

$a \pmod{p}$ の剰余位数の分布について, II

大阪工業大学 工学部 知念 宏司 (Koji Chinen)
 Department of Mathematics, Faculty of Engineering,
 Osaka Institute of Technology.

明治学院大学 経済学部 村田 玲音 (Leo Murata)
 Department of Mathematics, Faculty of Economics,
 Meijigakuin University.

1 導入

まず, 本稿で考察する問題について説明する. 自然数 a ($a \neq 1$) をとり, p は奇素数, $p \nmid a$ とする. また $D_a(p)$ を a の $\text{mod } p$ での剰余位数, つまり $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times$ において a が生成する部分群 $\langle a \rangle$ の位数, そして $I_a(p) := |\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times : \langle a \rangle|$ (a の $\text{mod } p$ での剰余指数) とする. このとき次の問題を考える:

問題 1.1 集合

$$Q_a(x; k, l) := \{p \leq x; D_a(p) \equiv l \pmod{k}\} \quad (0 \leq l < k)$$

の自然密度, i.e. $\Delta_a(k, l) := \lim_{x \rightarrow \infty} \#Q_a(x; k, l) / \pi(x)$ を求めよ ($\pi(x)$: x 以下の素数の個数).

本稿はこの問題に対する最初の報告 [1] の続編であり, その後得られた新しい結果を報告することを目的としている. われわれがこのような問題を考えるに到った背景については, [1], [2], [3] などに述べてある. また, われわれとは別の観点からこの問題を考えた研究者がいたことは [1] の付記 (p.255) で触れたが, それに関して詳しいことは, [2, p.2] をご参照いただきたい.

さて, [1] において, われわれは $k = 4$ の場合を考え, 次の結果を報告した:

定理 1.2 a は square free, $a > 2$ とする.

(i) $l = 0, 2$ のとき

$$\#Q_a(x; 4, l) = \frac{1}{3} \text{li } x + O\left(\frac{x}{\log x \log \log x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

(ii) さらに $a \equiv 1 \pmod{4}$ を仮定する. $l = 1, 3$ のとき, GRH (一般 Riemann 予想) の仮定のもとで,

$$\#Q_a(x; 4, l) = \frac{1}{6} \text{li } x + O\left(\frac{x}{\log x \log \log x}\right) \quad (x \rightarrow \infty).$$

その後, 現在までに得られた結果は2つで, それらは次のようにまとめられる:

- (1) $k = 4$ のとき, a に関する仮定を大幅に緩め, 密度を計算した. その結果, $l = 1, 3$ のときの密度は, 必ずしも $1/6$ ずつにはならないことが判明した. また, そのような場合に, 密度はある種の無限積を用いて表されることがわかった.

(2) $k = q^i$ (q : 奇素数, $i \geq 1$) の場合に, 自然密度 $\Delta_a(q^i, j)$ ($1 \leq j < q^i$) の存在を証明, さらに, $q|j$ の場合について, $\Delta_a(q^i, j)$ の値を決定した.

ただし, 上記 (1), (2) いずれの場合も, GRH の仮定が必要である.

上記 (1) の結果については [2] ですでに報告してあるので, ここでは主に (2) について述べることにするが, (1) の結果は [1] の直接の拡張なので, §3 で結果のみ簡単に紹介する. 今回の主結果は次の通りである:

定理 1.3 $a \geq 2$ は完全 b 乗数ではないとし ($b \geq 2$), q : 奇素数, $i \geq 1$ とする. このとき GRH の仮定のもとで, $1 \leq j < q^i$ に対して

$$Q_a(x; q^i, j) = \Delta_a(q^i, j) \operatorname{li} x + O\left(\frac{x}{\log x \log \log x}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

なる実数 $\Delta_a(q^i, j)$ が存在し, $q|j$ ならば,

$$\Delta_a(q^i, j) = \frac{1}{q^{i-2}(q^2 - 1)} \quad (1.1)$$

が成立する.

注意. 式 (1.1) は $j = 0$ のときも全く同じ形で成立し, そのときは unconditional である (cf. 命題 2.6).

