数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 67-77

Hardy spaces and preduals of Campanato spaces

大阪教育大学 教育学部 中井 英一 (Eiichi Nakai)
Department of Mathematics
Osaka Kyoiku University
enakai@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

1. 始めに

Hardy 空間 H^p を一般化した函数空間を定義して、この空間の相対空間が Campanato 空間になることを示す。この函数空間の導入は、Example 2.2 のように、H^1 に非常に近い空間の性質を調べるための手がかりになると考える。この空間の導入のきっかけは、次の fractional integral の有界性の一般化である。

Fractional integral I_α $(0<\alpha<n)$;

$$I_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^n}\,dy$$

について、次の有界性が知られている。

Theorem 1.1 (Hardy-Littlewood-Sobolev).

$$1<p<q<\infty,\quad -n/p+\alpha=-n/q$$

のとき

$$I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)\quad bdd.$$

函数 $\rho:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ に対して

$$I_\rho f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n}\,dy$$

とおく。ただし ρ は

$$\int_0^1\frac{\rho(t)}{t}\,dt<+\infty, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{A_1}\le\frac{\rho(s)}{\rho(r)}\le A_1\quad\text{for}\quad \frac{1}{2}\le\frac{s}{r}\le 2, \tag{1.2}$$

$$\frac{\rho(r)}{r^n}\le A_2\frac{\rho(s)}{s^n}\quad\text{for}\quad s\le r, \tag{1.3}$$

を満たすとする。$A_1,A_2>0$ は $r,s>0$ によらない定数である。$\rho(r)=r^\alpha, 0<\alpha<n$ ならば、I_ρ は通常の fractional integral I_α である。

Theorem 1.1 は、この I_ρ により、Theorem 1.2 のように、Orlicz 空間上に一般化される。

$\mathcal{F}$ を、連続な増加函数 $\Phi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ で全単射なものの全体とする。$\Phi \in \mathcal{F}$ ならば

$$\Phi(0) = 0, \quad \lim_{r\to+\infty} \Phi(r) = +\infty$$

である。$\Phi(+\infty) = +\infty$ としておく。

$\Phi \in \mathcal{F}$ が凸のとき、Φ で定義される Orlicz 空間を $L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ と書く。すなわち

$$L^\Phi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\epsilon|f(x)|)\,dx < +\infty \text{ for some } \epsilon > 0 \right\},$$

$$\|f\|_{L^\Phi} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \le 1 \right\}.$$

$L^\Phi(\mathbb{R}^n)$ はノルム $\|f\|_{L^\Phi}$ により Banach 空間になる。Φ が次の条件を満たすとき、∇_2-condition を満たすと言い、$\Phi \in \nabla_2$ と書く。

$$\exists k > 1 \quad \text{s.t.} \quad \Phi(r) \le \frac{1}{2k}\Phi(kr), \quad r \ge 0.$$

また Φ に対して、その complementary function を次のように定義する。

$$\tilde{\Phi}(r) = \sup\{rs - \Phi(s) : s \ge 0\}, \quad r \ge 0.$$

Theorem 1.2 ([3]). $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}$ が凸で、$\Phi \in \nabla_2$ とする。

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t}\,dt \le C\,\Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad r > 0, \tag{1.4}$$

$$\int_r^{+\infty} \tilde{\Phi}\left(\frac{\rho(t)}{C\int_0^r (\rho(s)/s)\,ds\,\Phi^{-1}(1/r^n)t^n}\right) t^{n-1}\,dt \le C, \quad r > 0 \tag{1.5}$$

ならば、

$$I_\rho : L^\Phi(\mathbb{R}^n) \to L^\Psi(\mathbb{R}^n) \quad \textit{bdd.}$$

なお、この定理において、$\Phi(r) = r^p$, $\Psi(r) = r^q$, $\rho(r) = r^\alpha$ の場合は、(1.4) は $-n/p + \alpha = -n/q$ と同値である。

Fractional integral I_α については、Figure 1 の有界性が知られている。

ここでは、Figure 1 を I_ρ に関する連続性に一般化するため、Hardy 空間 H^p を一般化した函数空間を定義する。その際、

$$-n/p + \alpha = -n/q$$

の関係を、

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t}\,dt \le C\Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad r > 0$$

