数理解析研究所講究録 1274 巻 2002 年 1-11

二重ガンマ関数とある種の実二次体

(Double gamma functions and certain real quadratic fields)

名古屋大学多元数理　松本耕二 (Kohji Matsumoto)

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

整数論におけるひとつの古典的な問題は，α を実無理数として，数列 $\{\alpha n\}-\frac{1}{2}$ (*1) $(n=1,2,3,\cdots)$ の挙動を調べよ，というものである。例えばこの数列が区間 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ において一様分布していることは Weyl の判定条件から直ちにわかる。またこの数列に対する総和関数を

$$S_\alpha(x)=\sum_{n\le x}\left(\{\alpha n\}-\frac{1}{2}\right)$$

とすると，自明な評価は $O(x)$ であるが，Hardy-Littlewood [5] はこれを $o(x)$ に改良し，かつ一般にはそれが best possible であることを示している。しかし特別な場合，例えば α が実の二次無理数の場合には，はるかに強い結果

$$S_\alpha(x)=O(\log x)^{(*2)} \tag{1}$$

(Lerch, Hardy-Littlewood, Ostrowski) が知られている。その後

(*1) $\{x\}$ は x の小数部分 : $\{x\}=x-[x]$.

も今日に至るまで研究は続けられているが，$S_\alpha(x)$ については(1)より真に強い結果は得られていないようである。そこでひとつの自然な発想は，$S_\alpha(x)$ 自身でなくその Riesz 平均を調べる，ということになる。Hecke[9] は，この問題に付随するゼータ関数 $Z_\alpha(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(\{\alpha n\}-\frac{1}{2})n^{-s}$ を導入し，これが全複素平面に有理型に解析接続できることを証明し，その結果を用いて，二次 Riesz 平均に対する漸近式

$$(2)\quad \sum_{n\le x}(\{\alpha n\}-\tfrac{1}{2})\left(\log\frac{x}{n}\right)^2=\frac{1}{6}G_1(\alpha)\log^3 x+\frac{1}{2}G_2(\alpha)\log^2 x + G_3(\alpha)\log x+\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m x^{2\pi i m/\log\varepsilon_D}+O(x^{-1+\delta})$$

を，$\alpha=\sqrt{D}$（但し D は square-free で $D\equiv 2$ または $3 \pmod 4$ なる正整数）の場合に導出した。但し ε_D は体 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本単数，δ は任意に小さい正数，また $G_j(\alpha)$ $(1\le j\le 3)$ は Laurent 展開

$$Z_\alpha(s)=\frac{G_1(\alpha)}{s}+G_2(\alpha)+G_3(\alpha)s+\cdots$$

で与えられる定数，C_m も定数である。Fujii[2] は(2)の誤差項を $O(x^{-4/3+\delta})$ に改良している。Fujii はまた同論文中で，$Z_\alpha(s)$ に関するより詳しい研究を行ない，その結果として次のような一次 Riesz 平均の漸近式も得ている：

前ページ

(*2) Hardy-Littlewood は[4]でこの結果(1)を announce したが，証明の詳細は9年後に[5]においてようやく公表された。Ostrowski は[4]を知ってこの問題の研究を開始し，彼も独立に(1)を得て[14]にその証明を述べた。また[5]には，[4]で announce したあと，Lerch が既に同じ結果を得ていたことを Landau から教えられたとある。

$$(3)\quad \sum_{n\le x}\left(\{\alpha n\}-\frac{1}{2}\right)\log\frac{x}{n} = \frac{1}{2}G_1(\alpha)\log^2 x + G_2(\alpha)\log x + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_m x^{2\pi i m/\log\varepsilon_D} + O(x^{-1/3+\delta}),$$

$$(4)\quad \sum_{n\le x}\left(\{\alpha n\}-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{n}{x}\right) = G_1(\alpha)\log x + \sum_{m=-\infty}^{\infty} C'_m x^{2\pi i m/\log\varepsilon_D} + O(x^{-1/3+\delta}).$$