このあと, §2 では定理 1.3 の証明の概略を述べる. §3 では $\Delta_a(4, l)$ に関する結果を述べ, 最後の §4 では, 関連する数値実験の結果を紹介する.

最後に, 記号を少し整理しておく. 整数 k に対し, ζ_k は 1 の原始 k 乗根, $\varphi(k)$ と $\mu(k)$ はそれぞれ Euler の関数と Möbius の関数を表す. また素数 q のべき q^e に対し, $q^e || k$ は $q^e | k$ かつ $q^{e+1} \nmid k$ を表すものとする.

2 定理 1.3 の証明

まず, 自然密度 $\Delta_a(q^i, j)$ の存在を証明しよう. 以後, $j = hq^e$ ($q \nmid h$, $0 \leq e \leq i-1$) とする.

一般に, 剰余位数 D_a はきわめて扱いづらい量であるが, 関係式 $D_a(p)I_a(p) = p-1$ を用いて, これを I_a の式で書き換えることができる. I_a の方が, 代数体における p の分解の様子に必要な条件を記述でき, いくぶん扱いやすい:

補題 2.1

$$Q_a(x; q^i, j) = \bigcup_{f \geq e} \bigcup_{\substack{1 \leq r < q^i \\ (q, r) = 1}} \left\{ p \leq x; \begin{array}{l} p \equiv 1 + rq^f \pmod{q^{f+i}}, \\ I_a(p) \equiv \{(r\bar{h}) \pmod{q^{i-e}}\} \cdot q^{f-e} \pmod{q^{f+i-2e}} \end{array} \right\},$$

ただし, $h\bar{h} \equiv 1 \pmod{q^{i-e}}$, また, 右辺の集合はすべて disjoint である.

証明は一種の sieve method によるが、全く初等的である。\$I_a(p)\$ の条件を等号で書くと、次の式が得られる：

$$\#Q_a(x; q^i, j) = \sum_{\substack{1 \leq r < q^i \\ (q, r) = 1}} \sum_{f \geq e} \sum_{l \geq 0} \# \left\{ p \leq x; \begin{array}{l} p \equiv 1 + rq^f \pmod{q^{f+i}}, \\ I_a(p) = \{(\bar{h}r) \pmod{q^{i-e}} + l \cdot q^{i-e}\} \cdot q^{f-e} \end{array} \right\}. \quad (2.1)$$

この式の右辺に現れる素数集合は、\$\{p \leq x; I_a(p) = m, p \equiv s \pmod{t}\}\$ (\$m, s, t\$: 整数) の形である。\$\{p \leq x; I_a(p) = m\}\$ の密度はすでに Murata [5] で求められている。もう1つの条件 \$p \equiv s \pmod{t}\$ は、Chebotarev の定理 (cf. Lagarias-Odlyzko [4]) により扱うことができ、結局、次の定理を得る (この部分の議論の詳細は、[1, §4] とほぼ同じである)：

定理 2.2 (密度存在) \$a \geq 2\$, \$a\$ は完全 \$b\$ 乗数でないとする (\$b \geq 2\$) と、GRH の仮定のもとで、

$$\#Q_a(x; q^i, j) = \Delta_a(q^i, j) \operatorname{li} x + O\left(\frac{x}{\log x \log \log x}\right),$$

$$\Delta_a(q^i, j) = \sum_{\substack{1 \leq r < q^i \\ (q, r) = 1}} \sum_{f \geq e} \sum_{l \geq 0} \frac{k_0}{\varphi(k_0)} \sum_{d|k_0} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n) c_r(k, n, d)}{[\tilde{G}_{k, n, d} : \mathbf{Q}]}, \quad (2.2)$$

ただし、

$$k = \{(\bar{h}r) \pmod{q^{i-e}} + l \cdot q^{i-e}\} q^{f-e},$$

この \$k\$ に対して、

$$k_0 = \prod_{\substack{p: \text{prime} \\ p|k}} p \quad (k \text{ の core}),$$

$$G_{k, n, d} = \mathbf{Q}(a^{1/kn}, \zeta_{kd}, \zeta_n), \quad \tilde{G}_{k, n, d} = G_{k, n, d}(\zeta_{q^{f+2}}).$$