に置き換えて成り立つようにすることが目標である。

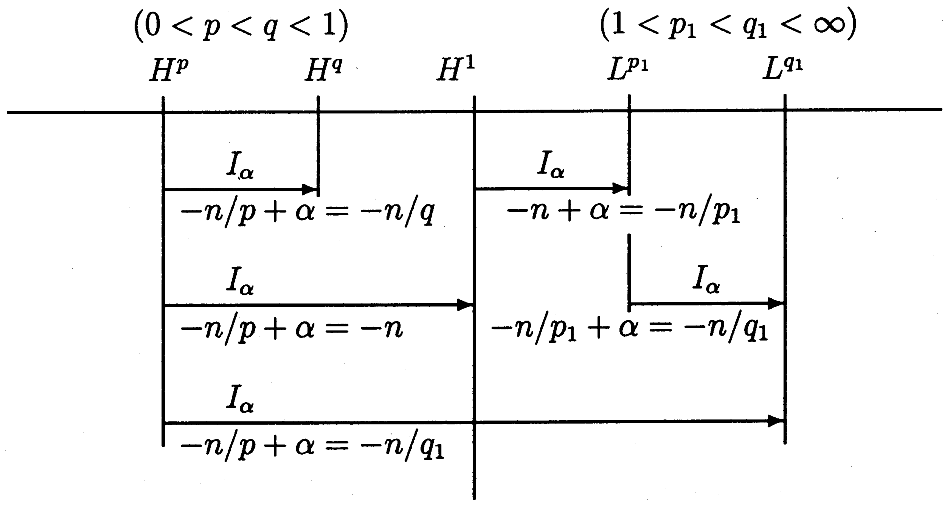

FIGURE 1. Boundedness of fractional integrals

2. 定義と結果

$\Phi \in \mathcal{F}$ のうち、

$$\Phi(r)/r^{n/(n+1)} \text{ is almost increasing}$$

であるものの全体を $\mathcal{F}_0$ で表す。

Definition 2.1. $\Phi \in \mathcal{F}_0$, $1 < q \leq \infty$ とする。$\mathbb{R}^n$ 上の函数 a が次の条件を満たすとき (Φ, q)-atom という。

$$\exists B, \text{ball, s.t.} \quad \begin{cases} \operatorname{supp} a \subset B, \\ \|a\|_q \leq |B|^{1/q}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right), \\ \int a(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

ここで、$|B|$ は ball B の Lebesgue 測度である。

Definition 2.2. $\Phi \in \mathcal{F}_0$ とし、$U \in \mathcal{F}$ は凹函数とする。$f \in \mathcal{D}'$ のうち、(Φ, q)-atom の列 $\{a_j\}$ と $\sum_j U(|\lambda_j|) < +\infty$ を満たす数列 $\{\lambda_j\}$ が存在して、

$$f = \sum_j \lambda_j a_j \text{ in } \mathcal{D}'$$

と表されるものの全体からなる空間を $H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$ と定義する。また

$$\|f\|_{H_U^{\Phi,q}} = \inf\left\{U^{-1}\left(\sum_j U(|\lambda_j|)\right) : f = \sum_j \lambda_j a_j \text{ in } \mathcal{D}'\right\}$$

とおく。ただし、下限は f の表現すべてにわたるものとする。

$q = \infty$ のとき、$H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) = H_U^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ と書く。

$\Phi(r)=1/U(1/r)$ のとき、$H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)=H^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$ と書く。
$q=\infty$ かつ $\Phi(r)=1/U(1/r)$ のとき、$H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)=H^{\Phi}(\mathbb{R}^n)$ と書く。

$d(f,g)=U(\|f-g\|_{H_U^{\Phi,q}})$ は距離になり、$H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$ は完備な線形距離空間である。
$I(r)=r$ とおくと、$\|f\|_{H_I^{\Phi,q}}$ はノルムとなり、$H_I^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$ は Banach 空間である。
$\Phi(r)=r^p$, $n/(n+1)<p\le 1$, ならば $H^{\Phi}(\mathbb{R}^n)=H^p(\mathbb{R}^n)$ である。

$$1<q_1<q_2\le\infty \quad\Rightarrow\quad H_U^{\Phi,q_2}(\mathbb{R}^n)\subset H_U^{\Phi,q_1}(\mathbb{R}^n),$$
$$\Psi(r)\le\Phi(Cr)\quad\text{for all}\quad r>0 \quad\Rightarrow\quad H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\subset H_U^{\Psi,q}(\mathbb{R}^n),$$
$$V(r)\le CU(r)\quad\text{for}\quad 0\le r\le 1 \quad\Rightarrow\quad H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\subset H_V^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n),$$
$$\text{任意の凹函数 } U \text{ に対して}\quad H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\subset H_I^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n).$$