Hecke, Fujii によるこれら (2), (3), (4) の結果は，x については十分に精密な挙動の記述を与えている。しかし当初の問題を Diophantus 近似の観点(*3)から見ると，α についての挙動がわからなければ問題が解決したとは言えないであろう。そうするとひとつの目標は，$G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$ の α の関数としての挙動を解明することである。これに関して Hecke [9] の議論から次がわかる。以下 α は上述の $\alpha=\sqrt{D}$ の場合に限定すると，ε_D は単数なのでそのノルム $N(\varepsilon_D)=\pm 1$ であるが，$N(\varepsilon_D)=-1$ なら

$$G_1(\alpha)=0,\quad G_2(\alpha)=-\frac{1}{12}\sqrt{D}+\frac{1}{8}$$

と極めて簡単である。しかし $N(\varepsilon_D)=1$ の時はそうはいかない。先ず Hecke に従って

$$(5)\qquad \zeta(s;\nu_1)=\sum_{(\mu)}\operatorname{sgn}(\mu\mu')\,|N(\mu)|^{-s}$$

なるゼータ関数を導入する。ここに和は $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ のすべての非

(*3) 別に次のような動機づけもある．$\omega_1, \omega_2\in\mathbb{R}$ を，比 ω_1/ω_2 が無理数となるようにとり，Δ を x 軸，y 軸，直線 $\omega_1 x+\omega_2 y=t$ $(t>0)$ で囲まれた直角三角形とすると，Δ の内部にある格子点の個数は $t^2/(2\omega_1\omega_2)-t/(2\omega_1)-t/(2\omega_2)+\widetilde{S}(t)$ と書け，この誤差項 $\widetilde{S}(t)$ は $S_{\omega_1/\omega_2}(t)$ と極めて似た振舞いをする．Hardy - Littlewood [5][6] はこの両者を平行して考察している．

零な principal (整) ideal にわたり，μ' は μ の conjugate，$\mathrm{sgn}(\mu\mu')$ は $\mu\mu'$ の符号である。すると $N(\varepsilon_D)=1$ の時，γ を Euler 定数として

$$(6) \qquad G_1(\alpha) = \frac{\zeta(1;\upsilon_1)\sqrt{D}}{\pi^2 \log \varepsilon_D}$$

$$(7) \qquad G_2(\alpha) = \frac{\zeta(1;\upsilon_1)\sqrt{D}}{\pi^2 \log \varepsilon_D}(\gamma + \log 2\pi) - \frac{\zeta'(1;\upsilon_1)\sqrt{D}}{2\pi^2 \log \varepsilon_D} - \frac{\sqrt{D}}{12} + \frac{1}{8}$$

である（Fujii[3] を見よ）。こうして問題は $\zeta(1;\upsilon_1)$，$\zeta'(1;\upsilon_1)$ の考察に帰する。

ゼータ関数 (5) は，量指標の Hecke の L 関数の定義式において和を principal ideal だけに制限した，"partial L 関数" である。Hecke はこうした関数を既に [8] の §6 で扱っている。実二次体のある種の類指標に付随した Hecke の L 関数の $s=1$ での特殊値を二重ガンマ関数の対数の有限和で表示した Shintani の仕事 [15] を想起すれば，上記 $\zeta(1;\upsilon_1)$，$\zeta'(1;\upsilon_1)$ も二重ガンマ関数を用いて表わせるのではないか，と期待しても自然であろう。この期待は Fujii[2] によって実現された。Fujii の結果は任意の実二次無理数に対するものであるが，一般的に命題を述べると連分数展開の言葉が必要でかなり複雑になるので，以下本稿では $\alpha=\sqrt{D}$，$D=4n^2+8n+3$ で D は square-free という特別な場合のみ考える。これは Fujii 自身が別の論文 [3] で扱っている例である。この時 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ の基本単数は

$$\varepsilon_D = \varepsilon_n = \sqrt{D} + 2n+2 = \sqrt{4n^2+8n+3} + 2n+2$$

であることが容易にわかる。そしてこの例に対するFujiiの結果は

$$(8)\qquad \zeta(1;v_1)=\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{4n+1}{\sqrt{D}}$$

$$(9)\qquad \zeta'(1;v_1)=\frac{2\pi^2}{\sqrt{D}}\left\{\frac{4n+1}{12}\left(\gamma+\log 2\pi-\log\left(\varepsilon_n-\frac{1}{\varepsilon_n}\right)\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\log\varepsilon_n}{24}\left(\frac{\sqrt{D}}{2n+1}+8n+5\right)-X(n)\right\},$$

但し

$$(10)\qquad X(n)=\log\frac{\Gamma_2(\varepsilon_n^2,(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n))\,\rho_2(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n)}{\Gamma_2(2\varepsilon_n-1,(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n))\,\rho_2(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n)}$$

