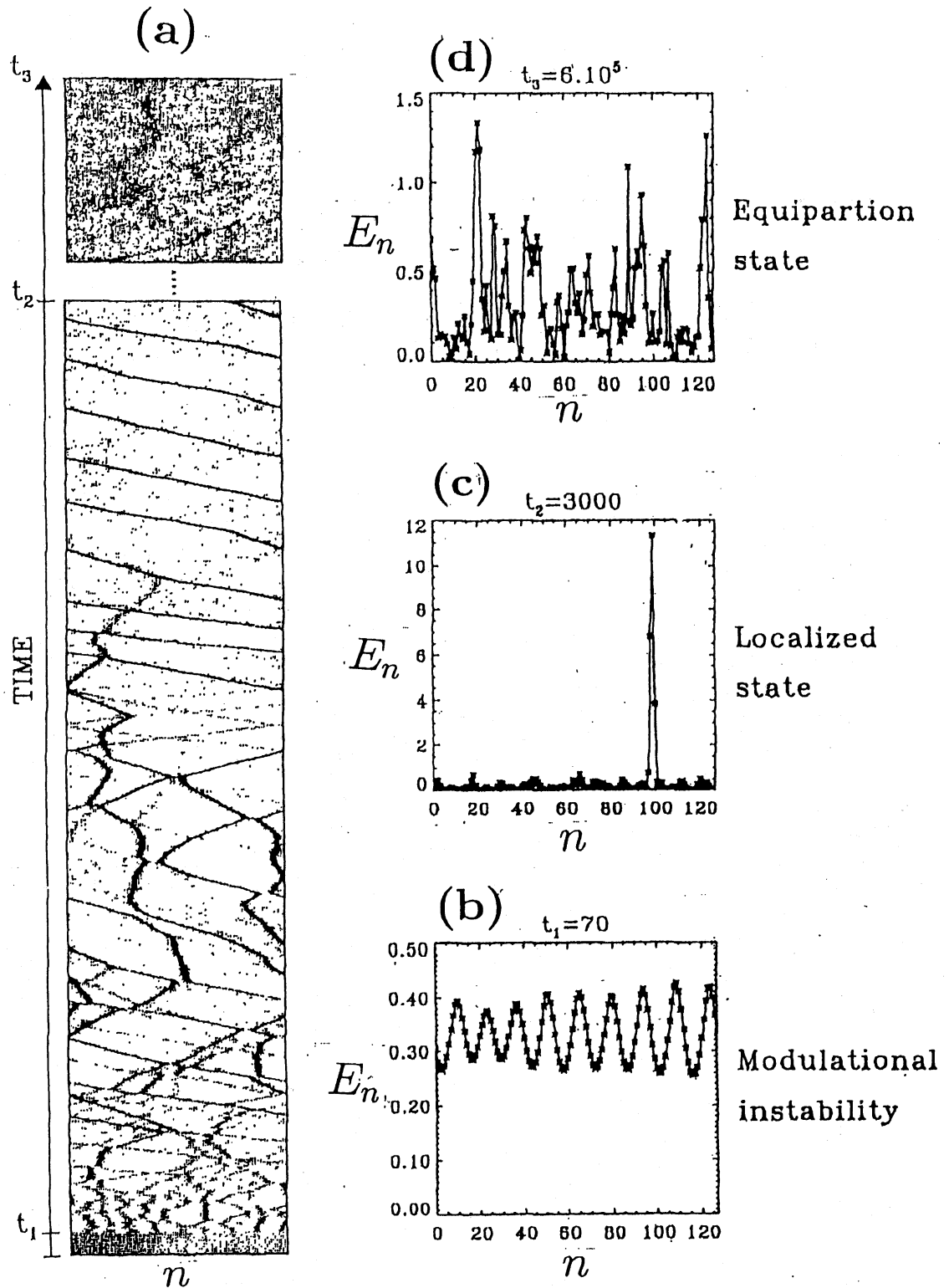


図3： 非線形格子 (3) におけるカオスのブリーザーの生成 (a) エネルギー E_n の時間変化ダイアグラム (濃淡表示) (b) 変調不安定の発生 ($t_1 = 70$) (c) 単一局在構造の生成 ($t_2 = 3000$) (d) 熱平衡状態 ($t_3 = 6 \times 10^5$) (Ref.[8]より引用)

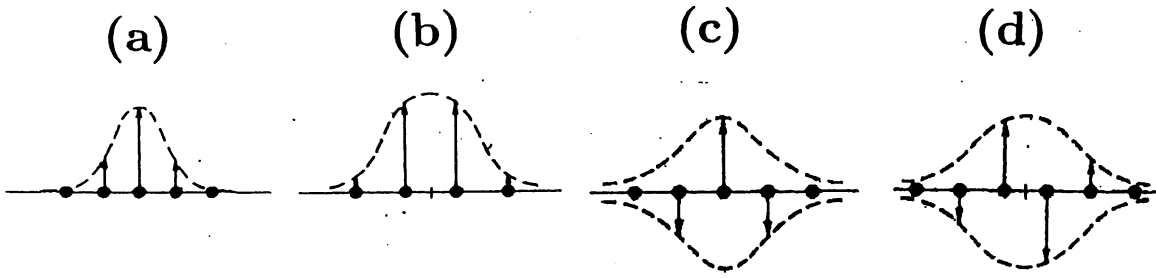


図4： 離散非線形シュレディンガー方程式の局在解 (a)(b) 低周波数モード (c)(d) 高周波数モード [(c),(d)は Sievers-Takeno モードと Page モードに対応]