ここで、埋め込みはいずれも連続である。$1<q\le\infty$ とする。

$$L^{q,0}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^q_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n):\int f(x)\,dx=0\right\}$$

とおくと、$L^{q,0}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ は $H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)$ で稠密である。

$\phi:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ とする。次の条件を doubling condition という。

$$\exists C>0\quad\text{s.t.}\quad \frac{1}{C}\le\frac{\phi(s)}{\phi(r)}\le C\quad\text{for}\quad \frac{1}{2}\le\frac{s}{r}\le 2.$$

Definition 2.3. $1\le p<\infty$ で、ϕ が doubling condition を満たすとき、Campanato 空間 $\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ を次のように定義する。

$$\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)=\left\{f\in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n):\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}<+\infty\right\},$$
$$\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}=\sup_{B=B(z,r)}\frac{1}{\phi(r)}\left(\frac{1}{|B|}\int_B|f(x)-f_B|^p\,dx\right)^{1/p},$$
$$f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(x)\,dx.$$

ここで、$B(z,r)$ は中心 $z\in\mathbb{R}^n$ 半径 $r>0$ の ball である。

$\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)$ は、定数を法とした空間として、ノルム $\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}$ により Banach 空間になる。

$$1\le p_1<p_2<\infty \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}_{p_2,\phi}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{L}_{p_1,\phi}(\mathbb{R}^n)$$
$$\phi(r)\le C\psi(r)\quad\text{for all}\quad r>0 \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n).$$

ここで、埋め込みはいずれも連続である。特に、

$$\phi\sim\psi \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n)=\mathcal{L}_{p,\psi}(\mathbb{R}^n),\quad \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}}\sim\|f\|_{\mathcal{L}_{p,\psi}}.$$

ϕ が almost increasing ならば、$1 < p < \infty$ に対して

$$\mathcal{L}_{p,\phi}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_{1,\phi}(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_{\mathcal{L}_{p,\phi}} \sim \|f\|_{\mathcal{L}_{1,\phi}}.$$

この空間を $\mathrm{BMO}_\phi(\mathbb{R}^n)$ と書く。さらに $\phi \equiv 1$ ならば、$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ である。

Theorem 2.1. $1 < q \le \infty$, $1/q + 1/q' = 1$, $\Phi \in \mathcal{F}_0$ とし、$r^{n/q}\Phi^{-1}(1/r^n)$ は *almost decreasing* とする。また $U \in \mathcal{F}$ は凹関数で

$$\sup_{0<s<1} \frac{U(rs)}{U(s)} \to 0 \quad (r \to 0)$$

とする。このとき

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)} \quad \Rightarrow \quad \left(H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathcal{L}_{q',\phi}(\mathbb{R}^n).$$

Remark 2.1. $B = B(z, r)$ のとき、

$$\phi(r) \sim \frac{1}{|B|\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)}.$$

Example 2.1. $\Phi(r) = r$ のとき、$\phi(r) \equiv 1$. このとき

$$\left(H_U^{1,q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n).$$

Example 2.2. $\beta \in \mathbb{R}$ に対して、$\Phi_\beta \in \mathcal{F}$,

$$\Phi_\beta(r) = \begin{cases} r\,(\log(1/r))^{-\beta} & \text{for small } r, \\ r\,(\log r)^{\beta} & \text{for large } r \end{cases}$$

とおくと、$\beta < 0$ ならば Φ_β は凹関数、$\beta > 0$ ならば Φ_β は凸函数である。このとき

$$\Phi_\beta{}^{-1}(r) \sim \begin{cases} r\,(\log(1/r))^{\beta} & \text{for small } r, \\ r\,(\log r)^{-\beta} & \text{for large } r. \end{cases}$$

$$\Phi_\beta{}^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \sim \begin{cases} r^{-n}\,(\log(1/r))^{-\beta} & \text{for small } r, \\ r^{-n}\,(\log r)^{\beta} & \text{for large } r. \end{cases}$$