である。この(10)の右辺にあるΓ_2とρ_2は，Barnesの二重ゼータ関数

$$(11)\qquad \zeta_2(s;a,(w_1,w_2))=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(a+mw_1+nw_2)^{-s}$$

$(a,w_1,w_2>0)$を用いて

$$(12)\qquad \log\rho_2(w_1,w_2)=-\lim_{a\to 0}\{\zeta_2'(0;a,(w_1,w_2))+\log a\},$$

$$(13)\qquad \log\frac{\Gamma_2(a,(w_1,w_2))}{\rho_2(w_1,w_2)}=\zeta_2'(0;a,(w_1,w_2))$$

で定義されるものであって，このΓ_2が二重ガンマ関数(*4)である。

こうして問題は量$X(n)$の解析に絞られた。あるいは，$n\to\infty$の時の$X(n)$の挙動を明らかにせよ，と問題を設定してもいいだろう。即ち(10)の右辺のΓ_2, ρ_2たちの$n\to\infty$の時の

(*4) 二重ガンマ関数は19世紀半ばのHölder, Kinkelinに遡る歴史を持つが，Barnes[1]は二重ゼータ関数(11)を導入し，それを軸にすえて二重ガンマ関数の理論を明解に構成した。Hardy-Littlewood[5][6][7]は既に(11)を数論に応用している。

振舞いを調べたい。筆者は[11]において，aが固定されている時，$\log\Gamma_2(a,(1,w))$，$\log\rho_2(1,w)$ の $|w|\to\infty$ の時の漸近展開式を得たが，(10) の右辺にある量においては $n\to\infty$ の時に aに相当する部分も動いてしまうので，この結果は使えない。何か別のアイデアが要求されるわけである。

しかし実は，$\Gamma_2(\varepsilon_n^2,(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n))$ については簡単な処理ができる。二重ゼータの定義式(11)の簡単な変形によって

$$\zeta_2(s;\varepsilon_n^2,(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n))=(1+\xi)^{-s}\{\zeta_2(s;1,(1,\xi))-\zeta(s)\}$$

がわかる。(但し $\xi=\varepsilon_n-1$，$\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数。) よって

$$\begin{aligned}\zeta_2'(0;\varepsilon_n^2,(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n))&=-\{\zeta_2(0;1,(1,\xi))+\tfrac{1}{2}\}\log(1+\xi)\\&\quad+\zeta_2'(0;1,(1,\xi))+\tfrac{1}{2}\log 2\pi\end{aligned}$$

を得る。ここから容易に（(13) を用いて）

$$\begin{aligned}\log\Gamma_2(\varepsilon_n^2,(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n))&=\log\Gamma_2(1,(1,\xi))+\tfrac{1}{2}\log 2\pi\\&\quad+\{\zeta_2(0;0,(1,\xi))-\zeta_2(0;1,(1,\xi))-\tfrac{3}{2}\}\log(1+\xi)\end{aligned}$$

となるが，この右辺は[11]の Theorem 5 や Shintani [16] による二重ガンマ関数の無限積表示により完全に explicit に計算でき，結果として

(14) $\log\Gamma_2(\varepsilon_n^2,(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n))=-\log(1+\xi)-\frac{1}{2}\log\xi+\log 2\pi$

という簡明な表示を得る（[12], Proposition 1）。

もう一方のΓ_2因子である $\Gamma_2(2\varepsilon_n-1,(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n))$ についてはそう簡単にはいかない。先ず (11) から $\mathrm{Re}\,s>2$ において

$$\zeta_2(s;\ 2\varepsilon_n-1,\ (\varepsilon_n-1,\ \varepsilon_n)) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(2\varepsilon_n-1+k(\varepsilon_n-1)+m\varepsilon_n)^{-s}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{-s}\left(1+\frac{k+m+2}{m+1}\xi\right)^{-s}$$

である。ここに Mellin-Barnes の積分公式

$$(15)\qquad (1+\lambda)^{-s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s)}\lambda^{z}dz$$

$$\left(\mathrm{Re}\,s>0,\ |\arg\lambda|<\pi,\ \lambda\neq 0,\ -\mathrm{Re}\,s<c<-1,\ \int_{(c)}=\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\right)$$