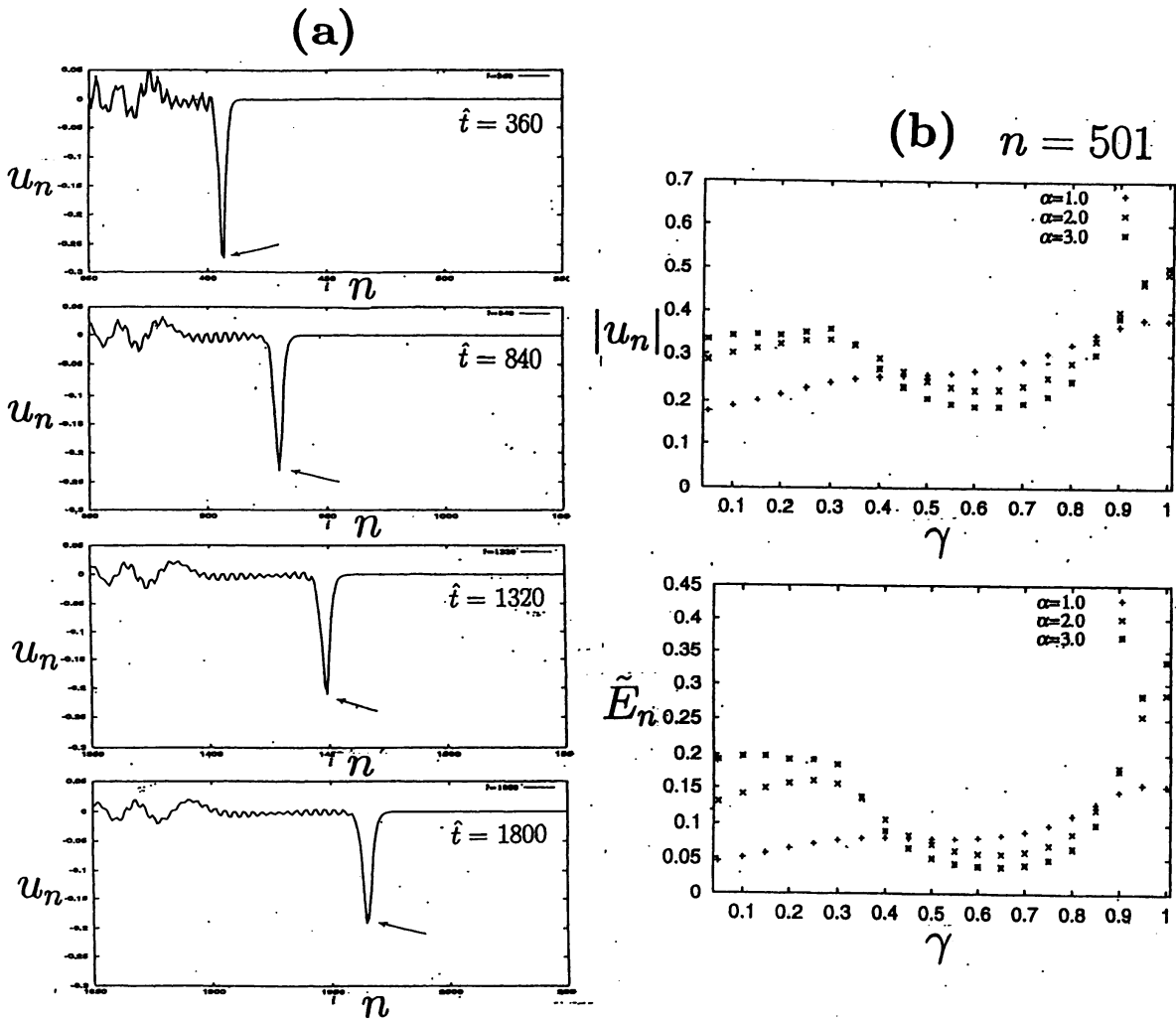


図5： 2原子格子 (6) における音響ソリトンの減衰 (a) 相対変位 u_n の時間変化 ($\gamma = 0.8$, $\alpha' = 2.0$) (b) 格子点 $n = 501$ における相対変位 $|u_n|$ とエネルギー E_n の最大値 (γ : 質量比、 α' : 非線形パラメーター)