そこで

$$\phi_\beta(r) = \frac{1}{r^n \Phi_\beta{}^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)}$$

とおくと、

$$\phi_\beta(r) \sim \begin{cases} (\log(1/r))^{\beta} & \text{for small } r, \\ (\log r)^{-\beta} & \text{for large } r. \end{cases}$$

$\beta < 0$ ならば ϕ_β は almost increasing であり、

$$\left(H_U^{\Phi_\beta,q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathrm{BMO}_{\phi_\beta}(\mathbb{R}^n).$$

$\beta > 0$ ならば ϕ_β は almost decreasing であり、

$$\left(H_U^{\Phi_\beta,q}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathcal{L}_{q',\phi_\beta}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 2.2. $\Phi \in \mathcal{F}_0$ とし、$U \in \mathcal{F}$ は凹とする。

$$\frac{1}{U^{-1}(Cr)} \le \Phi^{-1}\left(\frac{1}{r}\right) \le \frac{U^{-1}\left(\frac{Cs}{r}\right)}{U^{-1}(s)} \quad for \quad 0 < s \le r < +\infty,$$
$$U(rs) \le CU(r)U(s) \quad for \quad 0 < r, s \le 1$$

ならば

$$H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) = H_U^{\Phi,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Example 2.3. $n/(n+1) \le p_1 \le p_2 \le 1$ とし、

$$\Phi(r) = 1/U(1/r) = \begin{cases} r^{p_1} & \text{for small } r, \\ r^{p_2} & \text{for large } r, \end{cases}$$

とおく。このとき

$$H^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n) = H^{\Phi,\infty}(\mathbb{R}^n).$$

以下の定理では、函数 $\rho : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ は、(1.1)–(1.3) および

$$\left|\frac{\rho(r)}{r^n} - \frac{\rho(s)}{s^n}\right| \le C|r - s|\frac{\rho(r)}{r^{n+1}} \quad \text{for} \quad \frac{1}{2} \le \frac{s}{r} \le 2$$

を満たすとする。また、$q = \infty$ とする。

Theorem 2.3. $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}_0$ とし、$U, V \in \mathcal{F}$ は凹とする。

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)\int_0^r \frac{\rho(t)}{t}\,dt \le C\Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad r > 0, \tag{2.1}$$

$$V(rs) \le CV(r)U(s), \quad 0 \le r, s \le 1, \tag{2.2}$$

かつ、$0 < \exists\theta < 1$ $s.t.$

$$\int_r^\infty V\left(\left(\frac{\Psi^{-1}(1/t^n)}{\Psi^{-1}(1/r^n)}\right)^{(1/\theta)-1}\right)t^{-1}\,dt \le C, \quad r > 0,$$

$$\int_r^{+\infty} t^n\left(\Psi^{-1}\left(\frac{1}{t^n}\right)\right)^{1/\theta} t^{-1}\,dt \le Cr^n\left(\Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)\right)^{1/\theta}, \quad r > 0,$$

$$\frac{\rho(r)}{r^{n+1}}\left(\Psi\left(\frac{1}{r^n}\right)\right)^{-1/\theta} \quad is\ almost\ decreasing$$

を満たすとき、$I_\rho : H_U^\Phi(\mathbb{R}^n) \to H_V^\Psi(\mathbb{R}^n)$ は連続である。

(2.2) より、

$$\forall C_1 > 0\, \exists C_2 > 0 \quad \text{s.t.} \quad 0 < s, t \le C_1 \Rightarrow V(st) \le C_2 V(s) U(t)$$

が成り立つ。

Theorem 2.4. $\Phi \in \mathcal{F}_0$ とし、$\Psi, U \in \mathcal{F}$ で、Ψ は凸、U は凹とする。

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho(t)}{t}\, dt \le C \Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right), \quad r > 0,$$

$$\int_r^{+\infty} \Psi\left(\frac{\rho(t) r^{n+1} \Phi^{-1}(1/r^n)}{t^{n+1}}\right) t^{n-1}\, dt \le C, \quad r > 0$$

を満たすとき、$I_\rho : H_U^\Phi(\mathbb{R}^n) \to L^\Psi(\mathbb{R}^n)$ は連続である。

Example 2.4. $\alpha > 0$ に対して

$$\rho_\alpha(r) = \begin{cases} (\log(1/r))^{-\alpha-1} & \text{for small } r, \\ (\log r)^{\alpha-1} & \text{for large } r \end{cases}$$