を $\lambda=\frac{k+m+2}{m+1}\xi$ として適用すると，$\mathrm{Re}\,s>2$ で

$$(16)\qquad \zeta_2(s;\ 2\varepsilon_n-1,\ (\varepsilon_n-1,\ \varepsilon_n))$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(m+1)^{-s-z}(k+m+2)^{z}\xi^{z}dz$$

を得る。ところがこの右辺にある二重和は，Euler sum

$$(17)\qquad \zeta_2(s_1,s_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}m^{-s_1}(m+k)^{-s_2}$$

の言葉を使うと，$\zeta_2(s+z,-z)$ に他ならない。

Euler sum の二変数関数としての解析接続は，Atkinson (1949) に遡るが，(15) を用いた明快な解析接続の方法を見出したのは Katsurada[10] である。([13] の §4 にそのエッセンスを紹介してある。) Katsurada の方法に従って，$\zeta_2(s+z,-z)$ を解析接続しよう。先ず

$$\zeta_2(s+z,-z)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(m+1)^{-s}\left(1+\frac{k+1}{m+1}\right)^{z}$$

と変形し，(15) を $\lambda=\frac{k+1}{m+1}$ として再度用いると，

$$\zeta_2(s+z,-z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c_1)}\frac{\Gamma(-z+w)\Gamma(-w)}{\Gamma(-z)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(m+1)^{-s}\left(\frac{k+1}{m+1}\right)^{w}dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{(c_1)} \frac{\Gamma(-z+w)\Gamma(-w)}{\Gamma(-z)}\,\zeta(s+w)\zeta(-w)\,dw$$

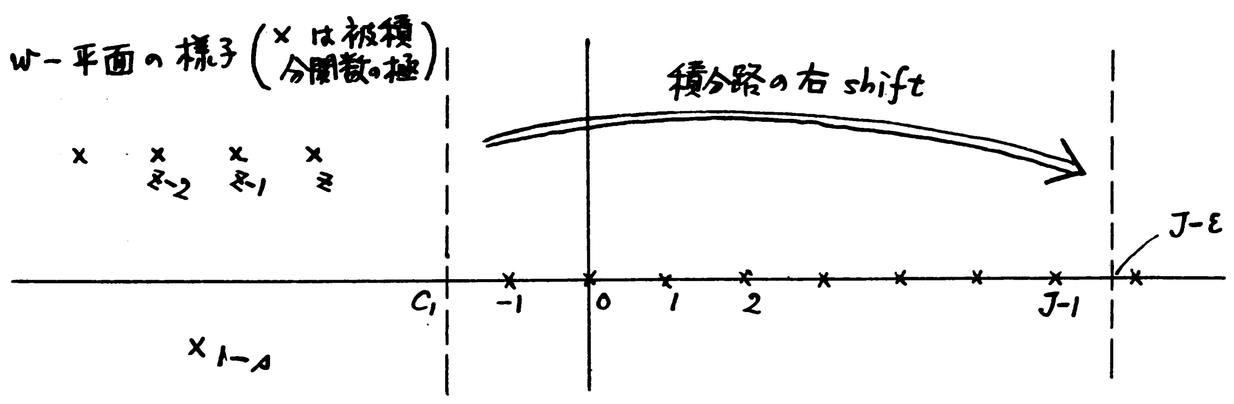
を得る($\mathrm{Re}\,z<c_1<-1$)。J を十分大きい正整数として,上式右辺の積分路を $\mathrm{Re}\,w=J-\varepsilon$ (ε は小さい正数) まで動かし,通過する極 $w=-1,0,1,2,\cdots,J-1$ での留数を計算すれば(下図),