また \$c_r(k, n, d)\$ については、まず \$\sigma_r \in \operatorname{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+2}})/\mathbf{Q})\$ を \$\sigma_r : \zeta_{q^{f+2}} \mapsto \zeta_{q^{f+2}}^{1+rq^f}\$ で定まるものとし、\$\sigma_r^*|_{\mathbf{Q}(\zeta_{q^{f+2}})} = \sigma_r\$ を満たす \$\sigma_r^* \in \operatorname{Gal}(\tilde{G}_{k, n, d}/G_{k, n, d})\$ を考える。そして

$$c_r(k, n, d) = \begin{cases} 1, & \sigma_r^* \text{ が存在するとき,} \\ 0, & \sigma_r^* \text{ が存在しないとき} \end{cases}$$

により定義する。

注意. (1) 密度の存在を示すには、級数 (2.2) が1つの実数値として定まることを言わねばならない。級数 (2.2) の絶対収束を示すことは困難と思われるため、次のような考え方でこれを示す：まず (2.2) 式の \$k_0/\varphi(k_0)\$ 以下は、(2.1) 式右辺の素数集合の密度であるから 0 以上、(2.1) 式右辺の素数集合は互いに disjoint なので、これらの密度をすべて足し合わせた (2.2) の値は、素数全体の密度 (すなわち 1) を超えることはない。したがって (2.2) は、(\$n\$ に関する和を \$l\$ に関する和よりも前に持つていくことさえしなければ) 上に有界な

正項級数となり、値が定まることが言える。ついでながら、 n に関する和の絶対収束を示すことは可能である。

(2) 写像 σ_r^* は、存在すればただ1つであることが証明できる。

この定理により、自然密度 $\Delta_a(q^i, j)$ の存在がわかった。しかし、(2.2) 式には、 $[\tilde{G}_{k,n,d} : \mathbb{Q}]$ と $c_r(k, n, d)$ という、明示されていない項が残っている。このうち $[\tilde{G}_{k,n,d} : \mathbb{Q}]$ については、

補題 2.3

$$[\tilde{G}_{k,n,d} : \mathbb{Q}] = \begin{cases} kn \cdot \varphi(\langle kd, n, q^{f+i} \rangle), \text{ または} \\ \frac{1}{2} kn \cdot \varphi(\langle kd, n, q^{f+i} \rangle), \end{cases}$$

ただし、 $\langle a, b, c \rangle$ は、 a, b, c の最小公倍数。第2の場合が起こるのは、 kn が偶数、かつ次の①、②、③ いずれかが成り立つ場合に限る：

- ① $\dots a_1 \equiv 1 \pmod{4}, a_1 | \langle kd, n, q^{f+i} \rangle,$
- ② $\dots a_1 \equiv 2 \pmod{4}, 4a_1 | \langle kd, n, q^{f+i} \rangle,$
- ③ $\dots a_1 \equiv 3 \pmod{4}, 4a_1 | \langle kd, n, q^{f+i} \rangle.$

係数 $c_r(k, n, d)$ の決定には少々長い計算が必要である。ここでは方針のみを述べる。まず Galois 理論からの、次の補題を準備する：

補題 2.4 K : 体, L, M : K の有限次拡大とし、 L/M は Galois 拡大であるとする。このとき

(I) ML/M は Galois 拡大で、

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(ML/M) & \longrightarrow & \text{Gal}(L/K) \\ \psi & & \psi \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_L \end{array}$$