とおくと、

$$\int_0^r \frac{\rho_\alpha(t)}{t}\, dt \sim \begin{cases} (\log(1/r))^{-\alpha} & \text{for small } r, \\ (\log r)^{\alpha} & \text{for large } r. \end{cases}$$

Φ_β を Example 2.2 で定義したものとすると、

$${\Phi_\beta}^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right) \int_0^r \frac{\rho_\alpha(t)}{t}\, dt \sim {\Phi_{\beta+\alpha}}^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right).$$

また、Theorems 2.3, 2.4 のほかの条件も満たすことから、Figure 2 の連続性が得られる。

3. 証明の概略

Lemma 3.1.

$$\sup_{0<s<1} \frac{U(rs)}{U(s)} \to 0 \quad (r \to 0)$$

のとき、$\ell \in \left(H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\right)^*$ ならば、

$$\|\ell\| = \sup\left\{ |\ell(f)| : \|f\|_{H_U^{\Phi,q}} \le 1 \right\} < +\infty.$$

Theorem 2.1 の証明. $g \in \mathcal{L}_{q',\phi}(\mathbb{R}^n)$ とする。(Φ, q)-atom a に対して、$ag \in L^1(\mathbb{R}^n)$ かつ

$$\int a(x) g(x)\, dx = \int a(x)(g(x) - g_B)\, dx.$$

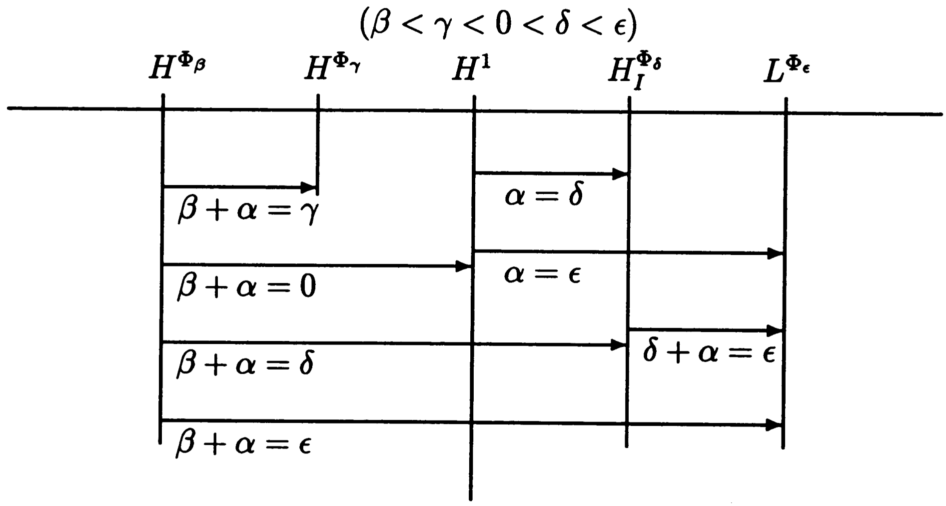

FIGURE 2. Continuity of generalized fractional integrals

ただし、$\mathrm{supp}\, a \subset B = B(z, r)$ とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
\left| \int a(x) g(x)\, dx \right| &\le \|a\|_q \left(\int_B |g(x) - g_B|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} \\
&\le |B|^{1/q} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \left(\int_B |g(x) - g_B|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} \\
&= |B| \Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g(x) - g_B|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} \\
&\sim \frac{1}{\phi(r)} \left(\frac{1}{|B|} \int_B |g(x) - g_B|^{q'}\, dx \right)^{1/q'} \le \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}}.
\end{aligned}
$$

$f \in L^{q,0}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n)$ のとき、$fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$. また

$$
f = \sum_j \lambda_j a_j, \quad U^{-1}\left(\sum_j U(|\lambda_j|) \right) \le 2\|f\|_{H_U^{\Phi,q}}
$$

とすると、

$$
\int f(x) g(x)\, dx = \sum_j \lambda_j \int a_j(x) g(x)\, dx,
$$

かつ

$$
\begin{aligned}
\left| \int f(x) g(x)\, dx \right| &\le C \left(\sum_j |\lambda_j| \right) \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}} \\
&\le C U^{-1}\left(\sum_j U(|\lambda_j|) \right) \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}} \le 2C \|f\|_{H_U^{\Phi,q}} \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}}.
\end{aligned}
$$