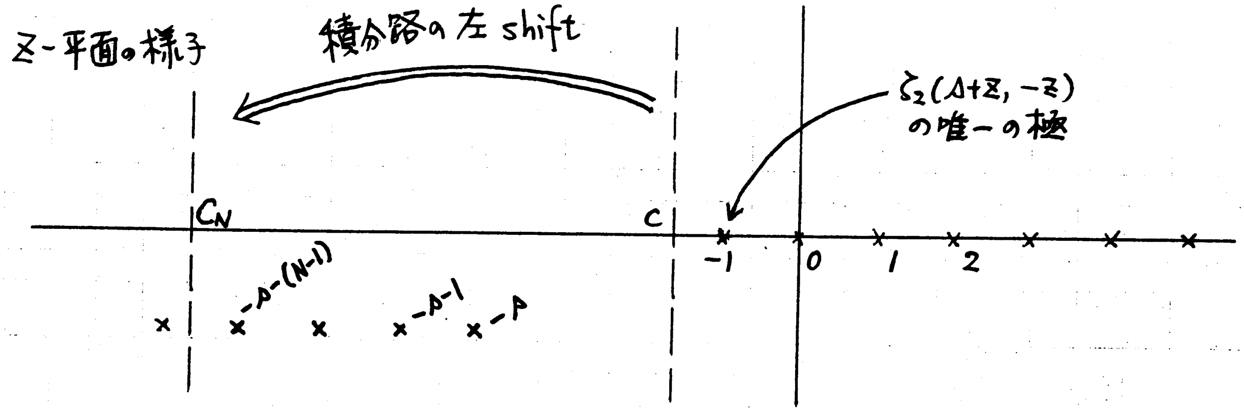
$$(18)\quad \zeta_2(s+z,-z) = -\frac{1}{1+z}\zeta(s-1)+\sum_{j=0}^{J-1}\binom{z}{j}\zeta(s+j)\zeta(-j)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{(J-\varepsilon)} \frac{\Gamma(-z+w)\Gamma(-w)}{\Gamma(-z)}\,\zeta(s+w)\zeta(-w)\,dw$$

となる。右辺の積分は $\mathrm{Re}\,s>1-J+\varepsilon$, $\mathrm{Re}\,z<J-\varepsilon$ で正則である。J は任意なので,これで $\zeta_2(s+z,-z)$ の $\mathbb{C}^2$ 全体への接続ができた。そして特異点の様子も右辺第一項,第二項から直ちに見てとれる。特に z の関数としての極は $z=-1$ にしかないことがわかる。

そこで式(16)に戻る。積分路を今度は左へ,$\mathrm{Re}\,z=C_N$ ($C_N=-\mathrm{Re}\,s-N+\varepsilon$, N は十分大きい正整数) まで動かすと,留数





を計算すべき極は $z=-s,-s-1,\cdots,-s-(N-1)$ で(上図),

$$(19)\quad \zeta_2(s\,;\,2\varepsilon_n-1,(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n))=\sum_{k=0}^{N-1}\binom{-s}{k}\zeta_2(-k,s+k)\,\xi^{-s-k}+\frac{1}{2\pi i}\int_{(C_N)}\frac{\Gamma(s+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s)}\zeta_2(s+z,-z)\,\xi^{z}\,dz$$

となる。(*5) この式により $\zeta_2(s\,;\,2\varepsilon_n-1,(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n))$ の $\operatorname{Re}s>1-N+\varepsilon$ への有理型解析接続ができ, $s=0$ で微分すると,

$$(20)\quad \zeta_2'(0\,;\,2\varepsilon_n-1,(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n))=\zeta_2'(0,0)-\zeta_2(0,0)\log\xi+\sum_{k=1}^{N-1}\frac{(-1)^k}{k}\left\{C_0(k)+C_{-1}(k)\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1}-\log\xi\right)\right\}\xi^{-k}+O(\xi^{-N}\log\xi)$$

となる。(*6) この(20)から, $\log\rho_2(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n)$, $\log\Gamma_2(2\varepsilon_n-1,(\varepsilon_n-1,\varepsilon_n))$ の ξ についての漸近展開を出すことができる。$X(n)$ のもうひとつの因子 $\log\rho_2(\varepsilon_n,\varepsilon_n^2-\varepsilon_n)$ の漸近展開も同様に示すことができ, これらと(14)をあわせて次の結論に到達する。

(*5) 左辺の ζ_2 は Barnes 二重ゼータ, 右辺の ζ_2 は Euler sum であることに注意。

(*6) (19) 右辺の $\zeta_2(-k,s+k)$ は, $k\geqq 1$ なら $s=0$ で1位の極をもつことが(18)からわかる。しかしこの極は二項係数からくる零点と cancel し, (19) 左辺の極とはならない。$k=0$ なら $\zeta_2(0,s)$ が既に $s=0$ で正則である。よって $s=0$ で微分ができる。(20)式の $C_0(k)$, $C_{-1}(k)$ は Laurent 展開 $\zeta_2(-k,s+k)=C_{-1}(k)\frac{1}{s}+C_0(k)+C_1(k)s+\cdots$ で定められる。