は単射準同型、したがって $\text{Gal}(ML/M)$ は $\text{Gal}(L/K)$ の部分群と考えられる。

(II) 次の3つは同値：

(i) $\text{Gal}(ML/M) \cong \text{Gal}(L/K),$

(ii) $[ML : M] = [L : K],$

(iii) $K = M \cap L.$

これを $M = G_{k,n,d}$, $L = \mathbb{Q}(\zeta_{q^{f+i}})$ に対して適用すると、 $ML = \tilde{G}_{k,n,d}$ となる。そして共通部分 $K = G_{k,n,d} \cap \mathbb{Q}(\zeta_{q^{f+i}})$ を求め、 σ_r が K 上恒等写像であるかどうかを調べる。もし $\sigma_r|_K = \text{id}$. ならば、 $\sigma_r \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{q^{f+i}})/K)$ であり、補題 2.4 より $\tau|_{\mathbb{Q}(\zeta_{q^{f+i}})} = \sigma_r$ なる $\tau \in \text{Gal}(\tilde{G}_{k,n,d}/G_{k,n,d})$ が存在する。これが σ_r^* であり、 $c_r(k, n, d) = 1$ が言える。また、 $\sigma_r|_K \neq \text{id}$. ならば、 $\sigma_r \notin \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{q^{f+i}})/K)$ であるが、 $\text{Gal}(\tilde{G}_{k,n,d}/G_{k,n,d}) \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{q^{f+i}})/K)$ であることは同じなので、 $\tau|_{\mathbb{Q}(\zeta_{q^{f+i}})} = \sigma_r$ なる $\tau \in \text{Gal}(\tilde{G}_{k,n,d}/G_{k,n,d})$ は存在せず、 $c_r(k, n, d) = 0$ となる。

以上を基本的な考え方として $c_r(k, n, d)$ をすべて求めることができる。詳細は紙数の都合により割愛するが、次の結果が得られる：

定理 2.5 $e \geq 1$ ならば, すべての r, k, n, d に対して, $c_r(k, n, d) = 1$.

この結果から, $e \geq 1$ の場合, $\Delta_a(q^i, hq^e)$ はすべての h に対して, 級数として等しいことが証明される. すなわち, $q|j, j \neq 0$ であるような $\Delta_a(q^i, j)$ はすべて等しい. さらに, 次を利用する:

命題 2.6 $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$ とし, a は完全 b 乗数 ($b \geq 2$) ではないとする. q : 奇素数, $i \geq 1$ のとき,

$$\Delta_a(q^i, 0) = \frac{1}{q^{i-2}(q^2 - 1)}.$$

証明. [1, §3] と同様 (この結果は unconditional であることに注意).

このことと, $i \geq 1, m \geq i+1$ に対して成り立つ等式

$$\Delta_a(q^i, 0) - \Delta_a(q^{i+1}, 0) = \sum_{\substack{1 \leq j \leq q^m - 1 \\ q^i | j}} \Delta_a(q^m, j)$$

によって, 主結果である定理 1.3 が得られる.

3 $\Delta_a(4, l)$ の場合

ここでは, $\Delta_a(4, l)$ に関して, [1] 以後に得られた結果について簡単に紹介する. 特に $l = 1, 3$ の場合が重要である. [1] においては, a に強い条件が課せられていたが, 今回それを大幅に緩めることができた:

定理 3.1 $a \in \mathbb{N}, a \geq 2$ とし, a は完全 b 乗数 ($b \geq 2$) ではないとする. $a = a_1 a_2^2$ (a_1 : square free) とおく. すると GRH のもとで,

$$\#Q_a(x; 4, l) = \Delta_a(4, l) \operatorname{li} x + O\left(\frac{x}{\log x \log \log x}\right) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が成立し, 自然密度 $\Delta_a(4, l)$ ($l = 1, 3$) は次の式で与えられる:

(I) $a_1 \equiv 1, 3 \pmod{4}$ ならば

$$\Delta_a(4, 1) = \Delta_a(4, 3) = \frac{1}{6}.$$

(II) $a_1 \equiv 2 \pmod{4}$ のとき, まず定数 C を次のように定義する:

$$C := \prod_{\substack{p \equiv 3 \pmod{4} \\ p: \text{prime}}} \left(1 - \frac{2p}{(p^2 + 1)(p - 1)}\right) \quad (\approx 0.64365).$$

(i) $a_1 = 2$ のとき,

$$\Delta_a(4, 1) = \frac{7}{48} - \frac{C}{8}, \quad \Delta_a(4, 3) = \frac{7}{48} + \frac{C}{8}.$$