逆に $\ell \in \left(H_U^{\Phi,q}(\mathbb{R}^n)\right)^*$ とする。$B = B(z,r)$ を任意にとって固定する。$f \in L^{q,0}(B)$ に対して、

$$a(x) = \begin{cases} |B|^{1/q}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right) \|f\|_q{}^{-1} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

とおくと a は (Φ, q)-atom になる。従って

$$|\ell(a)| \le \|\ell\|,$$

すなわち

$$\frac{|\ell(f)|}{\|f\|_q} \le \|\ell\| \left(|B|^{1/q}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{|B|}\right)\right)^{-1} \sim \|\ell\|\phi(r)|B|^{1/q'}, \quad f \in L^{q,0}(B).$$

$L^{q,0}(B)$ は $L^q(B)$ の部分空間だから Hahn-Banach の定理により、

$$\|\ell\|_{(L^q(B))^*} \le C\|\ell\|\phi(r)|B|^{1/q'},$$

すなわち

$$\exists h^B \in L^{q'}(B) \quad \text{s.t.}$$

$$\ell(f) = \int_B f(x)h^B(x)\,dx, \quad \|h^B\|_{L^{q'}(B)} \le C\|\ell\|\phi(r)|B|^{1/q'}.$$

$g^B(x) = h^B(x) - (h^B)_B$, $x \in B$, とおくと

$$(g^B)_B = 0, \quad \|g^B\|_{L^{q'}(B)} \le C\|\ell\|\phi(r)|B|^{1/q'}$$

$$\ell(f) = \int_B f(x)h^B(x)\,dx = \int_B f(x)g^B(x)\,dx, \quad f \in L^{q,0}(B).$$

各 ball B に対して以上のように g^B が定まる。族 $\{g^B\}_B$ に対して、

$$\exists g \in L^{q'}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \quad \text{s.t.} \quad \text{for each ball } B, \quad g - g_B = g^B \quad \text{on } B.$$

このとき

$$g \in \mathcal{L}_{q',\phi}(\mathbb{R}^n), \quad \|g\|_{\mathcal{L}_{q',\phi}} \le C\|\ell\|,$$

$$\ell(f) = \int f(x)g(x)\,dx \quad \text{for } f \in L^{q,0}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^n). \quad \square$$

Definition 3.1. $\Phi \in \mathcal{F}_0$ とし、$0 < \theta < 1$ とする。$\mathbb{R}^n$ 上の函数 M が、

$$\exists z \in \mathbb{R}^n \quad \text{s.t.} \quad \|M\|_\infty^{1-\theta} \left\|\left(\Phi^{-1}\left(|\cdot - z|^{-n}\right)\right)^{-1/\theta} M\right\|_\infty^\theta < +\infty,$$

$$\int M(x)\,dx = 0$$

であるとき M を (Φ,∞,θ)-molecule という。また、

$$\mathcal{N}(M)=\mathcal{N}^{\Phi,\infty,\theta}(M)=\inf_{z\in\mathbb{R}^n}\|M\|_\infty^{1-\theta}\left\|\left(\Phi^{-1}\left(|\cdot-z|^{-n}\right)\right)^{-1/\theta}M\right\|_\infty^\theta$$

とおく。

Proposition 3.2. $\Phi,\Psi\in\mathcal{F}_0$ とし、$U,V\in\mathcal{F}$ は凹とする。

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right)\int_0^r\frac{\rho(t)}{t}\,dt\le C\Psi^{-1}\left(\frac{1}{r^n}\right),\quad r>0,$$

$$0<\exists\theta<1\quad s.t.\quad \frac{\rho(r)}{r^{n+1}}\left(\Psi\left(\frac{1}{r^n}\right)\right)^{-1/\theta}\ \textit{is almost decreasing}$$

とする。このとき、a が (Φ,∞)-*atom* ならば $I_\rho a$ は (Ψ,∞,θ)-*molecule* であり、$\mathcal{N}(I_\rho a)\le C$ が成り立つ。ただし、C は (Φ,∞)-*atom* a によらない定数である。

Proposition 3.3. $\Psi\in\mathcal{F}_0$ とし、$V\in\mathcal{F}$ は凹とする。

$$0<\exists\theta<1\ s.t.\quad \int_r^\infty V\left(\left(\frac{\Psi^{-1}(1/t^n)}{\Psi^{-1}(1/r^n)}\right)^{(1/\theta)-1}\right)t^{-1}\,dt\le C,\quad r>0$$