定理 ([12], Theorem 3) 任意の正整数 $N \geqq 2$ に対し,

$$X(n) = -\frac{1}{12}\xi\log\xi - \frac{1}{12}\xi\log(1+\xi) + \left(\frac{1}{12} - \zeta'(-1)\right)\xi + \frac{1}{6}\log\xi$$
$$-\frac{1}{4}\log(1+\xi) + \frac{1}{4}\log 2\pi - \zeta_2'(0,0) - \frac{1}{12}\xi^{-1}\log\xi - \frac{1}{12}\xi^{-1}\log(1+\xi)$$
$$+\left(\frac{1}{12}\gamma + C_0(1)\right)\xi^{-1}$$
$$+\sum_{k=2}^{N-1}\frac{(-1)^k}{k}\left\{\zeta(-k)\zeta(k) - C_0(k) - \frac{k}{12}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k-1} - \log\xi\right)\right\}\xi^{-k}$$
$$+O(\xi^{-N}\log\xi),$$

但し $X(n)$ は (10) で定義された量, $\xi = \varepsilon_n - 1$ である。——

こうして $\alpha = \sqrt{D}$, $D = 4n^2+8n+3$ という場合に限ると, 我々は当初の問題に対しかなり詳しい解答を得た。(但し (2), (3), (4) の誤差項の α に対する依存性の問題は残されている。また上式中の $\zeta_2'(0,0)$, $C_0(k)$ の具体的な値も知りたい。) Fujii [2] の一般的結果を用いれば, 任意の実二次無理数 α に対して上記定理を拡張できるかもしれない。またもちろん, より高次の代数体への一般化という問題も残されているわけである。

(2001年12月8日)

文　献

[1] E.W. Barnes, The theory of the double gamma function, Philos. Trans. Roy. Soc. (A) 196 (1901) 265–387.
[2] A. Fujii, Some problems of Diophantine approximation and a Kronecker's limit formula, in "Investigations in Number Theory", T. Kubota (ed.), Adv. Stud. Pure Math. Vol. 13, Kinokuniya, 1988, pp. 215–236.

[3] A. Fujii, Diophantine approximation, Kronecker's limit formula and the Riemann hypothesis, in "Théorie des Nombres / Number Theory", J.-M. De Koninck - C. Levesque (eds.), Walter de Gruyter, 1989, pp. 240-250.
[4] G. H. Hardy - J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine approximation, in "Proceedings of the 5th Intern. Congr. Math. (Cambridge 1912)", E. W. Hobson - A. E. H. Love (eds.), Vol. 1, Cambridge Univ. Press, 1913, pp. 223-229.
[5] ——— - ———, Some problems of Diophantine approximation: The lattice points of a right-angled triangle, Proc. London Math. Soc. (2) 20 (1922) 15-36.
[6] ——— - ———, ——— (Second memoir), Abl. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1 (1922) 212-249.
[7] ——— - ———, Some problems of Diophantine approximation: The analytic character of the sum of a Dirichlet's series considered by Hecke, ibid. 3 (1924) 57-68.
[8] E. Hecke, Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Zweite Mitteilung, Math. Z. 6 (1920) 11-51.
[9] ———, Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. Eins, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1 (1921) 54-76.
[10] M. Katsurada, An application of Mellin-Barnes' type integrals to the mean square of Lerch zeta-functions, Collect. Math. 48 (1997) 137-153.
[11] K. Matsumoto, Asymptotic series for double zeta, double gamma, and Hecke L-functions, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 123 (1998) 385-405; Corrigendum and addendum, ibid., in press.
[12] ———, Asymptotic expansions of double gamma-functions and related remarks, in "Analytic Number Theory", C. Jia - K. Matsumoto (eds.), Kluwer, to appear.
[13] ———, On analytic continuation of various multiple zeta-functions, in "Number Theory for the Millenniam, the Millennial Conf. on Number Theory", B. Berndt et al. (eds.), A K Peters, to appear.
[14] A. Ostrowski, Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen, Abl. Math. Sem. Hamburg. Univ. 1 (1921/22) 77-98, 250-251.
[15] T. Shintani, On a Kronecker limit formula for real quadratic fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24 (1977) 167-199.
[16] ———, A proof of the classical Kronecker limit formula, Tokyo J. Math. 3 (1980) 191-199.