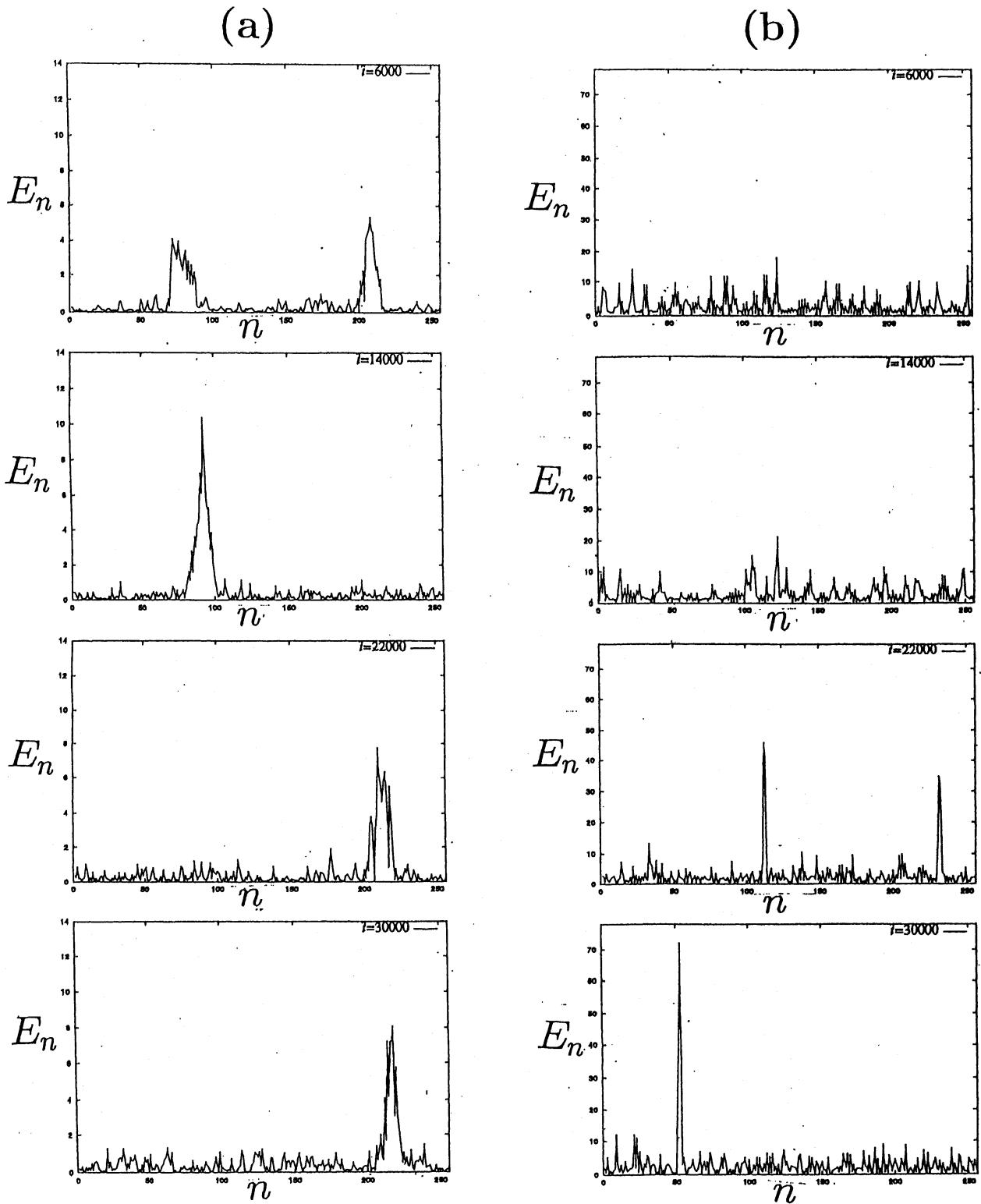


図6： 外部弾性力のある Toda 格子におけるカオスのブリーザー ($K = \pi$)
 (a) $\alpha = 0.1$ のときのエネルギー分布 (b) $\alpha = 10$ のときのエネルギー分布

$$\alpha = 0.1$$

(a)

$A_0 \backslash K$		$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
		0.5	○	×	×	×	×	×	×
1.0	×	×	×	×	×	×	×	×	
2.0	×	×	×	×	×	×	×	×	

$$\alpha = 1$$

(b)

$A_0 \backslash K$		$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
		0.5	○	○	○	×	×	×	×
1.0	○	○	×	×	×	×	×	×	
2.0	×	×	×	×	×	×	×	×	

$$\alpha = 10$$

(c)

$A_0 \backslash K$		$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
		0.5	○	○	○	×	×	×	×
1.0	○	○	○	×	×	×	×	×	
2.0	○	○	○	×	×	×	×	×	

(d)

$\alpha \backslash K$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π
0.1	△	△	△	△	△
1	△	△	△	△	△
3	×	△	○	○	○
10	×	×	○	○	○

○ ... 局在化 → 減衰せず
 △ ... 局在化 → 減衰
 × ... 局在化せず

表 1 : 変調不安定性 (A_0 : 初期振幅、 K : 初期波数 $t = 8000$ で判定 ○ : 安定
 × : 不安定) (a) $\alpha = 0.1$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha = 10$
 (d) 局在構造の長時間挙動 ($A_0 = 1$)