(ii) $a_1 > 2$ のとき, $a_1 = 2a'_1$ (a'_1 : odd) とおくと, a'_1 の少なくとも 1 つの素因数 p が $p \equiv 1 \pmod{4}$ を満たすなら

$$\Delta_a(4, 1) = \Delta_a(4, 3) = \frac{1}{6},$$

a'_1 のすべての素因数 p が $p \equiv 3 \pmod{4}$ を満たすなら

$$\Delta_a(4, 1) = \frac{1}{6} \pm \frac{C}{8} \prod_{p|a'_1} \frac{-2p}{p^3 - p^2 - p - 1},$$

$$\Delta_a(4, 3) = \frac{1}{6} \mp \frac{C}{8} \prod_{p|a'_1} \frac{-2p}{p^3 - p^2 - p - 1},$$

ただし $\Delta_a(4, 1)$ における複号は, $a'_1 \equiv 3 \pmod{4}$ のとき $+$, $a'_1 \equiv 1 \pmod{4}$ のとき $-$, $\Delta_a(4, 3)$ における複号はこれと同順とする.

この定理により, つねに $\Delta_a(4, 1) \leq \Delta_a(4, 3)$ が成立することになる. なお, $\Delta_a(4, 0)$, $\Delta_a(4, 2)$ は unconditional に求めることができ, 証明もいくぶん易しい. その場合の密度は,

$$a_1 = 2 \implies \Delta_a(4, 0) = \frac{5}{12}, \Delta_a(4, 2) = \frac{7}{24},$$

$$a_1 \neq 2 \implies \Delta_a(4, 0) = \Delta_a(4, 2) = \frac{1}{3}.$$

この結果について詳しいことは [2], [6] にまとめてある.

4 数値実験

自然数 a ($a \neq 1$), および $k, l \in \mathbb{Z}$, $0 \leq l < k$ をとる. 以下は $Q_a(x; k, l)$ の密度, すなわち $\#Q_a(x; k, l)/\pi(x)$ の表である. x としては 10^3 から $2 \cdot 10^7$ まで取った. また $a = 2, 3, 5, 15$ を選び, $k = 9, 27, 25$ の場合を計算した. つまり k は主結果で扱った奇素数べき q^i の場合のみとした ($\Delta_a(4, l)$ に関する数値実験結果は [2] で紹介してあるので, そちらをご参照いただきたい). また, $k = 27, 25$ の場合は, スペースの都合上, $q|l$ であるような l のみ掲載した.

● $k = 9$ の場合

$a \equiv 2$

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.137725	0.137725	0.095808	0.113772	0.119760	0.095808	0.119760	0.107784	0.071856
10^4	0.122150	0.124593	0.095277	0.131107	0.110749	0.093648	0.123779	0.112378	0.086319
10^5	0.125430	0.113752	0.094047	0.125013	0.118027	0.091857	0.125951	0.114899	0.091023
10^6	0.124922	0.113979	0.093863	0.123610	0.113992	0.093239	0.126655	0.116183	0.093558
10^7	0.125081	0.114715	0.092988	0.124953	0.115223	0.093530	0.125222	0.114990	0.093297
$2 \cdot 10^7$	0.125010	0.114659	0.093316	0.125025	0.115149	0.093419	0.125092	0.115040	0.093288

$a \equiv 3$

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.120482	0.102410	0.084337	0.144578	0.114458	0.102410	0.102410	0.132530	0.096386
10^4	0.126324	0.103504	0.098615	0.126324	0.105949	0.102689	0.129584	0.108394	0.098615
10^5	0.125652	0.103024	0.106257	0.123358	0.104275	0.102294	0.126694	0.106674	0.101773
10^6	0.124669	0.103012	0.104044	0.124045	0.104158	0.104451	0.126554	0.103954	0.105114
10^7	0.125189	0.104287	0.103935	0.124887	0.104182	0.104370	0.124696	0.103869	0.104584
$2 \cdot 10^7$	0.125079	0.104208	0.104186	0.124851	0.104158	0.104046	0.125046	0.104146	0.104280