とする。このとき、M が (Ψ,∞,θ)-*molecule* ならば $M\in H_V^\Psi(\mathbb{R}^n)$ であり、

$$\forall C_1>0\ \exists C_2>0\quad s.t.\quad \mathcal{N}^{\Psi,\infty,\theta}(M)\le C_1\Rightarrow\|M\|_{H_V^\Psi}\le C_2.$$

Theorem 2.3 の証明.

$$f\in L^{\infty,0}_{\rm comp}(\mathbb{R}^n),\quad f=\sum_j\lambda_ja_j,\quad U^{-1}\left(\sum_jU(|\lambda_j|)\right)\le2\|f\|_{H_U^\Phi},$$

$$\|f\|_{H_U^\Phi}\le1.$$

とする。Proposition 3.2 と Proposition 3.3 により、

$$I_\rho a_j=\sum_k\lambda_{j,k}a_{j,k},\quad a_{j,k}\text{ are }(\Psi,\infty)\text{-atoms},\quad V^{-1}\left(\sum_kV(|\lambda_{j,k}|)\right)\le C.$$

このとき、

$$|\lambda_j|\le2,\quad|\lambda_{j,k}|\le C.$$

ゆえに

$$I_\rho f=\sum_j\lambda_jI_\rho a_j=\sum_j\lambda_j\sum_k\lambda_{j,k}a_{j,k}=\sum_{j,k}\lambda_j\lambda_{j,k}a_{j,k},$$

$$\begin{aligned}\sum_{j,k}V\left(|\lambda_j\lambda_{j,k}|\right)&\le C\sum_{j,k}U\left(|\lambda_j|\right)V\left(|\lambda_{j,k}|\right)\\&\le C'\sum_jU\left(|\lambda_j|\right)\le2C'\,U\left(\|f\|_{H_U^\Phi}\right).\end{aligned}$$

$$V\left(\|I_\rho f\|_{H_V^\Psi}\right) \le C\, U\left(\|f\|_{H_U^\Phi}\right) \quad \text{for} \quad \|f\|_{H_U^\Phi} \le 1. \quad \square$$

Proposition 3.4. *Theorem 2.4* の仮定のもとで、a が (Φ,∞)-*atom* ならば

$$I_\rho a \in L^\Psi(\mathbb{R}^n), \quad \textit{and} \quad \|I_\rho a\|_{L^\Psi} \le C.$$

ただし、C は (Φ,∞)-*atom* a によらない定数である。

Theorem 2.4 の証明. $U(r) = I(r) = r$ の場合を示せばよい。

$$f \in L^{\infty,0}_{\text{comp}}(\mathbb{R}^n), \quad f = \sum_j \lambda_j a_j, \quad \sum_j |\lambda_j| \le 2\|f\|_{H_I^\Phi}.$$

とする。Proposition 3.4 により、

$$I_\rho f = \sum_j \lambda_j I_\rho a_j, \quad \text{and}$$

$$\|I_\rho f\|_{L^\Psi} \le \sum_j |\lambda_j|\, \|I_\rho a_j\|_{L^\Psi} \le C \sum_j |\lambda_j| \le 2C\|f\|_{H_I^\Phi}. \quad \square$$

References

[1] J.García-Cuerva and J.L.Rubio de Francia, Weighted norm inequalities and related topics, North-Holland, 1985.

[2] S. Lu, M. H. Taibleson and G. Weiss, Spaces generated by blocks, Publishing House of Beijing Normal University, 1989.

[3] E. Nakai, *On generalized fractional integrals*, Taiwanese J. Math. **5** (2001), 587–602.

[4] E. Nakai, *On generalized fractional integrals in the Orlicz spaces on spaces of homogeneous type*, Sci. Math. Jpn. **54** (2001), 473–487. (Sci. Math. Jpn. Online **4** (2001), 901–915).

[5] E. Nakai, *On generalized fractional integrals on the weak Orlicz spaces, BMO_ϕ, the Morrey spaces and the Campanato spaces*, Proceedings of the Conference on Function Spaces, Interpolation Theory, and related topics in honour of Jaak Peetre on his 65th birthday, Lund University, Sweden, to appear.