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.126506	0.126506	0.072289	0.132530	0.120482	0.072289	0.120482	0.132530	0.096386
10^4	0.120619	0.119804	0.077425	0.122249	0.127954	0.083130	0.134474	0.120619	0.093725
10^5	0.125339	0.122106	0.082065	0.124400	0.130344	0.082586	0.124713	0.123462	0.084984
10^6	0.125025	0.124796	0.083125	0.125535	0.126070	0.083265	0.124274	0.124656	0.083253
10^7	0.125197	0.124708	0.083665	0.125235	0.124806	0.083516	0.124700	0.124910	0.083263
$2 \cdot 10^7$	0.125040	0.124797	0.083609	0.125136	0.124946	0.083434	0.124762	0.124856	0.083419

 $a = 15$

x	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$	$l=6$	$l=7$	$l=8$
10^3	0.145455	0.133333	0.109091	0.109091	0.103030	0.060606	0.115152	0.121212	0.103030
10^4	0.127243	0.128874	0.101958	0.127243	0.114192	0.087276	0.114192	0.119086	0.079935
10^5	0.126916	0.123371	0.092502	0.124831	0.119825	0.085098	0.120555	0.117635	0.089269
10^6	0.125588	0.120670	0.088031	0.124097	0.119715	0.088018	0.124709	0.120925	0.088248
10^7	0.125257	0.120304	0.087997	0.124973	0.119834	0.088407	0.124573	0.120429	0.088226
$2 \cdot 10^7$	0.125089	0.120244	0.088057	0.124771	0.120183	0.088271	0.124937	0.120295	0.088153

● $k = 27$ の場合 $a = 2$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.041916	0.029940	0.041916	0.041916	0.029940	0.041916	0.053892	0.053892	0.035928
10^4	0.046417	0.033388	0.043160	0.039088	0.046417	0.041531	0.036645	0.051303	0.039088
10^5	0.041914	0.041602	0.040455	0.042019	0.041289	0.044312	0.041497	0.042123	0.041184
10^6	0.041492	0.041632	0.042142	0.042269	0.041390	0.042027	0.041161	0.040588	0.042486
10^7	0.041571	0.041804	0.041941	0.041753	0.041602	0.041586	0.041757	0.041547	0.041696
$2 \cdot 10^7$	0.041662	0.041771	0.041798	0.041764	0.041555	0.041693	0.041585	0.041699	0.041601

 $a = 3$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.042169	0.042169	0.042169	0.036145	0.048193	0.036145	0.042169	0.054217	0.024096
10^4	0.040750	0.040750	0.049715	0.039120	0.042380	0.038305	0.046455	0.043195	0.041565
10^5	0.042857	0.039833	0.041606	0.039833	0.041606	0.042753	0.042961	0.041919	0.042336
10^6	0.041416	0.042359	0.042333	0.041467	0.041136	0.042754	0.041786	0.040550	0.041467
10^7	0.041661	0.041506	0.041514	0.041867	0.041646	0.041515	0.041661	0.041735	0.041667
$2 \cdot 10^7$	0.041623	0.041690	0.041581	0.041777	0.041652	0.041727	0.041679	0.041509	0.041738

 $a = 5$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.054217	0.048193	0.048193	0.042169	0.042169	0.048193	0.030120	0.042169	0.024096
10^4	0.044825	0.044825	0.052160	0.037490	0.039935	0.043195	0.038305	0.037490	0.039120
10^5	0.042544	0.041502	0.041293	0.040772	0.040042	0.041084	0.042023	0.042857	0.042336
10^6	0.041811	0.041212	0.041480	0.041467	0.041926	0.041391	0.041747	0.042397	0.041403
10^7	0.041628	0.041780	0.041717	0.041714	0.041565	0.041595	0.041855	0.041890	0.041389
$2 \cdot 10^7$	0.041655	0.041764	0.041605	0.041665	0.041598	0.041724	0.041719	0.041774	0.041432

 $a = 15$

x	$l=0$	$l=3$	$l=6$	$l=9$	$l=12$	$l=15$	$l=18$	$l=21$	$l=24$
10^3	0.048485	0.048485	0.036364	0.048485	0.030303	0.054545	0.048485	0.030303	0.024242
10^4	0.045677	0.045677	0.036705	0.045677	0.044046	0.040783	0.035889	0.037520	0.036705
10^5	0.043070	0.041506	0.039629	0.041506	0.042549	0.042027	0.042340	0.040776	0.038899
10^6	0.041251	0.041327	0.040869	0.042130	0.041710	0.041824	0.042207	0.041060	0.042015
10^7	0.041724	0.041470	0.041407	0.041783	0.041712	0.041493	0.041750	0.041791	0.041673
$2 \cdot 10^7$	0.041746	0.041574	0.041712	0.041706	0.041561	0.041548	0.041637	0.041635	0.041678

● $k = 25$ の場合 $a = 2$

x	$l=0$	$l=5$	$l=10$	$l=15$	$l=20$
10^3	0.036145	0.048193	0.048193	0.024096	0.048193
10^4	0.048900	0.039935	0.037490	0.035860	0.043195
10^5	0.043066	0.041084	0.042544	0.040563	0.042544
10^6	0.041518	0.042142	0.042792	0.040741	0.041391
10^7	0.041487	0.041691	0.041714	0.041476	0.041854
$2 \cdot 10^7$	0.041620	0.041634	0.041719	0.041678	0.041708

x	$l = 0$	$l = 5$	$l = 10$	$l = 15$	$l = 20$
10^3	0.042169	0.066265	0.042169	0.024096	0.036145
10^4	0.039120	0.050530	0.044010	0.034230	0.043195
10^5	0.041814	0.044526	0.041919	0.038686	0.041293
10^6	0.041786	0.041505	0.041391	0.042142	0.041301
10^7	0.041482	0.041778	0.041465	0.041849	0.041765
$2 \cdot 10^7$	0.041660	0.041911	0.041575	0.041668	0.041634

$a = 5$

x	$l = 0$	$l = 5$	$l = 10$	$l = 15$	$l = 20$
10^3	0.036145	0.042169	0.054217	0.054217	0.018072
10^4	0.043195	0.040750	0.042380	0.049715	0.035045
10^5	0.041814	0.039103	0.042440	0.043170	0.042023
10^6	0.041977	0.041747	0.041964	0.041556	0.041442
10^7	0.041581	0.041855	0.041775	0.041482	0.041581
$2 \cdot 10^7$	0.041668	0.041809	0.041665	0.041548	0.041542

$a = 15$

x	$l = 0$	$l = 5$	$l = 10$	$l = 15$	$l = 20$
10^3	0.042424	0.024242	0.036364	0.054545	0.036364
10^4	0.039967	0.042414	0.038336	0.047308	0.034258
10^5	0.042027	0.041610	0.041610	0.041193	0.040150
10^6	0.041710	0.041264	0.042194	0.041315	0.041646
10^7	0.041709	0.041545	0.041863	0.041809	0.041747
$2 \cdot 10^7$	0.041712	0.041683	0.041826	0.041775	0.041515

参考文献

- [1] 知念 宏司, 村田 玲音: $a \pmod{p}$ の剰余位数の分布について, 数理解析研究所講究録 1219 『解析数論の展望と諸問題』(2001年7月), 245-255.
- [2] _____: $a \pmod{p}$ の剰余位数の分布について, 「第4回 代数学と計算」研究集会(東京都立大学)報告集, <ftp://tnt.math.metro-u.ac.jp/pub/ac/2001> で公開中.
- [3] Chinen, K. and Murata, L.: On a distribution property of the residual order of $a \pmod{p}$, preprint.
- [4] Lagarias, J. C. and Odlyzko, A. M.: Effective versions of the Chebotarev density theorem, in *Algebraic Number Fields (Durham, 1975)*, 409-464, Academic Press, London, 1977.
- [5] Murata, L.: A problem analogous to Artin's conjecture for primitive roots and its applications, *Arch. Math.* 57 (1991), 555-565.
- [6] Murata, L. and Chinen, K.: On a distribution property of the residual order of $a \pmod{p}$ — II, preprint.